Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Christian Bayer
Dipl.-Math. Jana Bielagk
Dipl.-Wirtsch.-Math. Oliver Janke

Stochastik I Sommersemester 2015

Übungsblatt 10

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

1. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$P\left(X_n = n^\lambda\right) \;=\; P\left(X_n = -n^\lambda\right) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Geben Sie eine Bedingung für λ an, so dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das starke Gesetz der großen Zahlen erfüllt. Geben Sie auch eine weitere Bedingung für λ an, so dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder das starke noch das schwache Gesetz der großen Zahlen erfüllt. *(4 Punkte)*

2.

(a) Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \{0, 1\}$ Zufallsvariablen. Weiter sei $p_n := P(X_n = 1)$. Zeigen Sie, dass die X_n genau dann in Wahrscheinlichkeit gegen die Nullfunktion konvergieren, wenn $p_n \to 0$ gilt.

(b) Seien $X, X_1, X_2, \ldots : \Omega \to (0, +\infty)$ Zufallsvariablen und es gelte $X_n \xrightarrow{P} X$. Gilt dann auch $1/X_n \xrightarrow{P} 1/X$?

(4 Punkte)

3. Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \le 0 \\ x\left(1 - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x}\right) & \text{, falls } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{, falls } x \ge 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad F(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \le 0 \\ x & \text{, falls } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{, falls } x \ge 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Dichten f_n der Verteilungsfunktionen F_n und f von F. Zeigen Sie: Die Verteilungsfunktionen F_n konvergieren (punktweise) gegen F, die zugehörigen Dichten f_n konvergieren jedoch nicht gegen f. *(4 Punkte)*

4. Beweisen Sie das P-sup-Kriterium: Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen konvergiert genau dann fast sicher gegen eine Zufallsvariable X, wenn gilt:

$$\lim_{m\to\infty} P\left(\sup_{n\ge m} |X_n - X| > \varepsilon\right) \;=\; 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

(4 Punkte)

Abgabe: 22. Juni in der Vorlesung