Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Christian Bayer
Dipl.-Math. Jana Bielagk
Dipl.-Wirtsch.-Math. Oliver Janke

Stochastik I Sommersemester 2015

Übungsblatt 1

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

In den Aufgaben der ersten Übung betrachten wir das Experiment des wiederholten Münzwurfes mit einer "unfairen" oder unsymmetrischen Münze, also einer Münze, bei der das Ereignis "Kopf" (K) mit Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ und das Ereignis "Zahl" (Z) mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ auftritt.

1. a) Formulieren Sie ein probabilistisches Modell für den n-fachen Münzwurf mit dieser Münze. D.h., definieren Sie eine Mengenfunktion $P = P_n$ auf der Potenzmenge 2^{Ω_n}, mit $\Omega_n = \{K, Z\}^n$.
b) Sei die Zufallsvariable S_n definiert als die Anzahl des Auftretens von "Kopf"—formal: $S_n(\omega) = \#\{i \in \{1, \dots, n\} | \omega_i = K\}$. Berechnen Sie
$$P_n\left(\{\omega \in \Omega_n | S_n(\omega) = K\}\right) \equiv P_n\left(S_n = k\right)$$
für $0 \le k \le n$.
c) Zeigen Sie, dass
$$\lim_{n \to \infty} P_{2n}\left(S_{2n} = n\right) = 0.$$
(4 Punkte)

2. Formulieren und beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen für den unsymmetrischen Münzwurf.
Hinweis: Der Beweis der Ungleichung von Tschebyschow für den unsymmetrischen Münzwurf ist wortwörtlich identisch mit dem Beweis der Ungleichung im Falle des fairen Münzwurfes. Die Ungleichung kann daher ohne Beweis verwendet werden. *(4 Punkte)*

3. Seien $1 \le k \le n$ und P_k und P_n die entsprechenden Mengenfunktionen definiert in Aufgabe 1. Wir sagen, dass eine Menge $A \subset \Omega_n$ nur von den Indizes $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ abhängt, falls es eine Menge $A' \subset \Omega_k$ gibt mit $A = \{\omega \in \Omega_n | (\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}) \in A'\}$.
a) Beweisen Sie, dass in diesem Fall gilt: $P_n(A) = P_k(A')$.
b) Gegeben seien nun Indexmengen $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ und $1 \le j_1 < \dots < j_l \le n$. Gegeben seien Mengen $A, B \subset \Omega_n$, die nur von den Indizes $i_1, \dots, i_k$ bzw. nur von den Indizes $j_1, \dots, j_l$ abhängen. Falls $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \varnothing$, dann gilt
$$P_n(A \cap B) = P_n(A) \cdot P_n(B).$$
Hinweis: Es mag für diese Aufgabe sinnvoll sein—vor allem um überbordende Notation zu vermeiden—, zunächst folgendes Resultat zu zeigen: Sei $A \subset \Omega_n$ und σ eine Permutation der Zahlen 1, …, n. Definiere $\sigma^{-1}(A) \equiv \{\omega \in \Omega_n | \left(\omega_{\sigma(1)}, \dots, \omega_{\sigma(n)}\right) \in A\}$. Dann gilt
$$P_n(\sigma^{-1}(A)) = P_n(A).$$

(4 Punkte)

4. Im unsymmetrischen Münzwurf kann man natürlich den Parameter p (und dann auch q) abhängig von n wählen. Betrachten wir also eine Folge von Parametern p_n und $q_n = 1 - p_n$, die jeweils Wahrscheinlichkeiten P_n auf Ω_n definieren. Seien die Parameter so gewählt, dass $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\{\omega \in \Omega_n | S_n(\omega) = j\}\right) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei S_n in Aufgabe 1 definiert wurde.
Bemerkung: Dieses Resultat heißt auch Poisson'scher Grenzwertsatz. *(4 Punkte)*

Abgabe: 20. April in der Vorlesung