Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Christian Bayer
Dipl.-Math. Jana Bielagk
Dipl.-Wirtsch.-Math. Oliver Janke

Stochastik I Sommersemester 2015

Übungsblatt 11

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

1. Bestimmen Sie die charakteristischen Funktionen der Poisson- und der Binomialverteilung und berechnen Sie die Erwartungswert und Varianz durch Ableiten. *(4 Punkte)*

2. a) Sei φ_X die charakteristische Funktion einer d-dimensionalen reellen ZV X. Nehmen Sie an, dass es ein $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gibt mit $\varphi_X(u) = 1$. Man zeige: für alle $v \in \mathbb{R}^d$ gilt: $\varphi_X(u+v) = \varphi_X(v)$.
b) Seien X, Y unabhängig, dann gilt $\varphi_{X+Y}(u) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u)$.
c) Seien X, Y unabhängige, identisch verteilte ZV. Zeigen Sie, dass $X - Y$ eine symmetrische Verteilung hat, d.h., dass für jede messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ gilt:
$P(X - Y \in A) = P(X - Y \in -A)$.
(4 Punkte)

3. Die *logarithmische Normalverteilung* $LN(\mu, \sigma^2)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ ist definiert als das Bildmaß der Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ unter der Exponentialfunktion, d.h. als Verteilung von $\exp(X)$ für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
   a) Berechnen Sie die momentenerzeugende Funktion der Normalverteilung.
   b) Berechnen Sie die Momente $E[Y^n]$, $n \in \mathbb{N}$, und die Varianz für $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$.

   (4 Punkte)

4. a) Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie die Inversionsformel
$$\mu(\{n\}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iux} \widehat{\mu}(u) du.$$
Hinweis: Der Satz von Fubini und der Konvergenzsatz von Lebesgue gelten auch für komplexwertige Integranden (ohne Beweis).
b) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *positiv semidefinit*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gilt:
$$\sum_{l,m=1}^{n} \varphi(u_l - u_m)\lambda_l \overline{\lambda_m} \geq 0.$$
Zeigen Sie: Jede charakteristische Funktion ist positiv semidefinit.
Bemerkung: Der *Satz von Bochner* liefert die Umkehrung: jede positiv semidefinite, gleichmäßig stetige Funktion φ mit $\varphi(0) = 1$ ist Fouriertransformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.
(4 Punkte)

Abgabe: 29. Juni in der Vorlesung