Anwendung der *von Kármán*'schen Plattentheorie und der *Hertz*'schen Pressung für die Spannungsanalyse zur Biegung von GaAs-Wafern im modifizierten Doppelringtest

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Frank Duderstadt
aus Halle (Saale)

Von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technische Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften
- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:
Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Heinz Mertens
Gutachter: Priv.-Doz. Dr. rer. nat. Wolfgang Dreyer
Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Brocks

wissenschaftliche Aussprache: am 27.11.2003 in Berlin

Berlin 2003
D 83

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2002 und 2003 im Anschluss an eine von der Firma *Freiberger Compound Materials* (*FCM*) an das *Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik* (*WIAS*) in Auftrag gegebene Spannungsanalyse eines Waferbiegetests.

Seitens der *FCM* wurde insbesondere die Berücksichtigung des anisotrop-elastischen Verhaltens des einkristallinen Wafer-Materials und des im Test auftretenden Kontaktproblems durch die Theorie der *Hertz*'schen Pressung gewünscht.

Die Implementation der Finite-Element-Diskretisierung des in der hier vorliegenden Arbeit beschriebenen 2D-Plattenmodells, welches die gewünschten Effekte berücksichtigt, in die WIAS-Toolbox *pdelib* wurde bereits im Frühjahr 2001 abgeschlossen. Dazu habe ich zunächst die *WIAS*-Toolbox *pdelib* um die hier vorgestellten Plattenelemente ergänzt. Anschließend habe ich das vollständige *Newton*-Schema des diskretisierten nichtlinearen Plattenproblems implementiert, so dass ich die in der Toolbox *pdelib* enthaltenen, hoch effizienten, nichtlinearen und linearen Löser sowie die vorhandenen Gitterverwaltungs-Routinen verwenden konnte.

In dieser Stelle danke ich zu allererst Herrn Priv.-Doz. Dr. *Wolfgang Dreyer* vom *WIAS* für die Betreuung und Begutachtung der hier vorgelegten Dissertation. Sein großes Interesse am Gelingen dieser Arbeit war stets Motivation für mich. Insbesondere danke ich ihm für die zahlreichen, kritischen und oft turbulenten Diskussionen, die weit über das hier vorgestellte Thema hinausgingen. Dies resultiert vor allem daraus, dass er und ich noch weitere Projekte in Kooperation mit *FCM* bearbeiten, die sich mit verschiedenen thermo-dynamischen Aspekten bei der Gallium-Arsenid-Herstellung befassen.

Mein besonderer Dank gilt aber auch den Professoren *Wolfgang H. Müller* und *Wolfgang Brocks* für die Übernahme der Begutachtung dieser Dissertation und für ihre zügige Anfertigung der Berichte zur vorliegenden Arbeit.

Die Herren Dr. *Stefan Eichler* und Herrn Dr. *Manfred Jurisch* von *FCM* haben mir viele fruchtbare Hinweise gegeben. Ihr großes Interesse, insbesondere auch an den mehr theoretischen Aspekten dieser Arbeit, haben mir sehr geholfen. Wesentliche Details der hier vorgestellten wissenschaftlichen Untersuchungen haben ihren Ursprung in den ihnen formulierten industriellen Fragestellungen.

Ich danke Herrn Dr. *Jürgen Fuhrmann* und Herrn Dr. *Klaus Gärtner* vom *WIAS* für die kritischen Diskussionen zu numerischen Fragestellungen und die jederzeit prompte Administration der Toolbox *pdelib*.

Mein Dank gilt auch Herrn Dipl.-Math. *Michael Herrmann*, der mir insbesondere bei mathematischen Fragestellungen ein stets geduldiger Diskussionspartner war.

Ferner ich den Kollegen Prof. *Krzysztof Wilmański*, Prof. *Dietmar Hömberg* und Priv.-Doz. Dr. *Wolf Weiss* für ihr Interesse und für die hilfreichen Kommentare zu verschiedenen Aspekten der vorliegenden Arbeit.

Ich danke aber auch meinem Freund Prof. *Thomas Böhlke* für die vielen kritischen und hilfreichen Diskussionen über die verschiedensten Gebiete der Kontinuumsmechanik während der Entstehungszeit dieser Arbeit.

Mein allergrößter Dank gebührt jedoch meiner Frau *Beate*, die mich während der gesamten Zeit mit viel Geduld, Verständnis und Hilfsbereitschaft unterstützt hat. Ihr in mich gesetztes Vertrauen und unsere Mädchen *Tilly* und *Pia* waren mir stets Ansporn am Zustandekommen dieser Arbeit.

Berlin, 04. Dezember 2003 Frank Duderstadt

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **ii**

1 Einführung **1**
- 1.1 Problemstellung und Ziel der Arbeit 1
- 1.2 Kurzbeschreibung der Modellierung 5
- 1.3 Übersicht 9

2 Bezeichnungen und Symbole **11**

3 Modellierung des modifizierten Doppelring-Biegeversuchs **18**
- 3.1 Versuchsanordnung 18
- 3.2 Modellannahmen 19
- 3.3 Material- und Geometriedaten, Last- und Durchbiegebereich 20
- 3.4 Wichtige Schlussfolgerungen aus der konkreten Datenlage . . 22

4 Formulierung als nichtlineares 3D-Randwertproblem **25**
- 4.1 Tensornotation im $\mathbb{R}^3$ 25
- 4.2 Exkurs über Elastizitätstheorie 26
  - 4.2.1 Lagebeschreibung, Verschiebungen und Verzerrungen . 26
  - 4.2.2 Oberflächenelemente und Flächennormalen 32
  - 4.2.3 Spannungen 33
  - 4.2.4 Mechanisches Gleichgewicht 34
  - 4.2.5 Das *Saint-Venant–Kirchhoff*'sche Materialgesetz . . . 35
- 4.3 Die Randbedingungen 37
  - 4.3.1 Festlegung des Koordinatensystems 37
  - 4.3.2 Zum Prinzip von *Saint-Venant* 39
  - 4.3.3 Die Verhältnisse unter dem Kugelstempel 40
  - 4.3.4 Die Verhältnisse am Stützring 44
  - 4.3.5 Lastfreie Ränder und Starrkörperfesseln 46
  - 4.3.6 Übergang zu normierten Größen 48

5 Dünne Platten unter moderater Durchbiegung — ein 2D-Modell nach *von Kármán* **49**
- 5.1 Tensornotation im $\mathbb{R}^2$ 49

5.2 Unterschiedliche Wege zum 3D/2D-Übergang 49
5.3 Herleitung der *von Kármán*'schen Plattentheorie auf klassischem Wege 55
5.3.1 Grundannahmen zum Verschiebungs- und Spannungsfeld 55
5.3.2 Das *Saint-Venant–Kirchhoff*'sche Gesetz für dünne Platten 57
5.3.3 Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen für dünne Platten 58
5.3.4 Formulierung des Materialgesetzes in Schnittgrößen . 60
5.3.5 Das System der *von Kármán*'schen Gleichungen . . . 61
5.3.6 Die Rand- und Übergangsbedingungen in der 2D-Formulierung 61
5.3.7 Spannungsberechnung mit der *von Kármán*'schen Plattentheorie 64
5.4 Rechtfertigung der *von Kármán*'schen Plattentheorie durch asymptotische Entwicklung des 3D-Problems 66
5.4.1 Übergang zum skalierten 3D-Problem 67
5.4.2 Definition der skalierten Größen 70
5.4.3 Herleitung der Skalierungsvorschriften für die Verschiebungen und die Randlast 71
5.4.4 Herleitung der *von Kármán*'schen Gleichungen unter Anwendung der Skalierungsvorschriften 91
5.4.5 Reskalierung, Identifizierung der klassischen Plattengrößen 99
5.5 Zusammenfassung und Folgerungen zur Anwendbarkeit der *von Kármán*'schen Plattentheorie 101
5.6 Anmerkungen zur Entstehung der *von Kármán*'schen Plattengleichungen 103
5.7 *Von Kármán*-Theorie versus invariante nichtlineare Membrantheorie und invariante nichtlineare Biegetheorie 104

6 *Hertz*'sche Pressung — Berechnung der äußeren Flächenlast und der Kontaktfläche zwischen Kugel und Platte 107
6.1 Das elastische Problem für den isotropen und für den kubisch symmetrischen Fall 107
6.2 Inelastische Effekte 115

7 Finite-Element-Approximation des 2D-Plattenproblems 119
7.1 Allgemeines 119
7.2 Die Finite-Element-Methode als spezielles *Galjorkin*-Verfahren 120
7.3 Zur Konstruktion des Finite-Element-Raums der *von Kármán*'schen Plattengleichungen 122

7.3.1 Triangulierung 122

7.3.2 Interpolationspolynome mit Stetigkeitsanforderungen am Elementrand 128

7.3.3 Einheitsdreieck und Dreieckskoordinaten 130

7.3.4 Zur Konstruktion des Plattenelements 133

7.3.5 Zur Konstruktion des Scheibenelements 137

7.4 Formulierung des diskretisierten nichtlinearen Problems ohne Verschiebungsrandbedingungen 138

7.4.1 Die diskretisierten Scheibengleichungen 138

7.4.2 Die diskretisierten Plattengleichungen 140

7.5 Verschiebungsrandbedingungen — das Plattenparadox der frei drehbar gestützten Platte 143

7.6 Das vollständige *Newton*-Schema des Gesamtproblems 149

7.7 Numerische Ergebnisse 153

7.7.1 *Kirchhoff*-Test zum Plattenparadox 153

7.7.2 Vergleich der isotropen Mittelungsformeln bezüglich der maximalen Durchbiegung 154

7.7.3 Nichtlineare anisotrope Rechnung im Vergleich zum Experiment 155

7.7.4 Spannungsverläufe mit anisotropen Effekten für Wafer mit 150 mm Durchmesser 157

7.7.5 Beurteilung der Maximalspannungen im Lichte der Plattentheorie 159

8 Analytische Lösungen für isotrope dicke Kreisplatten kleiner Durchbiegung 163

8.1 Die Biegung des Kernzylinders als isotropes rotationssymmetrisches 3D-Problem 163

8.2 Der 3D-Verschiebungsansatz nach *Papkowitsch-Neuber* 165

8.2.1 Formulierung in kartesischen Koordinaten 165

8.2.2 Übergang zum rotationssymmetrischen Fall in Zylinderkoordinaten, dicke Kreiszylinderplatten und -stäbe 168

8.3 Zwei wichtige Klassen rotationssymmetrischer Lösungen der *Laplace*-Gleichung in Zylinderkoordinaten 172

8.3.1 Polynomlösungen 172

8.3.2 Lösung durch Separationsansätze 173

8.4 Vorschlag zur Lösung des isotropen Kernzylinderproblems aus den Schnittlasten einer Finite-Element-Plattenlösung 177

8.5 Die 3D-Lösung einer frei drehbar gestützten Platte unter konstanter, lokal begrenzter Last nach der Theorie für dicke Platten 179

8.5.1 Randbedingungen 179

8.5.2 Teillösung aus dem Problem I 180

8.5.3 Teillösungen aus Problem II und III 182

8.5.4 2D-3D-Vergleich unter Verwendung von Material- und Geometriedaten aus dem GaAs-Biegetest 183
8.5.5 Folgerungen aus dem 2D-3D-Vergleich 189

9 Schlussbemerkungen und Ausblick 190

A Ergänzende Ausführungen zum 3D-Problem 192
A.1 Deformation und Lageänderung 192
A.2 Zur Darstellung der elastischen Konstanten 194
A.2.1 *Voigt*'sche Notation — modulare Darstellung 194
A.2.2 Elastische Konstanten bei Isotropie oder kubischer Materialsymmetrie 196
A.2.3 Isotrope Mittelung kubisch elastischer Materialien . . 197
A.3 Kleine Verzerrungen — kleine Verschiebungsgradienten 201
A.4 Eine schwache Formulierung des 3D-Randwertproblems 202

B Ergänzende Ausführungen zur 2D-Theorie für dünne Platten 205
B.1 Schwache Formulierungen 205
B.1.1 Alternative schwache Formulierungen der *von Kármán*'schen Plattentheorie 205
B.1.2 Die schwache Formulierung des *von Kármán*'schen Problems in Verschiebungsgrößen 206
B.1.3 Echter Kreisrand 208
B.1.4 Kreisapproximation durch ein Polygon 209
B.2 Die *Kirchhoff*'sche Plattentheorie 209
B.3 Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften 210
B.3.1 Kubische Symmetrie in rotationssymmetrischen Bauteilen 210
B.3.2 Isotropie – der vollständig rotationssymmetrische Fall 211
B.3.3 Isotrope Mittelung für die 2D-Plattentheorie 213

C Funktionenräume und spezielle Funktionen 215
C.1 Raumdefinitionen 215
C.2 Einige Eigenschaften von *Bessel*funktionen 215

Literaturverzeichnis 217

Kapitel 1

Einführung

1.1 Problemstellung und Ziel der Arbeit

Gallium-Arsenid (GaAs) ist heute eines der wichtigsten Materialien in der Halbleiterindustrie und in der Optoelektronik. Die Verwendung von Gallium-Arsenid hat gegenüber Silizium zahlreiche Vorteile. Seine besonderen optischen Eigenschaften macht GaAs in der Laser-Industrie zu einem geschätzten Rohstoff. In der Elektronikindustrie wird GaAs immer dann bevorzugt verwendet, wenn hohe Taktraten zur Bewältigung größer Datenströme wichtig sind. Außerdem sind mit GaAs bestimmte, hoch effiziente Chip-Herstellungsverfahren möglich, die auf der z.T. halbisolierenden Eigenschaft von GaAs beruhen.

Da für den technischen Einsatz polykristallines GaAs kaum verwendbar ist, muss GaAs zunächst als Einkristall zur Verfügung stehen. Herstellungsbedingt liegt einkristallines GaAs zuerst in Form von langen zylinderförmigen Stäben, wie in Abbildung 1.1 zu sehen, vor. Die Technologie, welche die Herstellung solcher Einkristall-Stäbe zum Gegenstand hat, wird Kristallzucht genannt.

Zur Chipherstellung werden die Zylinderstäbe in dünne Kreisscheiben zersägt. Die einzelnen Scheiben nennt man in der Halbleiterindustrie meist Wafer. Nach dem Sägen werden noch ein oder mehrere schmale Kreissegmente vom Rand des Wafers entfernt, wie am mittleren Wafer in Abbildung 1.1 zu sehen, um seine kristallografische Orientierung zu markieren. Anschließend werden die Kanten abgerundet und die Oberflächen poliert. Zum Erreichen einer hohen Homogeninität des Materials wird der Wafer zusätzlich einer Wärmebehandlung unterzogen [39].

Der auf diese Weise behandelte Wafer, stellt das fertige Produkt des Waferherstellers dar, was dieser am internationalen Markt zum Kauf anbietet. Für eine effiziente Chip-Produktion sind die Abnehmer von Wafern an möglichst großen Waferdurchmessern interessiert und haben spezielle Anforderungen an die Konzentration von Fremdatomen im Kristall. Hierbei wirkt

Abbildung 1.1: Oben: Einkristalline GaAs-Zylinderstäbe der Firma *Freiberger Compound Materials* bevor sie in einzelne Wafer zersägt werden. Unten: polierte Wafer.

es sich für die Waferhersteller als besonders nachteilig aus, dass die Züchtung eines GaAs-Einkristalls und die Wärmebehandlung der Wafer technologisch ungleich aufwändiger und damit teurer ist, als die entsprechenden Verfahren für die Herstellung von Si-Wafern. Die maximal herstellbaren Waferdurchmesser liegen heute bei Gallium-Arsenid deutlich unter denen von Silizium.

Die Qualität eines Wafers wird nicht allein an der Erfüllung seiner elektrischen und optischen Eigenschaften gemessen, sondern auch an seiner mechanischen Beanspruchbarkeit. Da der Wafer während der Chip-Herstellung in verschiedener Weise mechanischer Beanspruchung ausgesetzt ist, setzt eine effiziente Chip-Produktion eine möglichst hohe Bruchfestigkeit voraus. Deshalb muss der Waferhersteller dem Abnehmer nicht nur die elektrische und optische Funktionstüchtigkeit seiner Produkte garantieren, sondern auch die Höhe der Bruchfestigkeit.

Zur Beurteilung der Bruchfestigkeit des Wafermaterials muss der Waferhersteller Bruchtests durchführen. Da sich Wafermaterialien sehr spröde verhalten, werden Bruchtests gewählt, die auch für Gläser und Keramiken angewendet werden. Eine Übersicht der verschiedenen für Silizium vorgeschlagenen Tests wird in [62] von *Kiesewetter, Houdeau, Löper* und *Zhang* angegeben. Die dort beschriebenen Test sind in gleicher Weise auch auf Gallium-Arsenid übertragbar.

Der Waferproduzent *Freiberger Compound Materials* (*FCM*) verwendet als Bruchtest den modifizierten Doppelring-Biegeversuch [45, 46, 96]. Der modifizierte Doppelring-Biegeversuch kann als spezielle Variante des in der Europäischen Norm *DIN EN* 1288-5: 2000 standardisierten *Doppelring-*

*Biegeversuch*s *an plattenförmigen Proben mit kleinen Prüfflächen* entsprechend [83] betrachtet werden. Im Doppelring-Biegeversuch liegt eine flache Probe konzentrisch und frei auf einem Stützring. Während im Doppelring-Biegeversuch nach [83] zum Aufbringen der Kraft ein zweiter Ring, dort Lastring genannt, verwendet wird, erfolgt das Aufbringen der Kraft im modifizierten Biegeversuch gemäß Abbildung 1.2 durch eine Druckkugel. Ein ähnlicher Biegetest ist in der US-amerikanischen Norm *ASTM F* 394-78 standardisiert [82]. Hier werden statt eines Stützringes drei Stützkugeln verwendet, deren Mittelpunkte zu einem gleichseitigen Dreieck angeordnet sind. Als Proben werden runde Kreisplatten verwendet, die konzentrisch auf den Stützkugeln aufliegen. Die Lastaufbringung erfolgt analog zur Abbildung 1.2 mit einer Druckkugel. Der von *FCM* verwendete Druckkugeldurchmesser von 1/8" ist genauso groß wie der Durchmesser der Stützkugeln entsprechend der Norm *ASTM F* 394-78. Einem ähnlichen Biegeversuch, bei dem ebenfalls mit Kugeln dieses Durchmessers gedrückt wird, wurden auch GaAs-Wafer der Firma *Texas Instruments* unterzogen [112].

Das in Abbildung 1.2 dargestellte Prinzip des modifizierten Doppelring-Biegeversuchs für kreisförmige Wafer wurde erstmals 1981 von *Hu* [58] beschrieben. Umfangreiche Bruchtests mit gleichem Versuchsaufbau sind für Silizium-Wafer auch in den Arbeiten von *McLaughlin* und *Willoughby* in [75] dokumentiert.

In allen Biegetests wird die maximale Durchbiegung und die aufgewendete Kraft bis zum Bruch gemessen.

Nach einer weithin akzeptierten Bruchhypothese beginnt der Bruch am Ort der größten Zugspannung. Liegen viele Unreinheiten vor, z.B. in Form von Rissen oder Einschlüssen, streuen die Werte der aufgewendeten Kraft bis zum Bruch stark, da der Ort der maximalen Zugspannung in der Umgebung dieser Unreinheit liegen kann, d. h. nicht am exakt bestimmbaren Ort der maximalen Zugspannung eines rissfreien Wafers. Der Hersteller der Wafer ermittelt aus einer Vielzahl solcher Bruchtests die Ausfallwahrscheinlichkeit [46]. Je geringer die Ausfallwahrscheinlichkeit beim Vorliegen einer bestimmten Spannung ist, desto höher ist die Materialreinheit. Für spröde Materialien wird meist unterstellt, wie auch in [46], dass die Ausfallwahrscheinlichkeit einer *Weibull*-Verteilung genügt.

Zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit nach *Weibull* [113] muss der Verlauf der Hauptzugspannungen im Bauteil bekannt sein. Druckspannungen bleiben hingegen unberücksichtigt. Für den Standardversuchsaufbau des Tests in Abbildung 1.2 können jedoch nicht die Spannungsverläufe, sondern nur die Durchbiegungen und die aufgebrachte Kraft bis zum Bruch gemessen werden. Die Spannung muss mit einer geeigneten Theorie aus den gemessenen Größen berechnet werden.

Der modifizierte Doppelring-Biegeversuch wird in der Praxis in zwei Vari-

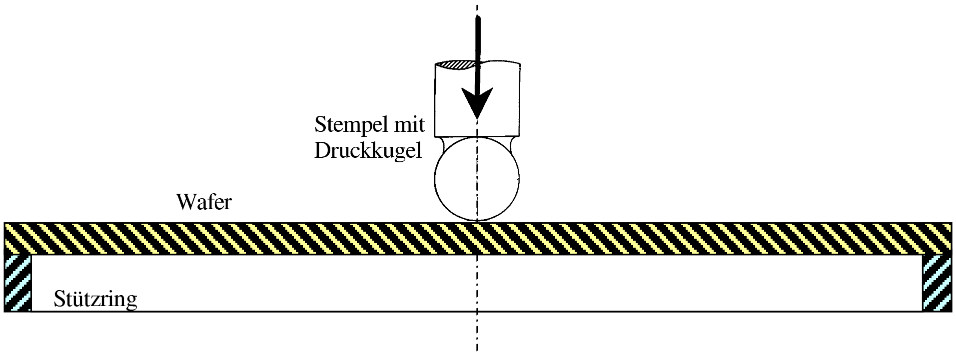

Abbildung 1.2: Versuchsaufbau für den Biegetest des unzerteilten Wafers nach *Hu* [58].

anten durchgeführt:

In der ersten Variante dient der gesamte Wafer als Probe. Detaillierte Beschreibungen zu diesem Test werden in [58, 75, 112] und [46] gegeben. Die Modellierung dieses Versuchs und analytische Betrachtungen zum Modell sind Gegenstand dieser Arbeit.
In der zweiten Variante dienen als Proben kleine quadratische Wafer-Abschnitte. Eine detaillierte Beschreibung zu diesem Test ist in [62] zu finden. In einer Studienarbeit von *Kümmel* in [69] befinden sich für diese Testvariante ausführliche Darlegungen zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit unter Annahme einer *Weibull*-Verteilung. Allerdings werden sowohl in [62] als auch in [69] die analytischen Spannungsberechnungen für die kubisch-anisotropen Quadratproben durch Lösungen für isotrope Kreisplatten nach der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie genähert. Entsprechend basieren die 3D-Finite-Element-Untersuchungen für Quadratplatten in [69] auf der linearisierten elastischen Theorie, die nur für kleine Verformungen realistische Werte liefert. Seit kurzem führt *FCM* derartige Bruchtests auch mit quadratischen GaAs-Plättchen durch. Die maximalen Durchbiegungen sind hier so groß, dass eine Verwendung der linearisierten Elastizitätstheorie nicht zulässig ist. Numerische Untersuchungen für diesen Fall, die die nichtlinearen kinematischen Zusammenhänge berücksichtigen, wurden unter Verwendung der hier im Kapitel 7 vorgestellten Finite-Element-Routine für dünne Platten von *Dreyer* und *Duderstadt* [34] durchgeführt.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine möglichst genaue Spannungsanalyse des unzerteilten Wafers im modifizierten Doppelring-Biegeversuch für gegebene Druckkräfte durchzuführen, so dass der Wafer-Hersteller daraus die Ausfallwahrscheinlichkeit seiner Wafer berechnen kann. Dazu wird ein geeignetes Modell des Biegetests angegeben. Für dieses Modell werden numerische Berechnungen des gesamten Verschiebungs- und Spannungszustands durchgeführt. Anschließend werden die errechneten Daten mit den Experimenten der *FCM* verglichen [35].

1.2 Kurzbeschreibung der Modellierung

Die aufgebrachten Kräfte sind so groß, dass die maximalen Durchbiegungen das Sechsfache der Plattendicke erreichen. Dabei bleiben zwar die Verzerrungen klein, jedoch sind die auftretenden Starrkörperrotationen der einzelnen Volumenelemente nicht mehr vernachlässigbar klein. Aus diesem Grunde können wir zur Berechnung der gesuchten Felder nicht von der linearisierten Impulsbilanz ausgehen.

Wir formulieren zunächst die Impulsbilanz in der Bezugsplatzierung und nehmen *Saint-Venant–Kirchhoff*'sches Materialverhalten an, d.h. einen linearen Zusammenhang zwischen den 2. *Piola-Kirchhoff*-Spannungen und den *Green*'schen Verzerrungen.

Die Abmessungen des Wafers erfordern es, den Wafer als dünne Platte zu betrachten. Da das Auffinden numerischer 3D-Lösungen dünner Platten mit Hilfe der Finite-Element-Methode sehr aufwendig ist, gehen wir zur entsprechenden 2D-Formulierung des Plattenproblems über. Vergleiche hierzu die Konvergenzuntersuchungen numerischer 3D-Approximationen von *Vidrascu* [108], *Babuška* und *Suri* [7] sowie *Chenais* und *Paumier* [20].

Als 2D-Plattentheorie verwenden wir die *von Kármán*'sche Theorie, die im Jahre 1910 in [61] für den isotropen Fall formuliert wurde. Die Anwendung dieser Theorie wird in der Ingenieurliteratur bei Vorliegen moderater Durchbiegungen dünner Platten empfohlen, siehe z.B. *den Hartog* [53] und *Wolmir* [115].

Die *von Kármán*'sche Theorie wird üblicher Weise aus der nichtlinearen 3D-Formulierung durch Auswertung spezieller Annahmen, sowohl zur Kinematik als auch zu den Spannungen hergeleitet. Vergleiche hierzu *von Kármán* [61], *Nowoschilow* [84], *den Hartog* [53] und *Wolmir* [115]. Neben speziellen Annahmen zur konkreten Gestalt des Verschiebungsfeldes, wird angenommen, dass bestimmte Größen gegenüber anderen Größen so klein sind, dass sie im Vergleich zu diesen Größen vernachlässigbar klein sind.

Die Verwendung der *von Kármán*'schen Theorie ist demnach dann gerechtfertigt, wenn die verwendeten Annahmen in guter Näherung zutreffen. Deshalb ist es ein weiteres Ziel dieser Arbeit, die Gültigkeit dieser Annahmen an Hand der konkreten Datenlage für die Tests zu überprüfen.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass die *von Kármán*'schen Gleichungen auch ohne die sonst notwendigen zusätzlichen Annahmen zur Kinematik und zu den Spannungen aus dem 3D-Problem, allein durch Grenzwertbetrachtungen beim Übergang zur unendlich dünnen Platte herleitbar sind.

Der konkrete Nachweis der Grenzwerteigenschaft der *von Kármán*'schen Gleichungen erfolgt in mehreren Teilschritten.

Zunächst gehen wir zur analytischen Untersuchung des Biegetests auf ein Modell mit normierten Größen über, indem wir alle Abmessungen und Verschiebungen auf den Stützring-Innendurchmesser beziehen und alle Spannungen und elastischen Konstanten auf den E-Modul von GaAs in der $\langle 100\rangle$-Orientierung beziehen. Der Wafer hat hier die dimensionslose Dicke h^* und kann als dünne Platte betrachtet werden, da dünne Platten durch dimensionslose Dicken charakterisiert werden, die sehr viel kleiner als 1 sind. Der eigentliche Grenzübergang erfolgt nicht im ursprünglichen Koordinatensystem, sondern nach einer Koordinatentransformation in einem skalierten Koordinatensystem, in welchem die Platte die Dicke 1 hat. Die Größe h^* kann in diesem System als Kleinheitsparameter betrachtet werden.

Mit einer formal asymptotischen Entwicklung der Verschiebungen zeigen wir, dass die *von Kármán*'schen Gleichungen aus der schwachen Formulierung des mechanischem Gleichgewichts im skalierten System für den Grenzübergang $h^* \to 0$ folgen, wenn die Druckkraft f in spezieller Weise von h^* abhängt. Wir identifizieren dann die *von Kármán*'schen Gleichungen als den Anteil der Impulsbilanz im mechanischem Gleichgewicht, der nur die führenden Terme der asymptotisch entwickelten Verschiebungen enthält. Wir schlussfolgern, dass die *von Kármán*'sche Theorie um so genauer das ursprüngliche 3D-Problem beschreibt, je dünner die Platte ist.

Dass sich die *von Kármán*'sche Theorie durch asymptotische Entwicklung der Verschiebungen und der Spannungen in der schwachen Formulierung rechtfertigen lässt, wurde bereits in den Jahren 1979 und 1980 von *Ciarlet* and *Destuynder* in [26] und [21] gezeigt. Acht Jahre später zeigte *Raoult* in [90], dass es genügt, nur die Verschiebungen asymptotisch zu entwickeln. In allen drei Arbeiten erfolgt die Rechtfertigung der *von Kármán*'schen Gleichung für den Fall einer zum Teil eingespannten isotropen Platte.

Ciarlet, *Destuynder* und *Raoult* bestimmen die führenden Terme der asymptotisch entwickelten Verschiebungen zur Rechtfertigung der *von Kármán*'schen Plattengleichungen dadurch, in dem sie festlegen, wie die gegebenen Randspannungen an den nicht eingespannten Rändern von h^* abhängen. Die hier vorgestellte Herleitung verwendet stattdessen die 1994 von *Miara* in [76] formulierte Annahme, dass bei asymptotischer Entwicklung der Verschiebung der lineare Anteil des für $h^* \to 0$ resultierenden nichtlinearen Problems die gleiche Lösung hat, wie das asymptotisch entwickelte linearisierte 3D-Problems bei $h^* \to 0$. Die von *Ciarlet*, *Destuynder* und *Raoult* angenommenen Abhängigkeiten der gegebenen Randspannungen von h^* sind dann bei *Miara* direkte Folge der obigen Annahme.

Einen Gesamtüberblick über die Arbeiten [26, 21, 90] und [76] gibt *Ciarlet* in [24]. In allen fünf Arbeiten wird jedoch nur der Fall einer zum Teil eingespannten isotropen Platte betrachtet. Deshalb wird in der hier vorliegenden Arbeit die von *Raoult* und *Miara* verwendete Methode der asymptotischen Entwicklung der Verschiebungen auf den kubisch anisotropen Fall erweitert. Außerdem rechtfertigen wir die am Stützring für das 2D-Plattenproblem formulierten Randbedingungen durch die asymptotische Entwicklung des 3D-Problems. Im ersten Schritt der hier vorgestellten Berechnung ermitteln wir die führenden Terme der Verschiebungen, indem wir der Vorgehensweise von *Miara* gemäß [76] folgen. Sie verwendete hierfür skalierte Testfunktionen, die im skalierten Koordinatensystem von h^* unabhängig sind.

In einem weiteren Schritt entwickeln wir jetzt die schwache Formulierung des 3D-Problems im skalierten System unter Verwendung von Testfunktionen, die jetzt ebenso explizit von h^* abhängen, wie die zuvor gemäß *Miara* berechneten führenden Terme der unbekannten Verschiebung. Mit dieser Skalierung der Testfunktionen erhalten wir weitere Beziehungen zwischen den einzelnen Termen der Unbekannten. Die letztlich gewonnenen Gleichungen lassen sich dann als die *von Kármán*'schen Plattengleichungen im skalierten System identifizieren.

Zur vollständigen Übereinstimmung der so gefundenen Beziehungen zwischen den führenden Termen der asymptotisch entwickelten Verschiebungen im skalierten System mit den *von Kármán*'schen Plattengleichungen gelangen wir durch Rücktransformation dieser Beziehungen auf das Koordinatensystem, in welchem die Platte die dimensionslose Dicke h^* hat. Durch weitere Transformationen kann auf ein System übergegangen werden, in dem die Platte die dimensionsbehaftete Dicke h hat.

Im Gegensatz zur ursprünglichen 3D-Theorie liefert die *von Kármán*'sche Theorie bei der vereinfachten Annahme einer Punktlast, zur Approximation des Kontakts zwischen Wafer und Kugelstempel, nicht nur an der Oberseite direkt im Kontaktpunkt auf der Zylinderachse eine unendliche hohe Spannung, sondern auch auf der Unterseite. Deshalb ist es für die Berechnung der maximalen Zugspannung an der Unterseite des Wafers bei der Verwendung einer Plattentheorie zwingend notwendig, von einer Flächenlast statt von einer Punktlast auszugehen.

Die Form der Kontaktfläche und die Spannungsverteilung in dieser Fläche berechnen wir nach der Theorie der *Hertz*'schen Pressung. Zur Berücksichtigung der kubischen Anisotropie greifen wir eine Idee von *Willis* [114] auf. Im Gegensatz zu *Willis* gelangen wir jedoch nicht zu einer kreisförmigen Kontaktfläche. Dies resultiert daher, dass *Willis* als mögliche Kontaktflächen nur Ellipsen zuließ, wir hingegen jede Fläche, die der kubischen Symmetrie genügt.

Die Randbedingungen am Kontakt zwischen Wafer und Stützring können durch Vergleich konkreter Experimente [35] mit numerischen Rechnungen gefunden werden. Es zeigt sich, dass am Stützring von reibungsfreiem Gleiten ausgegangen werden kann.

Die numerische Berechnung des *von Kármán*'schen Plattenproblems erfolgt mit Hilfe zweier Finite-Element-Ansätze für die Verschiebungen. Wir verwenden sowohl für die horizontalen als auch für die vertikalen Verschiebungen *Hermite*'sche Polynomansätze auf Dreiecksgittern. Für die vertikale Verschiebung verwenden wir das *Bell*-Dreieck gemäß [37] und [9], was auch als 18-Freiheitsgrad-Dreieck oder reduziertes C^1-quintisches Dreieck bezeichnet wird [23]. Zur Beschreibung der horizontalen Verschiebung verwenden wir das *Zienkiewicz*-Dreieck gemäß [8], was auch als reduziertes kubisches *Hermite*-Dreieck bekannt ist [23].

Mit diesen Ansatzfunktionen leiten wir das komplette resultierende nichtlineare algebraische Gleichungssystem der FE-Approximation der *von Kármán*'schen Gleichungen her und geben das zugehörige *Newton*-Schema an.

Auf diese Weise berechnen wir jetzt, entsprechend des eingangs formulierten Zieles, die kompletten Verschiebungs- und Spannungsfelder. Wir können eine sehr gute Übereinstimmung der experimentellen Befunde mit den berechneten Daten feststellen. Außerdem zeigen wir, dass ein isotropes Ersatzmodell, welches nach den Mittelungsformeln von *Voigt*, *Reuss* oder *Hill* gebildet wurde, zur Berechnung der Durchbiegung praktisch ungeeignet ist. Deshalb geben wir zwei neue isotropisierte elastische Konstanten für GaAs an, mit deren Verwendung die Durchbiegungen deutlich besser erfasst werden können.

Wir dokumentieren die anisotropen Effekte und den Spannungsverlauf in der Nähe der Kugelkontaktfläche. Außerdem überprüfen wir die Einhaltung der Annahmen, die eine Verwendung der *von Kármán*'schen Plattentheorie rechtfertigen. Dabei stellen wir fest, dass insbesondere innerhalb der Kugelkontaktfläche, die Annahme, dass die Axialspannung gegenüber der Radialspannung vernachlässigbar ist, nicht erfüllt wird.

Hieraus erwächst eine weitere Zielstellung der vorliegenden Arbeit: Die Untersuchung der besonderen Phänomene beim Vorliegen lokal begrenzter Flächenlasten mit Lastradien, die in der Größenordnung der Plattendicke liegen.

Wir zeigen, dass die Annahme, die Axialspannung gegenüber der Radialspannung zu vernachlässigen, für diese Lastradien in der Umgebung des Kontaktgebietes nicht gerechtfertigt ist. Dies gilt insbesondere auch dann, wenn die aufgebrachten Lasten so klein sind, dass die resultierenden Durchbiegungen sehr viel kleiner als die Plattendicke sind, was die Voraussetzung zur Anwendbarkeit der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie ist. Zur Bestimmung der Auswirkung des Fehlers, der aus Verwendung dieser Annahme resultiert, leiten wir die 3D-Gleichungen für den Fall der am Rand gestützten Kreisplatte mit Hilfe von harmonischen Verschiebungsansätzen her. Die resultierenden Gleichungen entsprechen im wesentlichen denen, die *Nádai* 1925 in [77] bei konstanter Flächenlast für dicke Platten angibt. Während *Nádai* von der rotationssymmetrischen Halbraumlösung ausgeht, orientieren wir uns am Lösungsweg von *Papkowitsch* [88] und *Neuber* [79] in der Darstellung von *Lurje* [72] und *Neuber* [80].

Als wichtigstes Ergebnis erhalten wir, dass die Verschiebungen nach beiden Theorien praktisch nicht unterscheidbar sind. Für die Spannungen gilt dies nur für die Bereiche, die um mehr als das Dreifache des Kontaktradius von der Zylinderachse entfernt sind. Im Ort der maximalen Zugspannung, der auf der unteren Deckfläche auf der Zylinderachse liegt, treten für sehr kleine Lastradien in den Radialspannungen Abweichungen bis maximal 20% auf. Für die Lastradien, die sich bei den uns interessierenden Bruchlasten ergeben, liegen die Abweichungen jedoch nur bei 5%. Generell ist zu sagen, dass die *Kirchhoff*'sche Theorie auf der Zylinderachse an der unteren Deckfläche zu hohe Zugspannungen und an der oberen Deckfläche zu niedrige Druckspannungen liefert.

1.3 Übersicht

Nach der Einleitung in diesem Kapitel folgt im Kapitel 2 ein Verzeichnis der verwendete Symbole.

Im 3. Kapitel beschreiben wir das Modell des Biegetests. Dabei werden die wesentlichen Annahmen formuliert, so dass unter ihrer Verwendung mit Hilfe der Grundgleichungen das vollständige 3D-Problem gelöst werden kann. Außerdem werden die Besonderheiten, die auf Grund der speziellen Geometrie-, Verformungs- und Beanspruchungsverhältnisse vorliegen, erläutert. Mit der Berücksichtigung dieser Besonderheiten motivieren wir letztlich die Verwendung der *von Kármán*'schen Theorie und die Notwendigkeit einer genaueren Untersuchung der Verhältnisse in der Umgebung der Kontaktfläche.

Das vollständige 3D-Problem wird im Kapitel 4 beschrieben. Zunächst geben wir die Definitionen der verwendeten Begriffe an. Wir formulieren die nichtlineare Impulsbilanz im mechanischen Gleichgewicht und stellen das verwendete Materialgesetz einschließlich der gewählten Verschiebungs–Verzerrungsrelation dar. Zur Formulierung der Randbedingungen werden die besonderen Verhältnisse am Stützring diskutiert.

Im 5. Kapitel gehen wir zur Plattentheorie über. Wir leiten zunächst die *von Kármán*'sche Theorie für den kubisch anisotropen Fall auf klassischem Wege her, d. h. unter Verwendung bestimmter Annahmen zu den Verschiebungs- und den Spannungsfeldern. Zur Rechtfertigung dieser Annahmen führen wir anschließend für die schwache Formulierung des nichtlinearen 3D-Problems eine formal asymptotische Entwicklung der Verschiebungen durch. Das resultierende Integral wird dann unter Verwendung der weitaus schwächeren Anforderungen an das Lösungsverhalten beim Grenzübergang $h^* \to 0$ ausgewertet. Das 5. Kapitel endet mit einigen Anmerkungen zur Historie der *von Kármán*'schen Plattentheorie und einem Vergleich dieser Theorie mit zwei verschiedenen Theorien, die zur Beschreibung großer

Verschiebungen geeignet sind.

Gegenstand der Untersuchungen im 6. Kapitel ist der Kontaktbereich zwischen Druckkugel und oberer Waferdeckfläche. Wir berechnen die Kontaktfläche und den Verlauf der Spannungen in dieser Fläche nach der Theorie der *Hertz*'schen Pressung unter Berücksichtigung der kubischen Anisotropie des Wafermaterials. Die Resultate vergleichen wir mit verschiedenen isotropen Näherungslösungen.

Im 7. Kapitel beschreiben wir die numerische Umsetzung der *von Kármán*'schen Gleichungen mit der Finite-Element-Methode. Wir stellen die verwendeten *Hermite*'schen Dreieckselemente unter Verwendung der Darstellung von *Kämmel* und *Franeck* [60] vor und leiten das resultierende nichtlineare algebraische Gleichungssystem her. Außerdem erläutern wir die Besonderheiten bei der FE-Formulierung der Verschiebungsrandbedingungen auf dem Stützring. Insbesondere gehen wir auf ein numerisches Phänomen ein, dass bei der Verwendung von Dreieckselementen für drehbare Kreisplatten auftritt und unter dem Namen *Sapondjan-Babuška*-Plattenparadox [95, 4] bekannt ist.

Die konkrete Auswertung für die untersuchten Testgeometrien erfolgt am Schluss des 7. Kapitel, nachdem numerische Tests zur Güte der verwendeten Plattenelemente durchgeführt wurden.

Im 8. Kapitel untersuchen wir die besonderen Phänomene beim Vorliegen lokal begrenzter Flächenlasten mit Lastradien, die in der Größenordnung der Plattendicke liegen. Dazu geben wir zunächst die isotrope *Kirchhoff*-Lösung einer am Außenrand einfach gestützten Platte an. Nach der Herleitung der 3D-Lösung des entsprechenden linearisierten Problems, vergleichen wir beide Lösungen an Hand der konkreten im Abschnitt 3.3 gegebenen Daten.

Da insbesondere die Begriffe zur Beschreibung der Lage der Körper und der kinematischen Zusammenhänge bei verschiedenen Autoren nicht einheitlich sind und sich teilweise sogar widersprechen, geben wir im Anhang eine Zuordnung der hier verwendeten Begriffe zur Begriffswelt einiger anderer Autoren an.

Im Anhang befinden sich auch die verschiedenen Umrechnungsvorschriften für die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten der drei kubisch-elastischen Konstanten. Ergänzend gehen wir auf spezielle Mittelungsformeln ein, mit denen für drei gegebene kubische Konstanten zwei isotrope Konstanten berechnet werden können.

Ebenfalls im Anhang werden die schwachen Formulierungen des 3D- und des 2D-Problems für die Variation der Verschiebung angegeben.

Kapitel 2

Bezeichnungen und Symbole

(ohne Kapitel 7)

c_{IJ}	elastische Konstanten in der $\langle 100\rangle$-Orientierung, Komponenten des Steifigkeitstensors in *Voigt*'scher Notation mit I, J $= 1,\ldots,6$
c_{ijkl}	elastische Konstanten, Komponenten des Steifigkeitstensors, dargestellt als Tensor 4. Stufe
$\boldsymbol{C}$	rechter *Cauchy-Green*-Tensor
C_{ij}	Komponenten von $\boldsymbol{C}$
d^*	dimensionsloser Wafer- bzw. Plattendurchmesser
$\partial\omega$	Rand von ω
$\partial\Omega$	Rand von Ω, Momentanplatzierung des Randes des materiellen Körpers (d.h. des Wafers)
$\partial\Omega^f$	Teilmenge von $\partial\Omega^-$, Menge aller Punkte in der Kontaktfläche zwischen Wafer und Druckkugel in der Bezugsplatzierung
$\partial\Omega^M$	Teilmenge von $\partial\Omega_R$, Menge aller Punkte in der Mantelfläche des zylindrischen Wafers in der Bezugsplatzierung
$\partial\Omega^{M*}$	Teilmenge von $\partial\Omega_M$, Menge aller Punkte in der Mantelfläche des zylindrischen Wafers in der Bezugsplatzierung ohne die Punkte $\boldsymbol{X}^N, \boldsymbol{X}^O, \boldsymbol{X}^W$
$\partial\Omega_R$	Rand von Ω, Bezugsplatzierung des Randes des materiellen Körpers (d.h. des Wafers)
$\partial\Omega^-$	Teilmenge von $\partial\Omega_R$, Menge aller Punkte in der oberen Deckfläche des zylindrischen Wafers in der Bezugsplatzierung

$\partial\Omega^+$	Teilmenge von $\partial\Omega_R$, Menge aller Punkte in der unteren Deckfläche des zylindrischen Wafers in der Bezugsplatzierung
$\boldsymbol{e}_i$	i-ter Orthonormalbasisvektor im $\mathbf{E}^3$
$\mathbf{E}^3$	reeller 3-dimensionaler *Euklid*'ischer Vektorraum
$\mathcal{E}^3$	reeller 3-dimensionaler *Euklid*'ischer Punktraum
f	Druckkraft
$\boldsymbol{G}$	*Green*'scher-Verzerrungstensor
$\mathbb{G}$	Menge der ganzen Zahlen
G_{ij}	Komponenten von $\boldsymbol{G}$
h	Wafer- bzw. Plattendicke
h^*	dimensionslose Wafer- bzw. Plattendicke
$\boldsymbol{H}$	Verschiebungsgradient
H_{ij}	Komponenten von $\boldsymbol{H}$, Ableitung der i-ten Komponente von $\boldsymbol{u}$ in Richtung X_j
id_i	χ_i, falls $\chi_i(\boldsymbol{X}) = X_i$ gilt
J	$det(\boldsymbol{F})$
$\boldsymbol{M}$	Momententensor
$M_{\alpha\beta}$	*Kartesi*'sche Komponenten von $\boldsymbol{M}$
M^{nn}	$n^R_\alpha M_{\alpha\beta} n^R_\beta$, Normalkomponente von $\boldsymbol{M}$ auf $\partial\omega$
M^{sn}	$s^R_\alpha M_{\alpha\beta} n^R_\beta$, Verdrillungsmoment auf $\partial\omega$
$\boldsymbol{n}$	Vektor der äußeren Flächennormalen in der Momentanplatzierung, Richtung von $\boldsymbol{da}$
n_i	Komponenten von $\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{n}^R$	Vektor der äußeren Flächennormalen in der Bezugsplatzierung, Richtung von $\boldsymbol{dA}$
n^R_i	Komponenten von $\boldsymbol{n}^R$
$\boldsymbol{N}$	Membrankrafttensor
$N_{\alpha\beta}$	kartesische Komponenten von $\boldsymbol{N}$
N^{nn}	$n^R_\alpha N_{\alpha\beta} n^R_\beta$, Normalkomponente von $\boldsymbol{N}$ auf $\partial\omega$
N^{sn}	$s^R_\alpha N_{\alpha\beta} n^R_\beta$

O	Punkt in $\mathcal{E}^3$ als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems
$O(\cdot)$	großes *Landau*-Symbol
$\boldsymbol{OX}$	Ortsvektor vom Ursprung O zum Punkt X, Element des $\mathbf{E}^3$
p	Druckkraft in $\partial\Omega^-$
p^f	Druckkraft in $\partial\Omega^f$
$\boldsymbol{Q}$	Querkraftvektor
Q_α	kartesische Komponenten von $\boldsymbol{Q}$
Q^n	Normalkomponente von $\boldsymbol{Q}$
Q^{*n}	Ersatzquerkraft
$\boldsymbol{R}$	eigentlich orthogonaler Tensor
R_A	Radius des Wafers, Außenradius des Stützringes
R_C	Kontaktradius zwischen Wafer und Druckkugel
R_I	Innenradius des Stützringes
R_K	Druckkugelradius
$\mathbb{R}$	Raum der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler reeller Raum
R_{ij}	Komponenten von $\boldsymbol{R}$
$\boldsymbol{s}$	Tangentenvektor in der Momentanplatzierung, Darstellung von $\boldsymbol{s}^R$ in der Momentanplatzierung
s_i	Komponenten von $\boldsymbol{s}$
$\boldsymbol{s}^R$	normierter Tangentenvektor in der Bezugsplatzierung
s_i^R	Komponenten von $\boldsymbol{s}^R$
s_{ijkl}	elastische Konstanten, Komponenten des Nachgiebigkeitstensors, dargestellt als Tensor 4. Stufe
$\boldsymbol{S}$	1. *Piola-Kirchhoff*'scher Spannungstensor
S_{ij}	kartesische Komponenten von $\boldsymbol{S}$
S^{nn}	Normalkomponente von $\boldsymbol{t}^R$
S^{sn}	Tangentialkomponente von $\boldsymbol{t}^R$ in Richtung $\boldsymbol{s}$
$S^{\tau n}$	Tangentialkomponente von $\boldsymbol{t}^R$ in Richtung $\boldsymbol{\tau}$

$\boldsymbol{t}$	wahrer Spannungsvektor
t_i	Komponenten von $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{t}^R$	bezogener Spannungsvektor
t_i^R	Komponenten von $\boldsymbol{t}^R$
$\boldsymbol{T}$	*Cauchy*'scher Spannungstensor, Tensor der wahren Spannungen
T_{ij}	kartesische Komponenten von $\boldsymbol{T}$
T^{nn}	Normalkomponente von $\boldsymbol{t}$
T^{sn}	Tangentialkomponente von $\boldsymbol{t}$ in Richtung $\boldsymbol{s}$
$T^{\tau n}$	Tangentialkomponente von $\boldsymbol{t}$ in Richtung $\boldsymbol{\tau}$
$\boldsymbol{U}$	Vektor der Horizontalverschiebung der Mittelfläche
U_α	kartesische Komponente von $\boldsymbol{U}$
$\boldsymbol{u}$	$\overline{\Omega}_R \to \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$, Verschiebung als reelles Vektorfeld
$\hat{\boldsymbol{u}}$	$\overline{\hat{\Omega}}_R \to \mathbf{E}^3$, *Euklid*'ischer Verschiebungsvektor
u_i	$\overline{\Omega}_R \to \mathbb{R}$, i-te Komponente von $\boldsymbol{u}$
$\hat{u}_i$	$\overline{\hat{\Omega}}_R \to \mathbb{R}$, i-te kartesische Komponente von $\hat{\boldsymbol{u}}$
v_K	Druckkugelgeschwindigkeit
$\boldsymbol{v}$	$\overline{\Omega}_R \to \mathbb{R}^3$, Testfunktionsvektor des 3D-Problems
v_i	$\overline{\Omega}_R \to \mathbb{R}$, Komponente von $\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{V}$	$\omega \cup \partial\omega \to \mathbb{R}^2$, Testfunktionsvektor des 2D-Problems
V_i	$\omega \cup \partial\omega \to \mathbb{R}$, Komponente von $\boldsymbol{V}$
w_{max}	maximale Durchbiegung
W	Mittelflächendurchbiegung
x	Punkt im $\mathcal{E}^3$, Momentanplatzierung von X
$\boldsymbol{x}$	reeller Vektor im $\mathbb{R}^3$, Vektor der kartesischen Koordinaten des Punktes x, Vektor der kartesischen Komponenten von $\boldsymbol{Ox}$
x_i	i-te kartesische Koordinate des Punktes x, i-te kartesische Komponente von $\boldsymbol{Ox}$, i-te Komponente von $\boldsymbol{x}$
X	Punkt im $\mathcal{E}^3$, materieller Punkt, Punkt in der Bezugsplatzierung

$\boldsymbol{X}$	reeller Vektor im $\mathbb{R}^3$, Vektor der kartesischen Koordinaten des Punktes X, Vektor der kartesischen Komponenten von $\boldsymbol{OX}$
X_i	i-te kartesische Koordinate des Punktes X, i-te kartesische Komponente von $\boldsymbol{OX}$, i-te Komponente von $\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{X}^N$	reeller Vektor der kartesischen Koordinaten eines Starrkörperfesselpunktes
$\boldsymbol{X}^O$	reeller Vektor der kartesischen Koordinaten eines Starrkörperfesselpunktes
$\boldsymbol{X}^W$	reeller Vektor der kartesischen Koordinaten eines Starrkörperfesselpunktes
δ_{ij}	*Kronecker*-Symbol
Δa	$\lvert\boldsymbol{\Delta a}\rvert$, Flächenelement in der Momentanplatzierung
$\lvert\boldsymbol{\Delta a}\rvert$	gerichtetes Oberflächenelement in der Momentanplatzierung
ΔA	$\lvert\boldsymbol{\Delta A}\rvert$, Flächenelement in der Bezugsplatzierung
$\lvert\boldsymbol{\Delta A}\rvert$	gerichtetes Oberflächenelement in der Bezugsplatzierung
$\boldsymbol{\Delta k}$	Vektor des Kraftfelds auf Δa in der Momentanplatzierung
Δk_i	Komponenten von $\boldsymbol{\Delta k}$
$\boldsymbol{\Delta x}$	gerichtetes Linienelement in der Momentanplatzierung
Δx_i	Komponenten von $\boldsymbol{\Delta x}$
$\boldsymbol{\Delta X}$	gerichtetes Linienelement in der in der Bezugsplatzierung
ΔX_i	Komponenten von $\boldsymbol{\Delta X}$
ε_{ijk}	*Levi-Civita*-Symbol
η	dimensionsloser Kontaktradius zwischen Wafer und Druckkugel
Θ	$\{(X_1, X_2)\vert X_1^2 + X_2^2 = R_I^2\} \subset \omega^+$
Θ^f	$\{(X_1, X_2)\vert\Big(X_1 + U_1(X_1, X_2)\Big)^2 + \Big(X_2 + U_2(X_1, X_2)\Big)^2 = R_I^2\} \subset \omega^+$
λ	*Lamé*-Konstante, elastische Konstante
μ	*Lamé*-Konstante, Schubmodul
μ'	elastische Konstante bei kubischer Symmetrie
ρ_{GaAs}	Dichte von GaAs bei Raumtemperatur und Normalluftdruck

$\boldsymbol{\sigma}$	2. *Piola-Kirchhoff*'scher Spannungstensor
σ_{ij}	Komponenten von $\boldsymbol{\sigma}$
σ^{nn}	Normalkomponente von $\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{t}^R$
σ^{sn}	Tangentialkomponente von $\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{t}^R$ in Richtung $\boldsymbol{s}^R$
$\sigma^{\tau n}$	Tangentialkomponente von $\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{t}^R$ in Richtung $\boldsymbol{\tau}^R$
Σ^R	Teilmenge von $\partial\Omega^+$, Menge aller Punkte, die in der Bezugsplatzierung die obere innere Stützringkante berühren
Σ^f	Teilmenge von $\partial\Omega^+$, Menge aller Punkte, die in der Momentanplatzierung für feste Werte von f die Kontaktlinie mit dem Stützring bilden
$\boldsymbol{\tau}$	Tangentenvektor in der Momentanplatzierung, Darstellung von $\boldsymbol{\tau}^R$ in der Momentanplatzierung
τ_i	Komponenten von $\boldsymbol{\tau}$
$\boldsymbol{\tau}^R$	normierter Tangentenvektor in der Bezugsplatzierung
τ_i^R	Komponenten von $\boldsymbol{\tau}^R$
$\boldsymbol{\chi}$	$\overline{\Omega}_R \to \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$, Lageänderung, Platzierungswechsel
χ_i	$\overline{\Omega}_R \to \mathbb{R}$, i-te Komponente von $\boldsymbol{\chi}$
ω	offenes Teilgebiet im $\mathbb{R}^2$, stellt das Inneren von $\bar{\omega}$ dar
$\overline{\omega}$	Kreisbereich im $\mathbb{R}^2$ mit dem Radius R^A
Ω	offenes Teilgebiet im $\mathbb{R}^3$, Momentanplatzierung des Inneren des materiellen Körpers (d.h. des Wafers)
$\overline{\Omega}$	Vereinigung von Ω und $\partial\Omega$, Momentanplatzierung des materiellen Körpers (d.h. des Wafers)
$\overline{\Omega}_0$	abgeschlossenes Teilgebiet des $\mathbb{R}^3$, Anfangsplatzierung des materiellen Körpers (d.h. des Wafers)
$\overline{\Omega}_R$	abgeschlossenes Teilgebiet des $\mathbb{R}^3$, Bezugsplatzierung des materiellen Körpers (d.h. des Wafers)
$\vert \cdot \vert$	Betrag von $\vert \cdot \vert$, so dass $\vert A\vert$ der Betrag von A ist
$\{\cdot\}$	Menge von Elementen, so dass $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ die Menge der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ und a_n ist
$\{X \vert A\}$	Menge alle Elemente X, die der Bedingung A genügen
$]\cdot,\cdot[$	offenes Intervall

$[\cdot,\cdot]$	abgeschlossenes Intervall
(a,b)	Vektor im $\mathbb{R}^2$
(a,b,c)	Vektor im $\mathbb{R}^3$
$\times$	kartesisches Produkt
$\longrightarrow$	$A \longrightarrow B$ heißt Abbildung von A auf B
$[[abc]]$	Punkt mit den Koordinaten $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ in der Einheitszelle eines Kristalls, Koordinaten sind in Einheiten der Gitterkonstanten dargestellt
(hkl)	Gitterebene in der die Punkte $[[h00]]$, $[[0k0]]$ und $[[00l]]$ liegen, mit $h,k,l \in \mathbb{G}$ und der Schreibweise $\bar{h} := -\|h\|$
$[hkl]$	Gitterrichtung vom Punkt $[[000]]$ zum Punkt $[[hkl]]$, mit $h,k,l \in \mathbb{G}$ und der Schreibweise $\bar{h} := -\|h\|$
$\langle hkl\rangle$	Menge aller zu $[hkl]$ gleichwertigen Richtungen, entstehen aus $[hkl]$ durch Permutation und Vorzeichenwechsel von h,k und l

Kapitel 3

Modellierung des modifizierten Doppelring-Biegeversuchs

3.1 Versuchsanordnung

Ein Wafer, idealisiert als Vollkreiszylinder der Dicke h mit dem Radius R_A liegt konzentrisch auf einem Stützring, dessen Außenradius mit dem Zylinderradius übereinstimmt. Der Stützring, idealisiert als Hohlkreiszylinder, hat einen Innenradius R_I. Auf die obere Deckfläche des Vollkreiszylinders wird eine Druckkugel mit dem Radius R_K durch eine Kraft f gepresst. Dabei wirkt die Kraft in die Richtung der Zylinderachse. Auf diese Weise kommt es zur Durchbiegung des Zylinders.

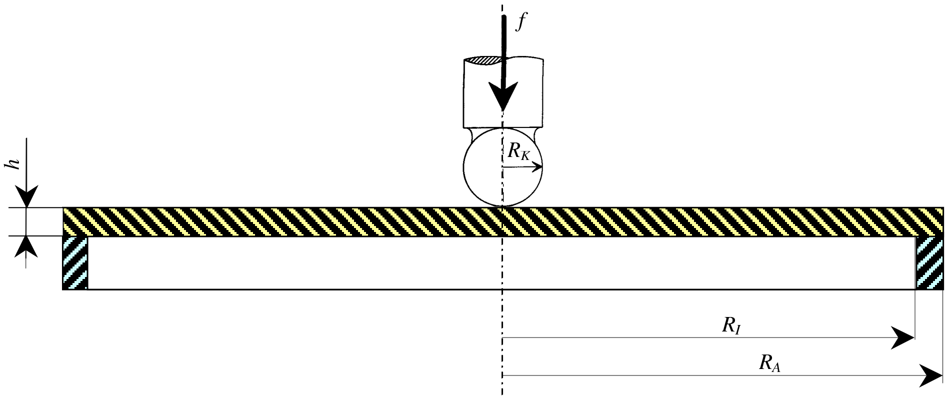

Abbildung 3.1: Geometrie der Testbauteile.

3.2 Modellannahmen

Der Wafer besteht aus einkristallinem kubisch anisotropen Gallium-Arsenid (GaAs). Die [100]-Richtung des Kristalls fällt gemäß der Angaben in [46] mit der Zylinderachse zusammen.

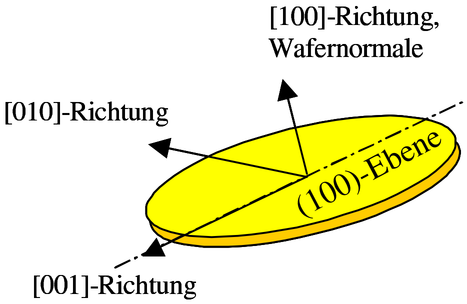

Abbildung 3.2: Orientierung des Testwafers.

Der schematische Aufbau des Gallium-Arsenid-Einkristalls ist in Abbildung 3.3 skizziert.

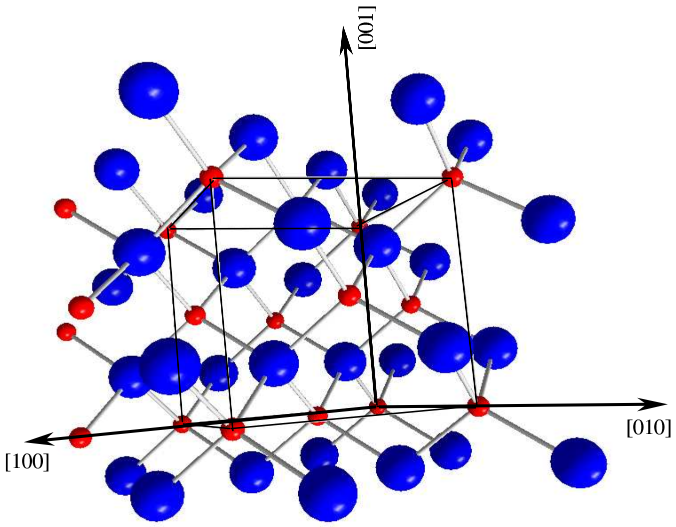

Abbildung 3.3: Kubisches GaAs-Gitter. As-Atome werden durch kleine Kugeln und Ga-Atome durch große Kugeln dargestellt.

Die Größe der Fläche des Kontaktbereiches zwischen Kugelstempel und Wafer sowie die Verteilung der Spannung in dieser Fläche soll durch die Lösung genähert werden, die sich mit der Theorie der *Hertz*'schen Pressung einer isotrop elastischen Kugel auf einen kubisch anisotropen elastischen Halbraum ergibt. Der Halbraum ist dabei so orientiert, dass seine Normale mit der [100]-Richtung zusammenfällt.

Da wir uns nicht für den genauen Spannungsverlauf in der Umgebung des Stützringes interessieren, nehmen wir zur Vereinfachung den Stützring als starren Hohlkreiszylinder an. Damit bleiben die immer auch vorhandenen Abrundungen zwischen den Deckflächen und der inneren Mantelfläche des realen Ringes unberücksichtigt. Im Gegensatz zum realen Ring, kann ein so modellierter Ring wegen seiner Starrheit keine Abplattung erfahren. Außerdem vernachlässigen wir vollständig das Eindringen des Ringes in das elastische Wafermaterial. Statt dessen nehmen wir an, dass der Kontakt zwischen Stützring und Wafer auf eine Kreislinie mit dem Radius R_I beschränkt bleibt. Entlang der Kontaktlinie soll der Wafer frei drehbar und horizontal frei verschiebbar sein. Außerdem soll er dort die Durchbiegung Null haben.

3.3 Material- und Geometriedaten, Last- und Durchbiegebereich

Die elastischen GaAs-Konstanten für kubische Symmetrie in *Voigt*'scher Notation[1] bei $300K$ lauten:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 119,0 \text{ GPa} \\ c_{12} &= 53,8 \text{ GPa} \\ c_{44} &= 59,5 \text{ GPa}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die in der Literatur z.B. in [99, 44] und [14] angegebenen Daten unterscheiden sich für diese Konstanten um maximal ±0,1 GPa.

Die Dichte von GaAs beträgt nach [44]

$$\rho_{GaAs} = 5,3167 \text{ g/cm}^3. \tag{3.2}$$

Für die isotrope Stahlkugel verwenden wir als E-Modul und Querkontraktionszahl die Werte

$$E_S = 210 \text{ GPa} \quad \text{und} \quad \nu_S = 0,3. \tag{3.3}$$

Die Berechnungen werden für zwei Wafer mit verschiedenen Dicken und Durchmesser der Firma *FCM* gemäß den in [38] und [45] angegebenen Abmessungen durchgeführt:

$$\begin{aligned} \text{großer Wafer}: \quad 2R_A &= 150 \text{ mm}, \quad h = 0,675 \text{ mm}, \\ \text{kleiner Wafer}: \quad 2R_A &= 100 \text{ mm}, \quad h = 0,625 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

---

[1] Eine Definition der *Voigt*'schen Konstanten erfolgt im Anhang A.2.1.

Die Stützringbreite ist für beide Wafer gleich. Es gilt jeweils

$$R_A - R_I = 4 \text{ mm}. \tag{3.5}$$

Damit hat der Stützring beim Biegetest des großen Wafers einen Innendurchmesser $2R_I = 142$ mm. Der entsprechende Stützring zum Test des kleinen Wafers hat ein Innendurchmesser von $2R_I = 92$ mm.

In beiden Tests wird die gleiche Druckkugel mit einem Durchmesser

$$2R_K = 1/8" = 3{,}175 \text{ mm}. \tag{3.6}$$

gemäß [112] und [46] verwendet, die im Radius identisch mit dem Radius der Stützkugeln des nach *ASTM F* 394-78 standardisierten Biegetests sind[2].

Der Lastbereich bis zum Bruch liegt für den kleinen Wafer gemäß [46] zwischen 0 und 450 N. Für den großen Wafer wird in [38] ein Lastbereich zwischen 0 und 600 N angegeben.

Die maximalen Durchbiegungen w_{max} werden gemäß Abbildung 3.4 gemessen.

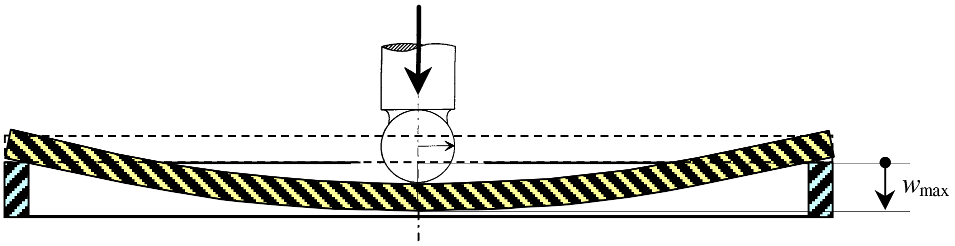

Abbildung 3.4: Maximale Durchbiegung.

Dabei liegen die Werte für die maximalen Durchbiegungen w_{max}, die bis zum Bruch erreicht werden, in Höhe der 6,52-fachen Plattendicke [35], d.h. es gilt

$$|w_{max}/h| \;\leq\; 6{,}52. \tag{3.7}$$

Die Kraft wird gemäß [35] so aufgebracht, dass sich die Oberkante der Druckkugel mit einer konstanten Geschwindigkeit von

$$v_K = 0{,}0167 \text{ m / s} \tag{3.8}$$

nach unten bewegt.

---

[2] Eine kurze Erläuterung dieses Tests erfolgte bereits im Abschnitt 1.1 auf Seite 3.

3.4 Wichtige Schlussfolgerungen aus der konkreten Datenlage

Aus den Waferabmessungen gemäß (3.4) folgern wir, dass es sich bei beiden Wafern um dünne Kreisplatten handelt. Dünne Kreisplatten zeichnen sich dadurch aus, dass die Plattendicke sehr viel kleiner als der Plattendurchmesser ist. Wir bezeichnen den Quotienten

$$h^* := \frac{h}{2R_I} \tag{3.9}$$

als dimensionslose Plattendicke. Diese Größe ist für die Begründung der Plattentheorie durch asymptotische Entwicklung von zentraler Bedeutung und wird im Kapitel 5 oft benötigt.

Für dünne Platten gilt also

$$h^* \ll 1. \tag{3.10}$$

Für die Zahlenwerte entsprechend (3.4) erhalten wir für die dimensionslosen Dicken:

$$\begin{aligned} \text{großer Wafer}: \quad h^* &= 0,00475, \\ \text{kleiner Wafer}: \quad h^* &= 0,00679. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Die dimensionslose Dicke des kleinen Wafers ist also rund 1,43 mal größer als die dimensionslose Dicke des großen Wafers. In diesem Sinne handelt es sich bei dem großen Wafer um eine dünnere Platte als beim kleinen Wafer.

Außerdem gilt auch $\frac{h}{2R_A} \ll 1$. Für den großen Wafer lautet der Wert dieses Quotienten $\frac{h}{2R_A} = 0,0045$. Entsprechend erhalten wir für den kleinen Wafer $\frac{h}{2R_I} = 0,00625$. Würden wir diese Quotienten als dimensionslose Dicken verwenden, wäre der kleine Wafer bezüglich dieser Größe rund 1,39 mal dicker als der große Wafer.

Wenn wir in den folgenden Kapiteln zwischen beiden Wafergeometrien unterscheiden müssen, werden wir immer vom großen Wafer bzw. von der großen Platte sprechen, wenn es sich um den Wafer mit dem größeren Radius handelt. Anderenfalls sprechen wir vom kleinen Wafer bzw. von der kleinen Platte.

Eine weitere wichtige Besonderheit ist, dass wegen (3.4), (3.5) und (3.6) auch

$$R_K \ll R_I \tag{3.12}$$

gilt. Wir werden im Kapitel 6 mit der Theorie der *Hertz*'schen Pressung eine Formel für den Kontaktradius R_C berechnen, für den

$$R_C < R_K \tag{3.13}$$

gilt. Wir zeigen außerdem im Kapitel 6, dass für die am Ende des Abschnitts 3.3 auf Seite 21 angegebenen Lastbereiche nur Kontaktradien resultieren, für die

$$R_C < h \tag{3.14}$$

gilt. Mit Einführung des dimensionslosen Kontaktradius

$$\eta := \frac{R_C}{R_I} \tag{3.15}$$

lautet die dimensionslose Version von (3.14)

$$\eta < 2h^*. \tag{3.16}$$

Wir haben es hier mit einer lokal begrenzten Flächenlast zu tun. An Hand konkreter Rechnungen im Kapitel 7 und einer genaueren Untersuchung im Kapitel 8 zeigen wir, dass Spannungsberechnungen, welche aus der *von Kármán*'schen Plattentheorie oder ihrer linearisierten Version, der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie, resultieren, beim Auftreten lokal begrenzter Flächenlasten sehr sorgfältig analysiert werden müssen.

Nachdem wir bereits die Werte der Waferdicke und des Kugelkontaktradius über den Wert des Stützring-Innendurchmesser charakterisiert haben, wollen wir dies abschließend auch mit den Werten der maximalen Durchbiegung w_{max} gemäß (3.7) tun. Zu diesem Zweck führen wir mit

$$w^* := \frac{w}{2R_I} \tag{3.17}$$

die dimensionslose Durchbiegung ein. Die Größe der dimensionslosen Durchbiegung einer Platte wird oft bezüglich der Plattendicke klassifiziert:

- gilt $|w^*_{\mathrm{max}}| \ll h^*$, insbesondere auch bei $|w^*_{\mathrm{max}}| \approx (h^*)^2$, bezeichnen wir die Durchbiegungen als **klein**,
- gilt $|w^*_{\mathrm{max}}| \approx h^*$, bezeichnen wir die Durchbiegungen als **moderat** und
- gilt $|w^*_{\mathrm{max}}| \gg h^*$, insbesondere auch, wenn $|w^*_{\mathrm{max}}| \approx 1$ gilt, bezeichnen wir die Durchbiegungen als **groß**.

In diesem Sinne handelt es sich bei den maximalen Durchbiegungen gemäß (3.7) um moderate Durchbiegungen.

Für die Verformungs- und Spannungsanalyse dünner Platten gemäß (3.10) wird in der Ingenieur-Literatur bei kleinen Durchbiegungen die Verwendung der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie, bei moderaten Durchbiegungen die Verwendung der *von Kármán*'schen Plattentheorie und bei großen Durchbiegungen die Verwendung einer nichtlinearen Membrantheorie empfohlen[3]. *Wolmir* gibt in [115] bei technischen Problemstellungen für Metallplatten die folgenden Empfehlungen:

---

[3] Einige Ausführungen zur invarianten nichtlinearen Membrantheorie werden im Abschnitt 5.7 auf Seite 104 gemacht.

- bei $|w^*_{\max}| < 0,2\ h^*$ Verwendung der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie,
- bei $0,2 \leq |w^*_{\max}| < 5\ h^*$ Verwendung der *von Kármán*'schen Plattentheorie und
- bei $|w^*_{\max}| \geq 5\ h^*$ Verwendung einer nichtlinearen Membrantheorie.

Den Hartog empfiehlt in [53] die Verwendung der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie für Durchbiegungen, für die $|w^*_{\max}| < h^*$ gilt. Weitere Empfehlungen für den Anwendungsbereich der *von Kármán*'schen Plattentheorie gibt auch *Kolesnikow* in [66] an.

Übertragen wir diese Empfehlungen auf GaAs, folgern wir, dass zur richtigen Berücksichtigung der maximalen Durchbiegungen gemäß (3.7) das Problem ausreichend genau durch die *von Kármán*'sche Plattentheorie gelöst werden kann.

Die moderaten Durchbiegungen gemäß (3.7) verbieten außerdem, das Problem durch Verwendung der linearisierten 3D-Theorie zu lösen, da diese Theorie nur für kleine Verschiebungsgradienten[4] ausreichend genau ist. Die vollständige Herleitung des nichtlinearen 3D-Randwertproblems erfolgt im nächsten Kapitel.

Mit den Abmessungen des Wafers gemäß (3.4) und der Dichte von GaAs gemäß (3.2) sind die Durchbiegungen auf Grund des Eigengewichts des Wafers gegenüber den durch die Last hervorgerufenen Durchbiegungen vernachlässigbar. Plastische Deformationen werden ebenfalls nicht berücksichtigt.

Zeitabhängige Effekte, wie Schwingen und Kriechen des Wafers, können wir vernachlässigen. Da die Durchbiegung gemäß (3.8) mit einer konstanten Geschwindigkeit erfolgt, treten keine Plattenschwingungen auf. Aus (3.7) und (3.8) folgt, dass der betrachtete Zeitraum bis zum Bruch maximal bei $0,26\,s$ liegt. In Stahl und GaAs treten bei Raumtemperatur in diesem kurzen Zeitraum praktisch keine Kriecheffekte auf, so dass wir von rein elastischem Materialverhalten ausgehen können.

---

[4] Die Definition dieser Größe wird nächsten Kapitel auf Seite 29 angegeben.

Kapitel 4

Formulierung als nichtlineares 3D-Randwertproblem

4.1 Tensornotation im $\mathbb{R}^3$

Wann immer wir Komponenten von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ oder aus den Räumen $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ bzw. aus $\mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3$ betrachten, verwenden wir die Konvention, dass lateinische Indizes $(i, j, p, \ldots)$ ihre Werte immer aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ annehmen. Zum Beispiel ist für $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$u_i = v_i \quad \text{gleichbedeutend zu} \quad u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 \quad \text{und} \quad u_3 = v_3.$$

Außerdem schreiben wir $\boldsymbol{u} := (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, so dass wir statt

$$u_i = v_i \quad \text{auch} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

schreiben.
Zusätzlich verwenden wir die *Einstein*'sche Summationskonvention, womit die folgenden Identitäten

$$u_i v_i = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i, \quad A_{ii} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} \quad \text{und} \quad A_{ij} B_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{ij}$$

gelten. Dabei ist $A_{ij} \in \mathbb{R}^3$ eine Komponente der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Für einen unterstrichenen Index wird diese Regel außer Kraft gesetzt. Damit ist zum Beispiel

$$a_{\underline{i}} u_i = v_i \quad \text{gleichbedeutend zu} \quad a_1 u_1 = v_1, \quad a_2 u_2 = v_2 \quad \text{und} \quad a_3 u_3 = v_3,$$

und es gilt

$$a_{\underline{i}}u_iv_i = \sum_{i=1}^{3} a_iu_iv_i \quad \text{und} \quad a_{\underline{i}}b_{\underline{j}}A_{ij}B_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_ib_jA_{ij}B_{ij}.$$

Damit gilt auch

$$a_{\underline{i}}b_{\underline{j}}\delta_{ij}\delta_{ij} = a_{\underline{i}}b_{\underline{i}}\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i = a_ib_i,$$

wobei δ_{ij} das *Kronecker*-Symbol darstellt.

Da wir im Folgenden einerseits kartesische Koordinaten $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und andererseits kartesische Koordinaten $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$ verwenden, benutzen wir zur Darstellung des Gradienten und der Divergenz neben $\frac{\partial a}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial a_k}{\partial x_k}$ bzw. $\frac{\partial a}{\partial X_j}$ und $\frac{\partial a_k}{\partial X_k}$ auch die Schreibweise

$$\mathbf{grad}(a) := \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}, \frac{\partial a}{\partial x_2}, \frac{\partial a}{\partial x_3}\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{a}) := \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{GRAD}(a) := \left(\frac{\partial a}{\partial X_1}, \frac{\partial a}{\partial X_2}, \frac{\partial a}{\partial X_3}\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{DIV}(\boldsymbol{a}) := \frac{\partial a_1}{\partial X_1} + \frac{\partial a_2}{\partial X_2} + \frac{\partial a_3}{\partial X_3}.$$

4.2 Exkurs über Elastizitätstheorie

4.2.1 Lagebeschreibung, Verschiebungen und Verzerrungen

Zur Beschreibung der Lage eines Festkörpers im Raum und seiner Lageänderung nach einer Bewegung betrachten wir den Raum unserer Anschauung als reellen 3-dimensionalen *Euklid*'ischen Punktraum $\mathcal{E}^3$, in dem der bewegte Körper zu jedem Zeitpunkt t eine beschränkte zusammenhängende Untermenge einnimmt, die wir durch $\overline{\hat{\Omega}}_t \in \mathcal{E}^3$ beschreiben.

Der *Euklid*'ische Punktraum $\mathcal{E}^3$ ist mit dem *Euklid*'ischen Vektorraum $\mathbf{E}^3$ assoziiert. $\mathbf{E}^3$ ist mit einer Orthogonalbasis ausgestattet, bestehend aus drei Vektoren $\boldsymbol{e}_i \in \mathbf{E}^3$. Nach Wahl eines Punktes $O \in \mathcal{E}^3$ als Ursprung, kann jeder Punkt $x \in \mathcal{E}^3$ eindeutig einem Vektor $\boldsymbol{Ox} \in \mathbf{E}^3$ zugeordnet werden. $\boldsymbol{Ox} \in \mathbf{E}^3$ heißt Ortsvektor vom Ursprung O zum Punkt x. Der Ursprung $O \in \mathcal{E}^3$ und die drei Vektoren $\boldsymbol{e}_i \in \mathbf{E}^3$ bilden zusammen ein kartesisches Koordinatensystem. Die drei Komponenten x_i des Ortsvektors $\boldsymbol{Ox}$ zur Basis $\{\boldsymbol{e}_i\}$ werden kartesische Koordinaten von $x \in \mathcal{E}^3$ oder kartesische Komponenten von $\boldsymbol{Ox} \in \mathbf{E}^3$ genannt[1].

---

[1] Eine klare Unterscheidung zwischen Punkten und Koordinaten ist auch für die Beschreibung der Finite-Element-Ansätze im Abschnitt 7.3.3 nötig. Dort heißen bestimmte ausgewählte Punkte Knoten und seine Koordinaten entsprechend Knotenkoordinaten.

Auf diese Weise können wir in einem fest gewählten kartesischen Koordinatensystem einen Punkt $x \in \mathcal{E}^3$ nicht nur durch seinen Ortsvektor $\boldsymbol{Ox} = x_i \boldsymbol{e}_i \in \mathbf{E}^3$ identifizieren, sondern auch durch den reellen Vektor $(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

Genauso können wir nun $\overline{\hat{\Omega}}_t \subset \mathcal{E}^3$ durch ein festes kartesisches Koordinatensystem einem reellen dreidimensionalen Teilbereich $\bar{\Omega}_t \subset \mathbb{R}^3$ zuordnen. Das Innere von $\bar{\Omega}_t$ bezeichnen wir mit Ω, seinen Rand mit $\partial\Omega_t$ und nennen

$$\overline{\Omega_t} = \Omega_t \cup \partial\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$$

die Momentanplatzierung des Körpers zum Zeitpunkt t. Bewegung in einem Zeitintervall von t_0 bis t_E können wir dann als stetige Folge von Platzierungswechseln betrachten. Das vom Körper zum gewählten Anfangszeitpunkt t_0 eingenommene Gebiet des $\mathbb{R}^3$ und sein Rand bezeichnen wir als Anfangsplatzierung $\overline{\Omega}_0 \subset \mathbb{R}^3$.

Ein und derselbe materielle Punkt hat im allgemeinen zu jedem momentan betrachteten Zeitpunkt eine andere Lage; d.h. zu jedem Zeitpunkt wird einem materiellen Punkt ein im allgemeinen anderer Punkt im $\mathcal{E}^3$ zugeordnet und seine kartesischen Koordinaten bilden zu jedem Zeitpunkt einen anderen Vektor im $\mathbb{R}^3$. Dabei verstehen wir unter einem materiellen Punkt die kleinste Einheit eines materiellen Körpers, die sich in der betrachteten Raumskala nicht weiter auflösen lässt.

Um einen materiellen Punkt im *Euklid*'ischen Raum unabhängig von seiner momentanen Lage zu identifizieren, wählen wir zu Bezugszwecken eine weitere Platzierung, die Bezugsplatzierung $\overline{\Omega}_R \subset \mathbb{R}^3$. Bei kristallinen Festkörpern wird als Bezugsplatzierung meist eine solche verwendet, bei der das Kristallgitter unverzerrt bzw. ungestört ist. Nur in einer solchen Platzierung liegt die Kristallsymmetrie vor, mit der die kristallinen Körper klassifiziert werden[2]. Insbesondere der hier betrachtete Wafer hat nur in einer unverzerrten Platzierung kubische Symmetrie. Bei Berücksichtigung des Eigengewichts wäre streng genommen auch beim hier betrachteten Wafer das Gitter in der Anfangsplatzierung verzerrt. Dies wäre dann ein Beispiel für eine Bezugsplatzierung, die während des Prozesses der äußeren Lastaufbringung zu keinem Zeitpunkt vom Körper eingenommen wird.

Im hier betrachteten Fall können wir jedoch die Störung der Gittersymmetrie in der Anfangsplatzierung auf Grund des geringen Eigengewichts vernachlässigen,so dass wir den Körper in seiner Anfangsplatzierung als idealen Einkristall mit ungestörtem Gitter betrachten. Deshalb wählen wir in dieser Arbeit als Bezugsplatzierung die Anfangsplatzierung ohne Berücksichtigung

---

[2] Die meisten Materialgesetze für kristalline Festkörper, so auch das im Abschnitt 4.2.5 vorgestellte elastische Gesetz, beziehen einen momentanen Zustand auf eine Platzierung mit ungestörtem Gitter.

des Eigengewichts, d. h. es gilt

$$\overline{\Omega}_R = \overline{\Omega}_0. \tag{4.1}$$

Da wir hier nur elastisches Materialverhalten annehmen und außerdem keine Schwingungsphänomene betrachten, hängt der momentane Verformungszustand nur von der aufgebrachten Last ab, nicht aber von der vergangenen Zeit. Deshalb lassen wir für eine feste gegebene Kraft den Zeitindex t zur Kennzeichnung einer Momentanplatzierung weg und schreiben

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \subset \mathbb{R}^3, \tag{4.2}$$

für eine Momentanplatzierung. Zur Beschreibung eines momentanen Verformungszustandes infolge einer Kraft, brauchen wir jeweils nur zwei Platzierungen zu betrachten, die Bezugsplatzierung Ω_R, die gleich der Anfangsplatzierung ist, und die Momentanplatzierung für einen festen Wert der Kraft f, mit $f \neq 0$.

Ändert ein materieller Körper seine Lage, nimmt ein materieller Punkt des Körpers, welcher in der Bezugsplatzierung die kartesischen Koordinaten X_i hatte, eine Platzierung mit den kartesischen Koordinaten x_i ein. Die Ortsvektoren $\boldsymbol{OX}$ und $\boldsymbol{Ox}$ haben bezüglich der Basis $\{\boldsymbol{e}_i\}$ die Darstellung

$$\boldsymbol{OX} = X_i \boldsymbol{e}_i \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Ox} = x_i \boldsymbol{e}_i. \tag{4.3}$$

X_i und x_i sind die kartesischen Koordinaten desselben materiellen Punktes zu zwei verschiedenen Platzierungen. Sie bilden jeweils einen reellen Vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

In der Mechanik ist die Lageänderung von materiellen Körpern von zentraler Bedeutung. Mit den hier bereits eingeführten Begriffen handelt es sich bei Lageänderungen um Platzierungswechsel, d.h. bei einer Lageänderung eines materiellen Körpers wechseln die Plätze seiner materiellen Punkte im *Euklid*'ischen Punktraum. Wir bezeichnen die Lageänderung oder den Platzierungswechsel mit

$$\boldsymbol{\chi} : \overline{\Omega}_R \to \overline{\Omega}. \tag{4.4}$$

und wir schreiben

$$\begin{array}{rrcllcl} & x_i & = & \chi_i(\boldsymbol{X}) & \text{oder} \quad x_i & = & \chi_i(X_1, X_2, X_3) \\ \text{bzw. auch} & & & & & & \\ & \boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}) & \text{oder} \quad \boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{\chi}(X_1, X_2, X_3). \end{array} \tag{4.5}$$

Gilt $\boldsymbol{x}$=$\boldsymbol{X}$ schreiben wir $\chi_i = \mathrm{id}_i$, so dass auch

$$X_i = \mathrm{id}_i(\boldsymbol{X}) \tag{4.6}$$

gilt.

Bemerkung 1

> Würden wir uns für zeitabhängige Bewegungsabläufe interessieren, müssten wir Platzierungswechsel statt durch $\boldsymbol{\chi}$ durch $\boldsymbol{\chi}_t$ kennzeichnen, um zu verdeutlichen, dass es sich um die Momentanplatzierungen zum Zeitpunkt t handelt.

Die momentane Lage eines materiellen Punktes, der in Bezugsplatzierung mit dem Punkt $X \in \mathcal{E}^3$ identisch ist und die Koordinaten $(X_1, X_2, X_3) = \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^3$ hat, kann statt durch die direkte Angabe seiner momentanen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ gemäß (4.5) auch durch seine Verschiebung in Bezug auf den Ort $\boldsymbol{X}$ eindeutig festgelegt werden. Zwischen der Verschiebung $\boldsymbol{u}$ und Lageänderung $\boldsymbol{\chi}$ eines materiellen Punktes besteht der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned} u_i(\boldsymbol{X}) &:= \chi_i(\boldsymbol{X}) - X_i = \chi_i(\boldsymbol{X}) - \mathrm{id}_i(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R} \\ \text{bzw.}\quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) &:= \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{4.7}$$

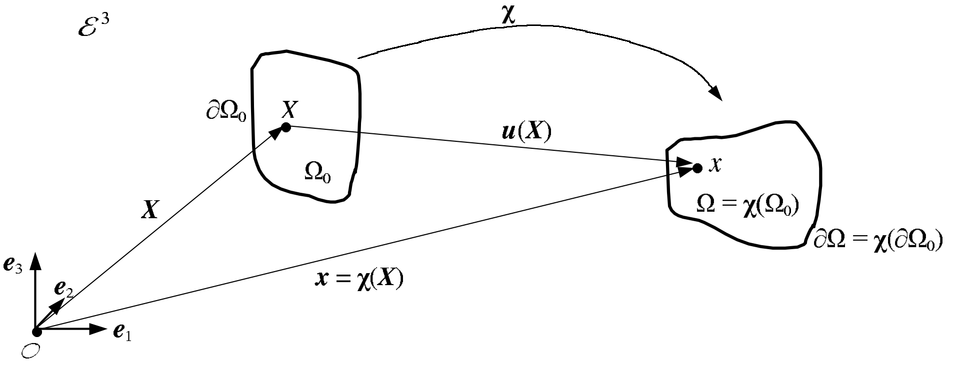

Abbildung 4.1: Darstellung eines materiellen Punktes als Element eines materiellen Körpers in der gewählten Bezugsplatzierung und in der betrachteten Momentanplatzierung.

Zur einfacheren Beschreibung drücken wir von jetzt ab eine vektorielle Größe $\hat{\boldsymbol{a}} : \overline{\hat{\Omega}}_R \to \mathbf{E}^3$ immer durch den mit ihr assoziierten reellen Vektor $\boldsymbol{a} : \overline{\Omega}_R \to \mathbb{R}^3$ aus. Dies ist durch die Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems auch naheliegend, denn es gelten die folgenden Zusammenhänge: $\hat{a}_i(X)\boldsymbol{e}_i = \hat{\boldsymbol{a}}(X) \in \mathbf{E}^3$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ mit $a_i : \bar{\Omega}_R \to \mathbb{R}$ und $\hat{a}_i : \overline{\hat{\Omega}}_R \to \mathbb{R}$, sowie $\hat{a}_i(X) = a_i(\boldsymbol{X}) \in \mathbb{R}$. In gleicher Weise verfahren wir auch mit den Tensoren n-ter Stufe.

Die Größe $\boldsymbol{H}$, deren Komponenten durch

$$H_{ij}(\boldsymbol{X}) := \frac{\partial u_i(\boldsymbol{X})}{\partial X_j} \tag{4.8}$$

definiert sind, bezeichnen wir als Verschiebungsgradient, wobei X_i wieder die Koordinaten der Bezugsplatzierung eines materiellen Punktes im Sinne von (4.3) sind. Statt (4.8) schreiben wir auch $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{GRAD}(\boldsymbol{u})$. Konsequenterweise bezeichnen wir die Größe $\boldsymbol{F}$, deren Komponenten durch

$$F_{ij}(\boldsymbol{X}) := \frac{\partial \chi_i(\boldsymbol{X})}{\partial X_j} \tag{4.9}$$

definiert sind, als den Gradienten der Lageänderung oder als Gradient des Platzierungswechsels. Statt (4.9) schreiben wir auch $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{GRAD}(\boldsymbol{\chi})$.

Für die weiteren Betrachtungen ist die Größe $\boldsymbol{F}$ von zentraler Bedeutung. Sie kann auch als *Jacobi*-Matrix der Koordinatentransformation von den kartesischen Koordinaten der Momentanplatzierung in die kartesischen Koordinaten der Bezugsplatzierung interpretiert werden. Sie hat die Eigenschaft

$$J := \det(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})) > 0 \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{X} \in \Omega_R \subset \mathbb{R}^3, \tag{4.10}$$

was bedeutet, dass das Volumen eines materiellen Körpers in jeder Platzierung positiv ist.

Unterscheidet sich die Momentanplatzierung in einer gewissen Umgebung eines materiellen Punktes $\boldsymbol{X}$ von seiner Bezugsplatzierung nur durch eine Translation, gilt in $\boldsymbol{X}$ die Beziehung $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$, wobei $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Einheitstensor ist. Die entsprechende Formulierung in kartesischen Koordinaten lautet $F_{ij} = \delta_{ij}$. Lassen sich beide Platzierungen durch eine reine Translation und durch eine Drehung im Punkt $\boldsymbol{X}$ bzw. im Punkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X})$ ineinander überführen, unterscheiden sich beide Platzierungen nur durch eine Starrkörperbewegung und es gilt $F_{ij} = R_{ij}$, wobei R_{ij} die Komponenten eines eigentlich orthogonalen Tensors $\boldsymbol{R}$ sind.

Bemerkung 2

> Auf die Einführung des Begriffs „Deformation" wurde hier bewusst verzichtet, da er in der Literatur nicht einheitlich, mit z.T. widersprechender Bedeutung, verwendet wird. Weitere Ausführungen hierzu werden im Anhang A.1 auf Seite 192 gemacht.

Im allgemeinen Fall kann der Gradient der Lageänderung eindeutig multiplikativ in einen reinen Streckungsanteil und einen Rotationsanteil zerlegt werden [106]. Es gilt $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{VR}$ und $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{RU}$, wobei $\boldsymbol{R}$ ein eigentlich orthogonaler Tensor ist. $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ sind symmetrische positiv definite Tensoren, die rechter und linker Strecktensor genannt werden, und bei einer Starrkörperbewegung gleich dem Eins-Tensor $\boldsymbol{I}$ sind. Dies ist deshalb bedeutsam, da im betrachteten Körper ausschließlich Streckungen, die ungleich $\boldsymbol{I}$ sind, Anlass zu den im Abschnitt 4.2.3 eingeführten Spannungen geben. Strecktensoren sind im allgemeinen symmetrische positiv definite Tensorfunktionen von $\boldsymbol{F}$ bzw. $\boldsymbol{H}$. Insbesondere gilt $\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}} = \sqrt{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{H}}$.

In dieser Arbeit benötigen wir als Streckungsmaß den rechten *Cauchy-Green*-Tensor $\boldsymbol{C}$, definiert durch

$$C_{ij} := F_{ki}F_{kj} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{C} := \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}. \tag{4.11}$$

Damit gilt auch $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2$. Wir können $\boldsymbol{C}$ als die auf die Bezugsplatzierung zurückgezogene Metrik der Momentanplatzierung interpretieren, denn es gilt

$$|\boldsymbol{\Delta x}|^2 = \Delta x_i \Delta x_i = \Delta x_j \delta_{jk} \Delta x_k = \Delta X_j C_{jk} \Delta X_k.$$

Dabei ist $\boldsymbol{\Delta x}$ eine betrachtete Momentanplatzierung eines materiellen Linienelements mit den Komponenten Δx_i und $\boldsymbol{\Delta X}$ seine Bezugsplatzierung mit den Komponenten ΔX_i. Ein Linienelement ist ein Tangentenvektor in einer hinreichen kleinen Umgebung eines Punktes auf einer Linie.

Während Strecktensoren bei einer Starrkörperbewegung gleich dem Eins-Tensor $\boldsymbol{I}$ sind, stimmen die so genannten Verzerrungstensoren bei einer solchen Lageänderung mit dem Null-Tensor $\boldsymbol{0}$ überein. Verzerrungstensoren sind zwar ebenfalls symmetrische Tensorfunktionen von $\boldsymbol{F}$ bzw. $\boldsymbol{H}$, sind aber im allgemeinen indefinit.

In den folgenden Abschnitten verwenden wir als Verzerrungsmaß den *Green*schen Verzerrungstensor. Dieser ist definiert durch

$$G_{ij} := (C_{ij} - \delta_{ij})/2 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{G} := (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})/2. \tag{4.12}$$

Wir können $\boldsymbol{G}$ als die auf die Bezugsplatzierung bezogene halbe Metrikdifferenz der beiden Platzierungen interpretieren, denn es gilt

$$(|\boldsymbol{\Delta x}|^2 - |\boldsymbol{\Delta X}|^2)/2 = (\Delta x_i \Delta x_i - \Delta X_i \Delta X_i)/2 = \Delta X_j G_{jk} \Delta X_k.$$

Mit dem *Green*schen Verzerrungstensor können insbesondere Lageänderungen betrachtet werden, die kleine Verzerrungen aber möglicherweise große Rotationen beinhalten. Auf eine solche Situation treffen wir beim hier untersuchten Biegetest.

Im Folgendem wird die Lageänderung immer durch die Verschiebung ausgedrückt. $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{G}$ haben jetzt die Darstellung

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + H_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{H} \quad \text{und} \tag{4.13}$$

$$G_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) = \Big(H_{ij} + H_{ji} + H_{ki}H_{kj}\Big)/2$$

$$\text{bzw.} \quad \boldsymbol{G} = \Big(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\Big)/2. \tag{4.14}$$

Der im Anhang A.3 eingeführte linearisierte Verzerrungstensor ist für den betrachteten Test keine geeignete Näherung zur Beschreibung der auftretenden Verzerrungen, da die hier auftretenden Starrkörperrotationen einen nicht unerheblichen Betrag zur linearisierten Verzerrung liefern würden. Damit würden bei Verwendung des ebenfalls im Anhang A.3 beschriebenen *Hooke*'schen Gesetzes unrealistisch hohe Spannungen folgen.

4.2.2 Oberflächenelemente und Flächennormalen

Um zum Begriff der Spannung zu gelangen, benötigen wir noch eine Definition der Begriffe Oberflächenelement und Flächennormale. Dazu betrachten wir einen Punkt $\boldsymbol{x}$ auf der Oberfläche $\partial\Omega$ und nehmen an, dass die Oberfläche in einer gewissen Umgebung dieses Punktes glatt genug ist, so dass seine Tangentenebene eindeutig festliegt. Vom Punkt $\boldsymbol{x}$ aus wählen wir uns zwei verschiedene Tangentenvektoren $\boldsymbol{\Delta x}$ und $\boldsymbol{\Delta y}$, die im Sinne der Ausführungen auf der vorherigen Seite materielle Linienelemente in der Momentanplatzierung sind. Dabei wird $\boldsymbol{\Delta x}$ und $\boldsymbol{\Delta y}$ so gewählt, dass der Vektor $\boldsymbol{\Delta a}$, dessen Komponenten durch

$$\Delta a_k := \Delta x_i \varepsilon_{jki} \Delta y_j$$

definiert sind, aus dem Volumen heraus zeigt. ε_{jki} ist das *Levi-Cevita*-Symbol. Der Vektor $\boldsymbol{\Delta a}$ bezeichnet ein materielles Oberflächenelement in der Momentanplatzierung.

Sind die Vektoren $\boldsymbol{\Delta X}$ und $\boldsymbol{\Delta Y}$ die Bezugsplatzierungen von $\boldsymbol{\Delta x}$ und $\boldsymbol{\Delta y}$, können wir einen Vektor $\boldsymbol{\Delta A}$ definieren, für dessen Komponenten

$$\Delta A_k := \Delta X_i \varepsilon_{jki} \Delta Y_j$$

gilt. Demnach ist $\boldsymbol{\Delta A}$ die Bezugsplatzierung von $\boldsymbol{\Delta a}$.

Zwischen den Oberflächenelementen in beiden Platzierungen besteht unter Beachtung von (4.9) und (4.10) der folgende Zusammenhang:

$$\Delta a_i = J F_{ji}^{-1} \Delta A_j \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\Delta a} = J \boldsymbol{F}^{T-1} \boldsymbol{\Delta A}. \tag{4.15}$$

Flächenelemente sind die Beträge der Oberflächenelementvektoren. Wir definieren die Flächenelemente

$$\Delta a := |\boldsymbol{\Delta a}| \quad \text{und} \quad \Delta A := |\boldsymbol{\Delta A}|, \tag{4.16}$$

wobei Δa die Momentanplatzierung und ΔA die Bezugsplatzierung eines materiellen Flächenelements ist.

Die auf Eins normierte Richtung eines Oberflächenelements heißt äußere Flächennormale. Wir definieren

$$n_j := \frac{\Delta a_j}{\Delta a} \quad \text{und} \quad n_j^R := \frac{\Delta A_j}{\Delta A} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{n} := \frac{\boldsymbol{\Delta a}}{\Delta a} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{n}^R := \frac{\boldsymbol{\Delta A}}{\Delta A}. \tag{4.17}$$

Dabei ist $\boldsymbol{n}$ die äußere Flächennormale auf Δa und $\boldsymbol{n}^R$ die äußere Flächennormale auf ΔA.

Durch Einsetzen von $(4.15)_1$ in $(4.16)_1$ erhalten wir unter Beachtung von $(4.17)_2$ und (4.11) zwischen Flächenelementen die Beziehung

$$\Delta a = J \sqrt{n_j^R C_{jk}^{-1} n_k^R} \, \Delta A. \tag{4.18}$$

Setzen wir diese Beziehung und $(4.15)_1$ in $(4.17)_1$ ein, ergibt sich unter Beachtung von $(4.15)_2$ die Beziehung zwischen den Flächennormalen:

$$n_i = \frac{F^{-1}_{ji} n^R_j}{\sqrt{n^R_l C^{-1}_{lk} n^R_k}} \, . \tag{4.19}$$

4.2.3 Spannungen

Bezeichnet $\boldsymbol{\Delta k}$ den Vektor des momentanen Oberflächenkraftfeldes über einem materiellen Flächenelement, das in Momentanplatzierung durch Δa und in der Bezugsplatzierung durch ΔA bezeichnet wird, dann heißen die auf diese Flächen bezogenen momentanen Oberflächenkraftvektoren wahrer Spannungsvektor und bezogener Spannungsvektor, bezeichnet durch $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{t}^R$. Damit definieren wir

$$\begin{aligned} & t_i := \frac{\Delta k_i}{\Delta a} \quad \text{und} \quad t^R_i := \frac{\Delta k_i}{\Delta A} \\ \text{bzw.} \qquad & \boldsymbol{t} := \frac{\boldsymbol{\Delta k}}{\Delta a} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{t}^R := \frac{\boldsymbol{\Delta k}}{\Delta A} . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Beide Vektoren zeigen in die gleiche Richtung und mit (4.18) folgt

$$t_i = \frac{t^R_i}{J\sqrt{n^R_j C^{-1}_{jk} n^R_k}} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{t} = \frac{1}{J\sqrt{n^R_j C^{-1}_{jk} n^R_k}} \, \boldsymbol{t}^R . \tag{4.21}$$

Es lässt sich zeigen, dass zwischen den Vektoren $\boldsymbol{t}^R$ und $\boldsymbol{n}^R$ sowie zwischen $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{n}$ ein linearer Zusammenhang besteht [106]:

$$t_i = T_{ij} n_j \quad \text{und} \quad t^R_i = S_{ij} n^R_j \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{t}^R = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}^R . \tag{4.22}$$

Die lineare Abbildung $\boldsymbol{T}$ wird *Cauchy*'scher oder wahrer Spannungstensor genannt. Die Größe $\boldsymbol{S}$ heißt *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensor 1. Art.

Ersetzen wir in (4.21) die Spannungsvektoren $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{t}^R$ durch die Ausdrücke in (4.22), erhalten wir unter Beachtung von (4.19) eine Beziehung zwischen beiden Spannungstensoren

$$S_{ik} = J T_{ij} F^{-1}_{kj} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{S} = J\,\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{T-1} . \tag{4.23}$$

Die *Cauchy*-Spannungen messen die momentanen Kräfte bezogen auf ein aktuelles Flächenelement, während die *Piola-Kirchhoff*-Spannungen 1. Art die gleichen Kräfte auf das entsprechende Flächenelement der Bezugsplatzierung beziehen.

Zusätzlich definieren wir jetzt noch einen dritten Spannungstensor. Seine Komponenten sind die *Piola-Kirchhoff*-Spannungen der 2. Art. Sie leben vollständig auf der Bezugsplatzierung, d.h. sie beziehen die auf die Bezugsplatzierung transformierten Kräfte $\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\Delta k}$ auf die Bezugsplatzierung des Flächenelements:

$$\sigma_{lk} = JF_{li}^{-1}T_{ij}F_{kj}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{T-1}. \tag{4.24}$$

Hier können die vorhandenen materiellen Symmetrien am besten berücksichtigt werden.

4.2.4 Mechanisches Gleichgewicht

Im mechanischen Gleichgewicht ist die Beschleunigung des materiellen Körpers identisch Null. Da wir das Eigengewicht vernachlässigen wollen und keine weiteren äußeren Kräfte wirken, lautet die Impulsbilanz für mechanisches Gleichgewicht

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{bzw.} \quad div(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{0}, \tag{4.25}$$

formuliert in der Momentanplatzierung, und

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial X_k} = 0 \quad \text{bzw.} \quad DIV(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{0}, \tag{4.26}$$

formuliert in der Bezugsplatzierung.

Für nonpolare Materialien[3] lässt sich durch Auswertung der Drehimpulsbilanz zeigen, dass

$$T_{ik} = T_{ki} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \tag{4.27}$$

gilt[4], woraus mit (4.23) und (4.24)

$$S_{ik}F_{jk} = F_{ik}S_{jk} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}^T \quad \text{und} \tag{4.28}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \tag{4.29}$$

folgt.

Für den Übergang zur *von Kármán*'schen Plattentheorie im Kapitel 5 formulieren wir (4.26) in der folgenden Form:

$$\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\sigma_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\sigma_{jk}\right) = 0. \tag{4.30}$$

---

[3] In nonpolaren Materialien hat ein materieller Punkt nur Translationsfreiheitsgrade, in polaren Materialien hat er zusätzlich Rotationsfreiheitsgrade. Eine polare Materialannahme wird in der *Timoschenko*-Balkentheorie bzw. in der *Reissner-Mindlin*'schen Plattentheorie gemacht, um bei dicken Balken und bei dicken Platten die Schubweichheit des Materials besser zu erfassen. Siehe *Handbuch der Physik*, Bd. VI/2a [78].

[4] Siehe *Handbuch der Physik*, Bd. III/1 [106].

4.2.5 Das ***Saint-Venant–Kirchhoff***'sche Materialgesetz

Das *Saint-Venant–Kirchhoff*'sche Gesetz postuliert gemäß [105] bei kleinen Verzerrungen[5] einen linearen Zusammenhang zwischen dem 2. *Piola-Kirchhoff*-Spannungstensor, definiert durch (4.24), und dem *Green*'schen Verzerrungstensor, definiert durch (4.12). Seine bezüglich $\boldsymbol{H}$ linearisierte Version führt auf das *Hooke*'sche Gesetz[6]. Das *Saint-Venant–Kirchhoff*'sche Gesetz lautet:

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn} G_{mn} \quad \text{bzw.} \quad G_{ij} = s_{ijmn} \sigma_{mn}. \tag{4.31}$$

Hier sind c_{ijmn} die kartesischen Komponenten des Steifigkeitstensors und s_{ijmn} die kartesischen Komponenten des Nachgiebigkeitstensors. Beide Tensoren haben höchstens 21 voneinander unabhängige Komponenten, da sie den beiden voneinander unabhängigen Symmetriebedingungen

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad \text{und} \quad c_{ijkl} = c_{jikl} \tag{4.32}$$

genügen. Aus diesen Symmetriebedingungen folgt

$$s_{ijmn} c_{mnpq} = (\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})/2, \tag{4.33}$$

d.h. s_{ijmn} sind nicht die Komponenten eines Tensors, der zum Tensor mit den Komponenten c_{ijmn} invers ist, da zwei Tensoren 4. Stufe zueinander invers sind, wenn für ihre Komponenten a_{ijkl} und b_{ijkl} die Beziehung

$$a_{ijmn} b_{mnpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} \quad \text{gilt.}$$

Detaillierte Ausführungen zu den Steifigkeitstensoren findet man z. B. bei *Gurtin* in [51].
Zu weiteren Vereinfachungen des Steifigkeitstensors können wir durch Berücksichtigung der Symmetrieklasse des Materials in der Gleichung (4.31) gelangen. Dabei wird ausgenutzt, dass für bestimmte orthogonale Tensoren $\boldsymbol{R}$ die Beziehung

$$c_{ijkl} G_{kl} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} c_{mnpq} G_{kl} \tag{4.34}$$

gilt. Ist (4.34) nur für $R_{ij} = \delta_{ij}$ erfüllt, liegt triklines Materialverhalten mit 21 unabhängigen Elastitätskoeffizienten vor. Gilt (4.34) für alle orthogonalen Tensoren $\boldsymbol{R}$, handelt es sich um isotropes Material, für das es nur zwei voneinander unabhängige Koeffizienten gibt. Zu einer umfassenden Darstellung der orthogonalen Tensoren $\boldsymbol{R}$ für die verschiedenen Kristallklassen sei hier auf *Truesdell* und *Noll* [105] verwiesen.

Orthotropes Verhalten liegt vor, wenn (4.34) für spezielle Tensoren $\boldsymbol{R}$, die 180°-Drehungen in drei zueinander orthogonalen Ebenen beschreiben.

---

[5] Siehe auch im Anhang, Abschnitt A.3 auf Seite 201.

[6] Siehe Anhang A.3 Formel (A.35).

In diesem Fall ergeben sich mit (4.34) weitere 12 Beziehungen zwischen Komponenten des Steifigkeitstensors, so dass nur noch 9 unabhängige Materialkonstanten vorliegen.

Kubisches Verhalten liegt vor, wenn (4.34) für spezielle Tensoren $\boldsymbol{R}$ gilt, die 180°-Drehungen in zwei zueinander orthogonalen Ebenen und 120°-Drehungen in der 3. Ebene beschreiben. Die Normale der dritten Ebene zeigt in Richtung der Raumdiagonalen desjenigen Würfels, der durch die Normalen der ersten beiden Flächen und einer weiteren zu ihnen senkrecht stehenden Ebene aufgespannt wird. Für detaillierte Darstellungen verweisen wir auf [105] und [51]. Zu den Beziehungen des orthotropen Materials kommen mit (4.34) noch 6 weitere Gleichungen hinzu, so dass nur noch 3 unabhängige Elastizitätskonstanten vorliegen.

In der hier vorliegenden Arbeit interessieren wir uns für kubisch elastisches Materialverhalten, da der Wafer ein Einkristall mit kubischer Materialsymmetrie ist, und für isotrop elastisches Materialverhalten, da die Druckkugel ein Polykristall ist, der sich im Mittel isotrop verhält. Außerdem interessieren wir uns für isotrope Näherungen für das kubisch anisotrope Waferverhalten.

Zu einer besonders einfachen Darstellung des Materialgesetzes (4.31) für kubische Kristallsymmetrie gelangen wir, wenn die Achsen des fest gewählten Koordinatensystems, mit dessen Hilfe wir die materiellen Punkte in ihren verschiedenen Platzierungen beschreiben, mit den Kristallachsen des Wafers in der Bezugsplatzierung zusammenfallen[7]. Wir sprechen dann von einer ⟨100⟩-Orientierung des kubischen Materials. Dabei sind die ganzzahligen Werte 1 und 0 in den spitzen Klammern die so genannten *Miller*'schen Indizes.

Eine ausführliche Anleitung zur Verwendung dieser Indizes, einschließlich der Bedeutung der verschiedenen Klammertypen wird z.B. in [97] angegeben.

Das *Saint-Venant–Kirchhoff*'sche Gesetz für kubisches Material in der ⟨100⟩-Orientierung lautet:

$$\sigma_{ij} = \lambda G_{kk}\delta_{ij} + 2\mu G_{ij} + \mu' G_{\underline{ii}}\delta_{ij}. \tag{4.35}$$

Den Zusammenhang zwischen den elastischen Koeffizienten c_{ijkl} und den *Lamé*-Koeffizienten λ, μ und μ' stellen wir im Anhang A.2 dar. Außerdem geben wir die Beziehungen zwischen der Darstellung der Komponenten des Steifigkeitstensors als Tensor 4. Stufe und seiner *Voigt*'schen Darstellung an, da die 3 unabhängigen Materialkoeffizienten in der entsprechenden Literatur meist in *Voigt*'scher Notation angegeben werden[8].

---

[7] Siehe Abbildung 3.2 auf Seite 19 und Abbildung 3.3.

[8] Siehe hierzu auch die Datenangaben für GaAs in Formel (3.1).

4.3 Die Randbedingungen

4.3.1 Festlegung des Koordinatensystems

Im vorherigen Abschnitt haben wir bereits festgelegt, dass wir den Wafer in einem kartesischen Koordinatensystem beschreiben. Außerdem entschieden wir uns, dass System so festzulegen, dass die Koordinatenachsen in Richtung der unverformten Kristallachsen zeigen.

An dieser Stelle legen wir den Ursprung dieses Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Kreisfläche, die den Wafer in zwei gleich große Kreiszylinder der Höhe $h/2$ teilt. Wir bezeichnen die Ebene, in der diese Kreisfläche liegt, als Plattenmittelebene. Die X_1- und die X_2-Achse soll innerhalb dieser Ebene liegen. Die X_3-Achse steht folglich senkrecht auf der Mittelebene und soll nach unten zeigen. Damit ist festgelegt, dass die Verschiebungskomponente u_3 die momentane Durchbiegung des Wafers charakterisiert, während die beiden übrigen Verschiebungskomponenten die Horizontalverschiebungen des Wafers darstellen. Die Abbildung 4.2 stellt den Wafer in seiner Bezugsplatzierung dar.
Zur Beschreibung der Bezugsplatzierung führen wir zunächst die Kreisfläche $\overline{\omega} := \omega \cup \partial\omega \subset \mathbb{R}^2$ ein. Das Innere dieser Fläche ist definiert durch

$$\omega := \{(X_1, X_2) | X_1^2 + X_2^2 < R_A\} \tag{4.36}$$

und ihr Rand durch

$$\partial\omega := \{(X_1, X_2) | X_1^2 + X_2^2 = R_A\}. \tag{4.37}$$

Damit können wir die Bezugsplatzierung des Waferinneren gemäß Abbildung 3.1 auf Seite 18 durch

$$\Omega_R \quad := \quad \omega \times \left]-\tfrac{h}{2}, \tfrac{h}{2}\right[\tag{4.38}$$

beschreiben. Der Rand von Ω_R wird wie folgt unterteilt:

$$\begin{aligned}
&\text{obere Deckfläche} && \partial\Omega^- : && = && \omega \times \left\{-\tfrac{h}{2}\right\}, \\
&\text{untere Deckfläche} && \partial\Omega^+ : && = && \omega \times \left\{\tfrac{h}{2}\right\}, \\
&\text{Mantelfläche} && \partial\Omega^M : && = && \partial\omega \times \left[-\tfrac{h}{2}, \tfrac{h}{2}\right].
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Damit gilt

$$\partial\Omega_R = \partial\Omega^- \cup \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^M. \tag{4.40}$$

Die Mittelfläche können wir jetzt auch durch $\overline{\omega} \times \{0\}$ darstellen.

Wir verwenden im Folgenden nur die in der Bezugsplatzierung formulierte Version der Impulsbilanz (4.26). Folglich müssen die Spannungsrandbedingungen als *Piola-Kirchhoff*-Spannungen 1. Art angegeben werden.

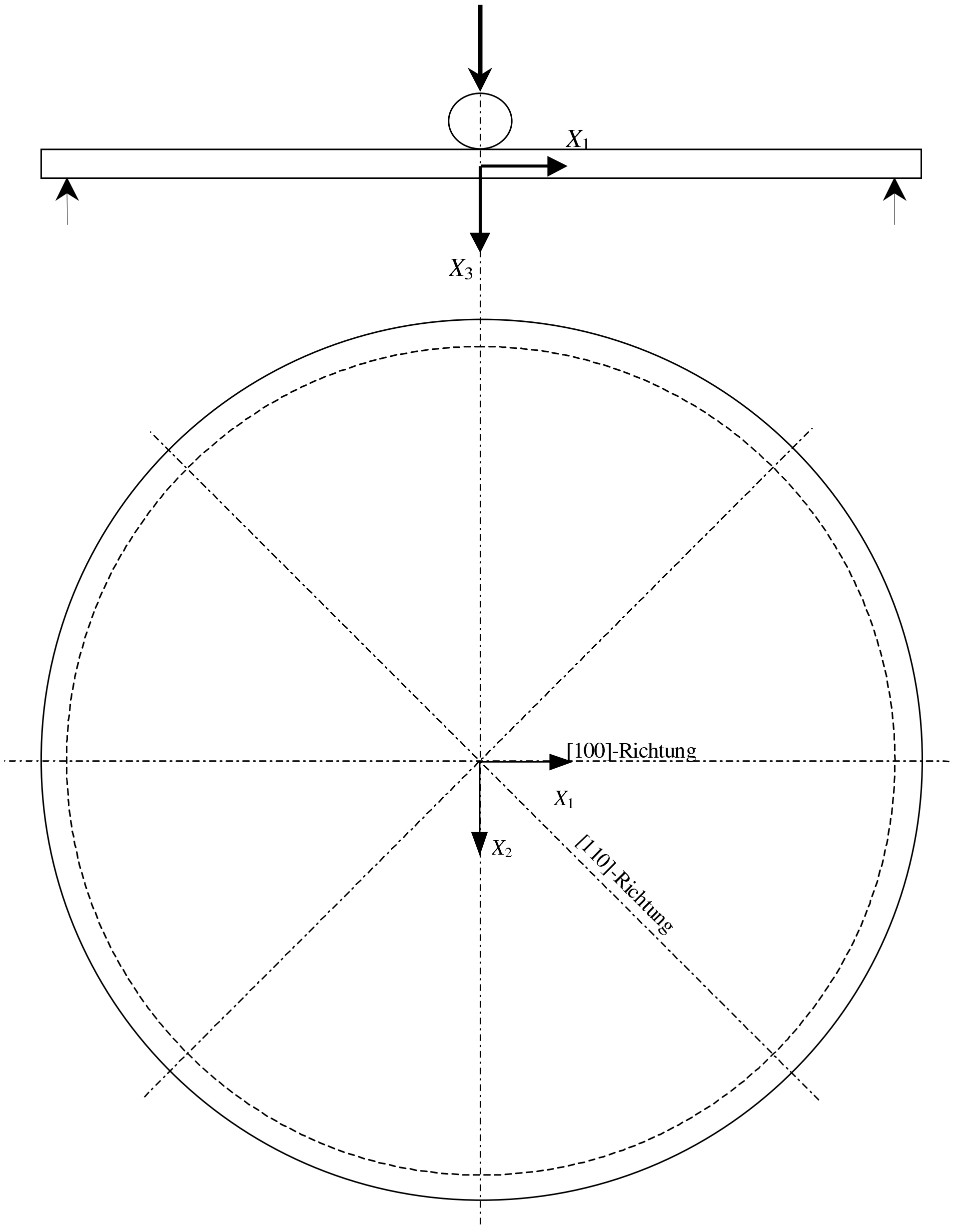

Abbildung 4.2: Koordinatensystem zur Beschreibung der Lage des Wafers.

4.3.2 Zum Prinzip von *Saint-Venant*

Die genaue Beschreibung aller Randbedingungen eines elastischen Körpers und die genaue Berechnung des Verschiebungsfeldes für jeden Punkt ist für reale technische Probleme sehr aufwendig. Nur durch ihre präzise Erfassung kann der Spannungszustand für jeden Körperpunkt in gleicher Güte ermittelt werden. Oft ist man jedoch nur am genauen Spannungsverlauf innerhalb einiger kleiner Bereiche des Körpers interessiert. Meist handelt es um die Bereiche, in denen die betragsmäßig größten Spannungen zu erwarten sind.

In solchen Fällen kann man sich das so genannte Prinzip von *Saint Venant* zunutze machen. Das Prinzip wurde bereits im Jahre 1855 von *de Saint Venant* in [94] beschrieben und danach erfolgreich für zahlreiche reale technische Problemstellungen angewendet. Eine Übersicht darüber, wie verschiedene Autoren dieses Prinzip durch präzise mathematische Formulierungen beschreiben, gibt *Gurtin* in [51] an. Wir geben das Prinzip hier nur verbal an. Es besagt, dass

> statisch äquivalente Randbedingungen, die auf einem begrenzten Randbereich eines elastischen Körpers anliegen, nur in einer gewissen Umgebung dieses Bereiches zu merklich unterschiedlichen Verschiebungs- und Spannungsverläufen führen.

Dabei sind statisch äquivalente Randbedingungen solche, für die die resultierenden mittleren Kräfte und Momente über diesem Bereich gleich sind.

Die Verschiebungen selbst unterscheiden sich auch innerhalb des betrachteten Randbereiches kaum. Damit können in Gebieten, für die ein genauer Spannungsverlauf nicht von Interesse ist, die Randbedingungen soweit vereinfacht werden, dass die Berechnung des Verschiebungsfeldes und des Spannungsfeldes in hinreichend weiter Entfernung von dieser Randregion mit weniger Aufwand möglich ist.

Als Beispiel für die Anwendung des Prinzips kann man die im nächsten Kapitel vorgestellte Plattentheorie betrachten. Dort werden die Randspannungen auf dem schmalen Plattenrand durch statisch äquivalente Linienkräfte und Linienmomente ersetzt[9]. In der Balkentheorie werden die Spannungen an den Balkenenden durch Einzelkräfte und -momente ersetzt.

Bei 3D-Problemen kann so in Extremfällen eine kleine Flächenlast durch eine Punktlast oder durch eine Linienlast approximiert werden. In gleicher Weise kann eine Auflagefläche durch eine Auflagelinie oder einen Auflagepunkt ersetzt werden.

In der hier vorliegenden Arbeit wenden wir das Prinzip nicht nur bei der klassischen Herleitung der Plattentheorie an. In den beiden nächsten Abschnitten dient es außerdem zur Rechtfertigung der Approximation der

---

[9] Oft wird dieses Prinzip auch zur Rechtfertigung der so genannten Ersatzquerkraft am Rand von schubstarren Platten angeführt, so z. B. bei *Girkmann* in [50]. Eine Definition der Ersatzquerkraft und der schubstarren Platte geben wir im nächsten Kapitel an.

Randbedingungen an der Kontaktstelle zwischen Stützring und Wafer und der Randbedingungen für den Kontaktbereich zwischen Kugelstempel und Wafer. Außerdem wird mit dem Prinzip im Kapitel 8 die Verwendung vereinfachter Ansätze in der 3D-Theorie dicker Platten gerechtfertigt.

4.3.3 Die Verhältnisse unter dem Kugelstempel

Im folgenden Abschnitt gehen wir auf drei Aspekte des Kontaktproblems zwischen Wafer und Kugelstempel ein: 1. Wir begründen, warum die Berücksichtigung einer endlichen Kontaktfläche zwischen beiden Körpern notwendig ist. 2. Wir formulieren die Annahmen, die eine Lösung des Kontaktproblems nach der Theorie der *Hertz*'schen Pressung möglich machen. 3. Wir beschreiben, wie die Resultate aus der Theorie der *Hertz*'schen Pressung, die bekanntlich aus dem vollständig linearisierten 3D-Halbraumproblem bei Annahme kleiner Verschiebungen hergeleitet wird, sinnvoll auf das hier betrachtete nichtlineare Problem übertragen werden können.

An der Kontaktstelle von Wafer und Kugelstempel kommt es zur Abplattung der elastischen Kugel und zum Eindringen der Kugel in die Waferoberfläche. Die Berücksichtigung dieses Phänomens hat für die Spannungsanalyse auch bei sehr kleiner Belastung eine große Bedeutung.

Wird die Belastung entsprechend dem Prinzip von *Saint-Venant* nur durch eine Einzelkraft modelliert, erhalten wir eine Singularität im Kraftangriffspunkt, so dass wir dort unendlich hohe Druckspannungen erhalten. Während bei einer 3D-Lösung, auf der gegenüberliegen Seite im Punkt, der die Bezugsplatzierung $(0, 0, h/2)$ hat, die Zugspannungen endlich bleiben[10], ergeben sich dort für 2D-Rechnungen entsprechend der im nächsten Kapitel vorgestellten Plattentheorie unendlich hohe Zugspannungen.

Da wir die Spannungsanalyse unter Verwendung einer Plattentheorie durchführen wollen, ist eine möglichst genaue Berechnung der Kontaktfläche notwendig.

Die Größe der Kontaktfläche und der Spannungsverlauf auf dieser Fläche ändert sich mit der aufgebrachten Kraft *f*. Zur Vereinfachung nehmen wir Folgendes an:

> Die Größe der Kontaktfläche und die Höhe der sich auf ihr einstellenden Spannungen stimmt in guter Näherung mit denen überein, die sich für das Pressen einer elastischen Stahlkugel auf einem ebenen $\langle 100\rangle$-orientierten GaAs-Halbraum einstellen.

Auf diese Weise lässt sich mit der Theorie der *Hertz*'schen Pressung für eine gegebene Druckkraft *f*, unabhängig von den sich in der Platte einstellenden

---

[10] Siehe Kapitel 8 Abschnitt 8.5.

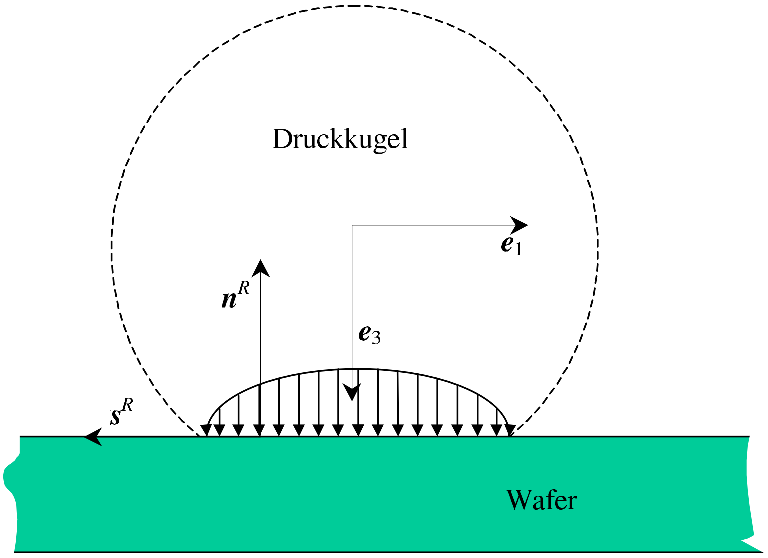

Abbildung 4.3: Reibungsfreie *Hertz*'sche Pressung nach linearer Theorie. Die Druckspannung zeigt in $\boldsymbol{e}_3$-Richtung.

Verschiebungen und Verzerrungen, eine Druckspannung p^f in der resultieren Kontaktfläche $\partial\Omega^f \subset \partial\Omega^-$ angeben.

Diese Berechnung führen wir im Kapitel 6 vor. Sie beruht jedoch auf der bezüglich des Verschiebungsgradienten $\boldsymbol{H}$ linearisierten Theorie, die ihre Rechtfertigung findet, wenn kleine Verschiebungsgradienten vorliegen[11]. Dies ist beim oben beschriebenen Halbraumproblem gegeben.

Würden beim hier untersuchten Biegetest nur kleine Durchbiegungen im Sinne der im Abschnitt 3.4 auf Seite 23 angegebenen Klassifizierung vorliegen, könnten wir zur Berechnung der Verformung ebenfalls die linearisierte Theorie verwenden. Eine Darstellung dieser Situation ist in Abbildung 4.3 skizziert. Dort braucht zwischen den drei Spannungsmaßen (4.22), (4.23) und (4.24) nicht unterschieden werden, da sie durch Linearisierung formal nicht mehr zu unterscheiden sind[12].

Im hier betrachteten Fall müssen wir jedoch die mit der linearisierten Theorie berechnete Druckspannung $p^f(\boldsymbol{X})$ für $\boldsymbol{X} \in \partial\Omega^f$ einem dieser Spannungsmaße zuordnen. Dazu nehmen wir analog zur *Hertz*'schen Annahme an, dass der Kontakt reibungsfrei ist. Dies ist eine Annahme, die die momentanen Tangentialspannungen, d.h. die *Cauchy*-Spannungen, in der Kontaktfläche betreffen. Siehe hierzu auch die Skizze in Abbildung 4.4.

Die Schwierigkeit besteht darin, dass der Wafer in der Momentanplatzierung gekrümmt ist. Dadurch zeigt das momentane Druckkraftfeld, welches

---

[11] Zur Theorie kleiner Verschiebungsgradienten siehe Anhang, Abschnitt A.3.

[12] Siehe Anhang, Formel (A.36).

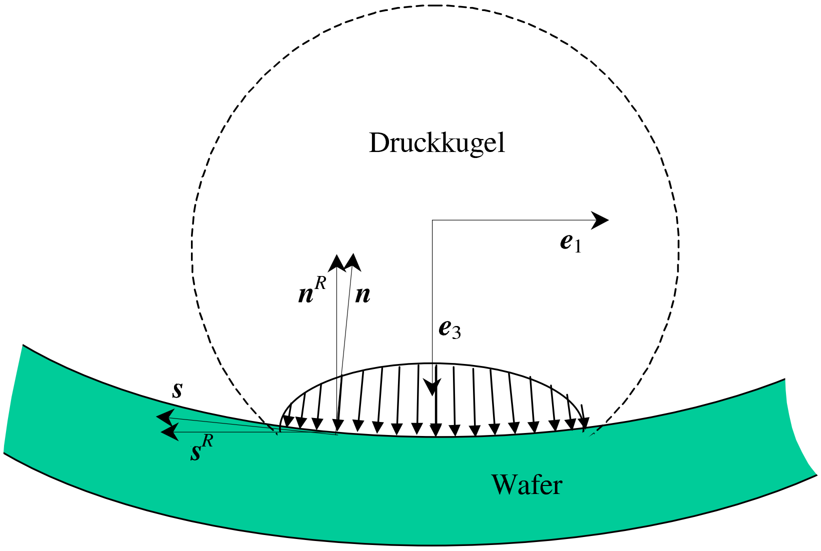

Abbildung 4.4: Reibungsfreie Pressung in der Momentanplatzierung. Die Normalspannung zeigt nicht in $\boldsymbol{e}_3$-Richtung.

normal auf der Oberfläche liegt, im allgemeinen nicht in $\boldsymbol{e}_3$-Richtung.
Wir zeigen im Folgenden, dass es günstiger ist, in der Kontaktfläche nicht wie üblich die *Piola-Kirchhoff*-Spannungen 1. Art vorzugeben, sondern die *Piola-Kirchhoff*-Spannungen 2. Art.

Für eine detaillierte Betrachtung führen wir jetzt auf der Kontaktfläche $\partial\Omega^f$ in der Bezugsplatzierung neben der Flächennormalen auch normierte Tangentenvektoren ein. Für die Flächennormale gilt $\boldsymbol{n}^R = (0, 0, -1)$. Die normierten Tangentenvektoren $\boldsymbol{s}^R$ und $\boldsymbol{\tau}^R$ legen wir so fest, dass $\boldsymbol{s}^R := (-1, 0, 0)$ und $\boldsymbol{\tau}^R := (0, -1, 0)$ auf $\partial\Omega^f$ gilt. Wir definieren die normalen und tangentialen 2.-*Piola-Kirchhoff*-Spannungskomponenten durch

$$\sigma^{nn} := n_i^R \sigma_{ij} n_j^R, \tag{4.41}$$

$$\sigma^{sn} := s_i^R \sigma_{ij} n_j^R \quad \text{und} \tag{4.42}$$

$$\sigma^{\tau n} := \tau_i^R \sigma_{ij} n_j^R. \tag{4.43}$$

Außerdem definieren wir $\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{\tau}$ als Momentanplatzierungen von $\boldsymbol{s}^R$ und $\boldsymbol{\tau}^R$, so dass

$$\begin{aligned} s_i &= F_{ij} s_j^R \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{s}^R \quad \text{und} \\ \tau_i &= F_{ij} \tau_j^R \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}^R \end{aligned} \tag{4.44}$$

gilt.
In der Kontaktfläche erhalten wir die folgenden Identitäten:

$$\sigma^{nn} = \sigma_{33}, \quad \sigma^{sn} = \sigma_{13} \quad \text{und} \quad \sigma^{\tau n} = \sigma_{23}. \tag{4.45}$$

Analog definieren wir

$$\begin{aligned} S^{nn}: &= n_i S_{ij} n_j^R, & T^{nn}: &= n_i T_{ij} n_j, \\ S^{sn}: &= s_i S_{ij} n_j^R, & T^{sn}: &= s_i T_{ij} n_j, \\ S^{\tau n}: &= \tau_i S_{ij} n_j^R \quad \text{und} & T^{\tau n}: &= \tau_i T_{ij} n_j. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Bei reibungsfreier Pressung gilt

$$\begin{aligned} 0 &= S^{sn}(\boldsymbol{X}) = S^{\tau n}(\boldsymbol{X}) = T^{sn}(\boldsymbol{X}) = T^{\tau n}(\boldsymbol{X}) \\ &= s_k^R C_{kl} \sigma_{lj} n_j^R(\boldsymbol{X}) = \tau_k^R C_{kl} \sigma_{lj} n_j^R(\boldsymbol{X}) \qquad \forall \quad \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^f \end{aligned} \tag{4.47}$$

sowie

$$T^{nn}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{J\sqrt{n_j^R C_{jk}^{-1} n_k^R}}\, S^{nn}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{J n_j^R C_{jk}^{-1} n_k^R}\, \sigma^{nn}(\boldsymbol{X}) \le 0 \quad \forall \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^f. \tag{4.48}$$

Mit den Richtungsfestlegungen für $\boldsymbol{n}^R$, $\boldsymbol{s}^R$ und $\boldsymbol{t}^R$ auf Seite 42 können wir (4.47) und (4.48) zu

$$\begin{gathered} C_{1l}\sigma_{l3}(\boldsymbol{X}) = C_{2l}\sigma_{l3}(\boldsymbol{X}) = 0 \quad \text{und} \\ \frac{1}{J n_j^R C_{jk}^{-1} n_k^R}\, \sigma^{nn}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{J(\boldsymbol{C}^{-1})_{33}}\, \sigma_{33}(\boldsymbol{X}) \le 0 \quad \forall \quad \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^f \end{gathered} \tag{4.49}$$

vereinfachen.

Da aus (4.11) die Beziehung $C_{ij} = \delta_{ij} + O(\|\boldsymbol{G}\|)$ und aus (4.31) bzw. (A.32) die Beziehung $\sigma_{ij} = O(\|\boldsymbol{G}\|)$ folgt, gilt auch

$$\begin{aligned} C_{1l}\sigma_{l3} &= \sigma_{13} + O(\|\boldsymbol{G}\|^2) &&= O(\|\boldsymbol{G}\|) \\ C_{2l}\sigma_{l3} &= \sigma_{23} + O(\|\boldsymbol{G}\|^2) &&= O(\|\boldsymbol{G}\|) \\ \text{und} \quad \tfrac{1}{J(\boldsymbol{C}^{-1})_{33}}\, \sigma_{33} &= \sigma_{33} + O(\|\boldsymbol{G}\|^2) &&= O(\|\boldsymbol{G}\|). \end{aligned} \tag{4.50}$$

An dieser Stelle nutzen wir aus, dass beim betrachteten Biegetest nur kleine Verzerrungen auftreten. Im Anhang A.3 wird gezeigt, dass das *Saint-Venant–Kirchhoff*'sche Materialgesetz aus einem allgemeinen elastischen Gesetz durch Linearisierung bezüglich $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$ folgt, so dass seine Verwendung beim Vorliegen kleiner Verzerrungen gerechtfertigt ist. In gleicher Weise können wir nun wegen der vorliegenden kleinen Verzerrungen die Randbedingungen (4.49) durch die folgenden Bedingungen approximieren:

$$\sigma_{13}(\boldsymbol{X}) = \sigma_{23}(\boldsymbol{X}) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{33}(\boldsymbol{X}) = -p^f(\boldsymbol{X}) \le 0 \quad \forall \quad \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^f, \tag{4.51}$$

wobei die Druckspannung $p^f(\boldsymbol{X})$ und die Kontaktfläche $\partial\Omega^f$ unabhängig vom Biegeproblem unter Verwendung der Theorie der *Hertz*'schen Pressung gemäß Kapitel 6 berechnet wird. Wegen der zugelassenen großen Rotationen gilt dann für die kartesischen Komponenten der *Piola-Kirchhoff*-Spannungen 1. Art im allgemeinen auf $\partial\Omega^f$

$$S_{\alpha 3} = F_{\alpha i}\sigma_{i3} \neq 0 \quad \text{für} \quad \alpha \in \{1,2\}. \tag{4.52}$$

4.3.4 Die Verhältnisse am Stützring

Im lastfreien Zustand liegt der Wafer vollständig auf der oberen Kreisringfläche des Stützringes auf. Während der Lastaufbringung hebt die Platte vom Außenradius beginnend in der Weise ab, dass es nur noch auf einem schmalen Streifen entlang des Innenradius einen Kontakt zwischen Platte und Ring gibt.

Die Bestimmung der realen kubisch symmetrischen Kontaktfläche für gegebene Lasten ist sehr aufwendig. Ihre genaue Bestimmung wäre nur dann notwendig, wenn diese Kontaktfläche der Ort der größten Zugspannung ist. Dies ist jedoch nicht der Fall. Konkrete numerische Rechnungen im Kapitel 7 ergeben, dass die dort auftretenden Zugspannungen sehr viel kleiner sind, als in der Nähe des Koordinatenursprungs. In einfachster Näherung nehmen wir einen linienförmigen Kontakt zwischen Wafer und Stützring an. Eine solche Annahme entspricht dem Prinzip von *Saint-Venant*.
Bevor wir eine solche Kontaktlinie formelmäßig beschreiben können, müssen wir zunächst zwei Fragen beantworten.

> Kommt es auf Grund der Materialanisotropie zum Abheben des Wafers während der Lastaufbringung?
>
> Liegt an der Kontaktlinie Reibhaftung vor oder gleitet die untere Deckfläche des Wafers in Abhängigkeit von der Last an der oberen Innenkante des Stützringes ab?

Die erste Frage können wir durch konkrete Rechnungen beantworten, bei denen ein Abheben nicht zugelassen wird. Wird die Kontaktlinie nur auf Druck beansprucht, ist kein Abheben möglich. Gibt es hingegen auch Bereiche, die auf Zug beansprucht werden, ist Abheben möglich. Ein Vergleich der berechneten maximalen Durchbiegungen mit denen der Experimente gemäß [35] zeigte, dass der Wafer an der Stützringkante abgleitet. Siehe auch Abbildung 7.10 auf Seite 156 und Abbildung 7.11. Dies bedeutet, dass für den gegebenen Lastbereich die Anisotropie zu schwach für ein Abheben des Wafers vom Stützring ist.

Die zweite Frage kann letztlich nur durch einen Vergleich der errechneten Daten mit den dazu gehörigen Messdaten beantwortet werden.

Liegt Haften vor, lauten die Randbedingungen auf der Kontaktlinie:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0} \quad \forall\ \boldsymbol{X} \in \Sigma^R \subset \partial\Omega^+ \quad \text{mit}$$

$$\Sigma^R := \{\boldsymbol{X} \mid X_1^2 + X_2^2 = R_I^2, X_3 = h/2\}. \tag{4.53}$$

Im Fall von Gleiten, ändert sich für jede Last die Bezugsplatzierung der Kontaktlinie, denn es gilt für jeden festen Wert der Druckkraft f

$$\Sigma^f := \{\boldsymbol{X} \mid (\chi_1(\boldsymbol{X}))^2 + (\chi_2(\boldsymbol{X}))^2 = R_I^2, X_3 = h/2\} \subset \partial\Omega^+. \tag{4.54}$$

Wie in Abbildung 4.55 zu sehen, liegt ein materieller Punkt, dessen Momentanplatzierung $\chi(\boldsymbol{X})$ auf der Kontaktlinie liegt, in der Bezugsplatzierung nicht auf der Kontaktlinie. Hingegen liegt ein materieller Punkt, dessen Bezugsplatzierung $\boldsymbol{Y}$ auf der Kontaktlinie liegt, in der Momentanplatzierung nicht auf der Kontaktlinie, d. h. es gilt

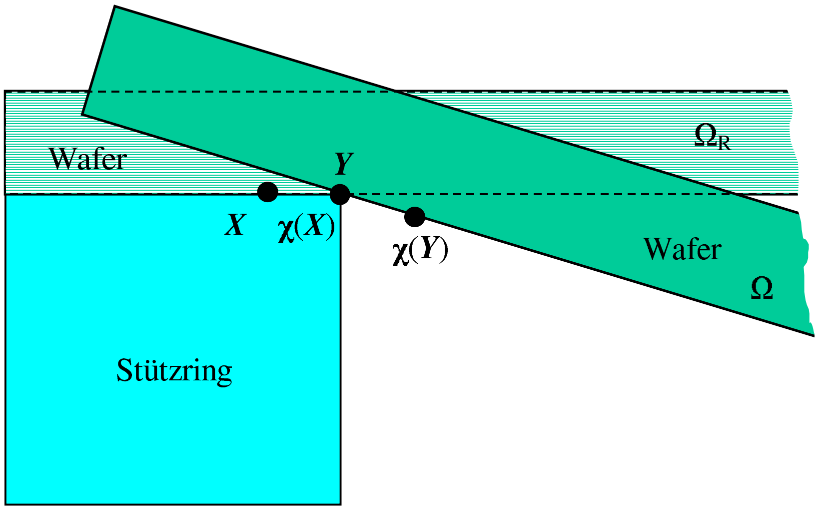

Abbildung 4.5: Gleiten des Wafers an der oberen Innenkante des Stützringes während der Lastaufbringung. Hellgrün: Der Wafer befindet sich im unbelasteten Zustand (Bezugsplatzierung). $\boldsymbol{Y}$ liegt auf der Stützringinnenkante, $\boldsymbol{X}$ nicht. Dunkelgrün: Lage des Wafers nach Aufbringen einer Last der (Momentanplatzierung). $\chi(\boldsymbol{X})$ liegt auf der Stützringinnenkante, $\chi(\boldsymbol{Y})$ nicht.

$$\boldsymbol{X} \neq \chi(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y} \neq \chi(\boldsymbol{Y}).$$

Die Annahme eines starren Stützringes führt auf die Verschiebungsrandbedingung

$$u_3(\boldsymbol{X}) = 0 \qquad \forall\ \boldsymbol{X} \in \Sigma^f \subset \partial\Omega^+. \tag{4.55}$$

Außerdem nehmen wir reibungsfreies Gleiten an. Diese Annahme ist, ebenso wie beim Kontakt zwischen Kugelstempel und Wafer, eine Annahme zu den momentanen Tangentialspannungen. Die folgenden Schritte gleichen deshalb denen, die zur Formulierung der Spannungsrandbedingungen (4.51) im vorigen Abschnitt führten.

Da die Kontaktlinie auf einer glatten Fläche liegt, lassen sich auch hier eindeutig äußere Flächennormalen angeben. Es gilt $\boldsymbol{n}^R = (0, 0, 1)$. Genauso können wir auch wieder in der Bezugsplatzierung normierte Tangentenvektoren $\boldsymbol{s}^R$ und $\boldsymbol{\tau}^R$ einführen, die wir so festlegen, dass $\boldsymbol{s}^R := (1, 0, 0)$ und $\boldsymbol{\tau}^R := (0, 1, 0)$ gilt.

Die normalen und tangentialen 2.-*Piola-Kirchhoff*-Spannungskomponenten sind durch die Formeln (4.41) bis (4.43) definiert. Die Momentanplatzierung der Tangentenvektoren $\boldsymbol{s}^R$ und $\boldsymbol{\tau}^R$ transformieren sich nach Formel (4.44) und wir bezeichnen sie mit $\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{\tau}$. Auf diese Weise gelten auch die Identitäten (4.45). Analog definieren wir die Tangentialspannungskomponenten des *Piola-Kirchhoff*'schen Spannungstensors 1. Art und des *Cauchy*'schen Spannungstensors nach Formel (4.46). Reibungsfreies Gleiten kann jetzt durch Formel (4.47) beschrieben werden. In gleicher Weise können wir nun wegen der vorliegenden kleinen Verzerrungen diese Randbedingungen durch die folgenden Bedingungen approximieren:

$$\sigma_{13}(\boldsymbol{X}) = \sigma_{23}(\boldsymbol{X}) = 0 \quad \forall \quad \boldsymbol{X} \in \Sigma^f. \tag{4.56}$$

Wegen der zugelassenen großen Rotationen gilt auch hier für die kartesischen Komponenten der *Piola-Kirchhoff*-Spannungen 1. Art auf Σ^f im allgemeinen die Ungleichung (4.52).

Als letztes definieren noch in Vorbereitung auf die 2D-Formulierung des Randwertproblems mit der *von Kármán*'schen Plattentheorie die Kontaktkurve:

$$\Theta^f := \{(X_1, X_2) \mid (\chi_1(X_1, X_2, h/2))^2 + (\chi_2(X_1, X_2, h/2))^2 = R_I^2\} \subset \omega. \tag{4.57}$$

4.3.5 Lastfreie Ränder und Starrkörperfesseln

Außerhalb der Kontaktbereiche ist der Wafer auf seinem Rand vollständig normal- und tangentialspannungsfrei. Die Randbedingungen auf den Deckflächen lauten dann unter Beachtung von (4.51), (4.55) und (4.56)

$$S_{i3}(\boldsymbol{X}) = 0 \quad \forall \quad \boldsymbol{X} \in (\partial\Omega^-/\partial\Omega^f) \cup (\partial\Omega^+/\Sigma^f). \tag{4.58}$$

Dabei stellt $\partial\Omega^-/\partial\Omega^f$ eine Mengendifferenz dar, die alle Punkte der oberen Deckfläche umfasst, die nicht in der Kontaktfläche $\partial\Omega^f$ liegen.

Für den Fall, dass der Wafer auf dem Stützring haftet, wäre das Randwertproblem zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes vollständig beschrieben, wenn auch für die Mantelfläche $\partial\Omega^M$ äquivalent zu (4.58) sämtliche

Normal- und Tangentialspannungen zu Null vorgeben werden. Im hier betrachteten Fall des Gleitens wäre jedoch bei reinen Spannungsrandbedingungen auf der Mantelfläche das Verschiebungsfeld nur bis auf die Starrkörperbewegung in der Ebene $X_3 = 0$ eindeutig festgelegt. Der Körper hat in dieser Ebene noch zwei Translationsfreiheitsgrade und einen Rotationsfreiheitsgrad. Zur eindeutigen Festlegung des Verschiebungsfeldes muss deshalb der Körper gegen ebene Starrkörperbewegungen gefesselt werden. Wir wählen dafür die Punkte $\boldsymbol{X}^O, \boldsymbol{X}^N, \boldsymbol{X}^W \in \partial\omega \times \{0\} \subset \partial\Omega^M$ mit

$$\boldsymbol{X}^O = (R^A, 0, 0), \quad \boldsymbol{X}^N = (0, R^A, 0) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{X}^W = (-R^A, 0, 0) \tag{4.59}$$

und definieren mit

$$\partial\Omega^{M*} := \{\boldsymbol{X} \,|\, \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^M, \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{X}^O, \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{X}^N, \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{X}^W\} \tag{4.60}$$

die Menge aller Punkte auf der Mantelfläche, die $\boldsymbol{X}^O, \boldsymbol{X}^N$ und $\boldsymbol{X}^W$ nicht enthält.

Bezeichnet $\boldsymbol{n}^R = (n_1^R, n_2^R, 0)$ den Vektor der äußeren Flächennormalen auf $\partial\Omega^M$, $\boldsymbol{s}^R = (-n_2^R, n_1^R, 0)$ und $\boldsymbol{\tau}^R = (0, 0, 1)$ die Tangentenvektoren auf $\partial\Omega^M$, dann lauten die Randbedingungen auf dem Mantel

$$\begin{aligned}
u_j s_j^R(\boldsymbol{X}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{X} \in \{\boldsymbol{X}^O, \boldsymbol{X}^N, \boldsymbol{X}^W\}, && (4.61)\\
S_{ij} n_j^R(\boldsymbol{X}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^{M*}, && (4.62)\\
S_{3j} n_j^R(\boldsymbol{X}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{X} \in \{\boldsymbol{X}^O, \boldsymbol{X}^N, \boldsymbol{X}^W\} && (4.63)\\
S_{11}(\boldsymbol{X}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{X} \in \{\boldsymbol{X}^O, \boldsymbol{X}^W\} \qquad \text{und} && (4.64)\\
S_{22}(\boldsymbol{X}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{X} \in \{\boldsymbol{X}^N\} && (4.65)
\end{aligned}$$

unter der Beachtung, dass $\mathbf{s} = \mathbf{s}_R \quad \forall \boldsymbol{X} \in \{\boldsymbol{X}^O, \boldsymbol{X}^N, \boldsymbol{X}^W\}$ gilt. Die drei Bedingungen (4.61) stellen die Starrkörperfesseln dar.

Auf diese Weise ist der gesamte Rand des Wafers tangentialspannungsfrei, d.h. die Schubspannungskomponenten der 2. *Piola-Kirchhoff*- und *Cauchy*-Spannungen verschwinden auf dem Waferrand. Insbesondere gilt auf den beiden Deckflächen $\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-$ für kleine Verzerrungen:

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0 \quad \forall \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-, && (4.66)\\
S_{33} &= \sigma_{33} = 0 \quad \forall \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^+ \setminus \Sigma^f, && (4.67)\\
S_{33} &= \sigma_{33} = -p \quad \forall \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^- && (4.68)
\end{aligned}$$

mit

$$p = \begin{cases} 0 & \forall \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^- \setminus \partial\Omega^f \\ p^f & \forall \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^f. \end{cases} \tag{4.69}$$

4.3.6 Übergang zu normierten Größen

Für die weitere Betrachtung ist es von Vorteil, das 3D-Randwertproblem geeignet zu normieren. Wir bezeichnen die normierten Größen auch als dimensionslose Größen. Dabei kennzeichnen wir zunächst die normierten Entsprechungen der ursprünglichen Größen mit einem hochgestellten Stern, wie wir es bereits bei Einführung der dimensionslosen Dicke (3.9) auf Seite 22 getan haben. Wir definieren

$$X_i^* := \frac{X_i}{2R_I}, \qquad u_i^* := \frac{u_i}{2R_I}, \tag{4.70}$$

$$\lambda^* := \frac{\lambda}{E_{\langle 100\rangle}}, \qquad \mu^* := \frac{\mu}{E_{\langle 100\rangle}}, \qquad \mu'^* := \frac{\mu'}{E_{\langle 100\rangle}}, \tag{4.71}$$

$$f^* := \frac{f}{4R_I^2 E_{\langle 100\rangle}}, \qquad p^* := \frac{p}{E_{\langle 100\rangle}} \quad \text{und} \quad \sigma_{ij}^* := \frac{\sigma_{ij}}{E_{\langle 100\rangle}}, \tag{4.72}$$

so dass sich alle übrigen dimensionslosen Größen aus den obigen Größen generieren lassen.

Da wir außer für die Auswertungen der konkreten numerisch oder analytisch berechneten Zahlenwerte für die folgenden Betrachtungen in den nächsten Kapiteln keine dimensionsbehafteten Größen benötigen, vereinbaren wir deshalb für die weiteren Kapitel den hochgestellten Stern wegzulassen, so dass wir

$$X_i^* \mathrel{\widehat{=}} X_i, \qquad u_i^* \mathrel{\widehat{=}} u_i, \tag{4.73}$$

$$\lambda^* \mathrel{\widehat{=}} \lambda, \qquad \mu^* \mathrel{\widehat{=}} \mu, \qquad \mu'^* \mathrel{\widehat{=}} \mu', \tag{4.74}$$

$$f^* \mathrel{\widehat{=}} f, \qquad p^* \mathrel{\widehat{=}} p \quad \text{und} \quad \sigma_{ij}^* \mathrel{\widehat{=}} \sigma_{ij}. \tag{4.75}$$

schreiben.

In dieser Notation lautet die Ungleichung (3.10) zur Annahme einer dünnen Platte :

$$h \ll 1 \tag{4.76}$$

und es gilt

$$R_I = 1/2. \tag{4.77}$$

An den Stellen, an denen wir die konkrete Zahlenwerte der dimensionsbehafteten Größen benötigen kehren wir wieder zur alten Notation zurück.

Kapitel 5

Dünne Platten unter moderater Durchbiegung — ein 2D-Modell nach *von Kármán*

5.1 Tensornotation im $\mathbb{R}^2$

Das Ziel einer Plattentheorie ist die Reduzierung des ursprünglich dreidimensionalen Problems auf ein zweidimensionales Problem.

Verwendeten wir die *Einstein*'sche Summationskonvention bisher nur für Tensoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. im $\mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3$, wollen wir sie von jetzt ab auch für Tensoren aus dem $\mathbb{R}^2$ bzw. aus dem $\mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2$ benutzen. Statt der lateinischen Indizes verwenden wir im $\mathbb{R}^2$ zur Unterscheidung griechische Indizes. Ansonsten gelten die gleichen Regeln wie im Abschnitt 4.1.

Wenn wir zwischen zwei gleich lautenden Größen unterscheiden müssen, für welche die eine nach der 3D-Theorie definiert ist und die andere den Restriktionen der 2D-Theorie unterworfen sind, bekommen die 2D-Größen einen oberen Index P. So schreiben wir manchmal u_α^P statt u_α, wenn u_α ausdrücklich zur 3D-Theorie gehört.

5.2 Unterschiedliche Wege zum 3D/2D-Übergang

Wie bereits im Abschnitt 3.4 begründet, wollen wir hier wegen des Vorliegens moderater Durchbiegungen einer dünnen Platte die *von Kármán*'sche Theorie verwenden. Die in der Literatur vorgestellten Herleitungen dieser Theorie lässt sich in zwei Gruppen einteilen:

1. Direkte (klassische) Herleitung

   In das 3D-Problem werden bestimmte kinematische Ansätze und speziell angepasste Materialgesetze eingesetzt. Die dann resultieren Gleichungen werden über die Plattendicke integriert. Die kinematischen Ansätze und die speziell angepassten Materialgesetze werden durch bestimmte meist nur durch empirisch begründbare Annahmen bzw. Forderungen gerechtfertigt. Beispielhaft für diese Vorgehensweise seien hier *von Kármán*s Originalarbeit [61] und die klassischen Arbeiten von *Nowoschilow* [84], *den Hartog* [53] und *Wolmir* [115] genannt.

2. Asymptotische Herleitung

   In der schwachen Formulierung des 3D-Problems werden die Unbekannten und die Daten formal asymptotisch bezüglich der Größe h entwickelt, die hier als Kleinheitsparameter betrachtet wird. Vorausgesetzt wird dabei nur die formale Entwickelbarkeit der Unbekannten und der Daten. Formal heißt in diesem Zusammenhang, dass die Konvergenz der Reihe vorausgesetzt aber nicht bewiesen wird. Gesucht sind die resultierenden Differentialgleichungen der führenden Terme, wobei die führenden Terme die ersten nicht verschwindenden Glieder der Reihenentwicklung sind. Die Gestalt dieser Terme wird durch Auswertung der jeweils für $h \to 0$ resultierenden Gleichungen ermittelt. Die Materialdaten werden meist als unabhängig von h betrachtet. Die Abhängigkeit der Randdaten vom Kleinheitsparameter wird entweder wie in [26, 21] und [90] vorgegeben oder sie ergibt sich wie in [76], wenn gefordert wird, dass der linearisierte Anteil des für $h \to 0$ resultierenden nichtlinearen Problems die gleiche Lösung haben soll, wie die Lösung des asymptotisch entwickelten linearisierten 3D-Problems für $h \to 0$. Die schwache Formulierung des 2D-Plattenproblems ergibt sich dann als schwache Formulierung der führenden Terme des 3D-Problems, wenn nur die führenden Terme die Randbedingungen des ursprünglichen Systems exakt erfüllen müssen und die zugelassenen Testfunktionen aus dem selben Raum sind, wie die führenden Terme der asymptotisch entwickelten Unbekannten.

Ausgangspunkt für beide Herleitungen ist die in der Bezugsplatzierung formulierte Impulsbilanz des 3D-Problems gemäß (4.30). Während für die klassische Herleitung von *Saint-Venant–Kirchhoff*'schem Materialverhalten gemäß (4.31) ausgegangen werden muss, ist eine solche Annahme für die Herleitungen nach einer asymptotischen Entwicklung nicht nötig. Vielmehr kann von allgemeineren elastischen Gesetzen der Form (A.31) ausgegangen werden[1]. *Davet* zeigt in [32], dass aus der asymptotischen Entwicklung bezüglich

---

[1] Auf eine detaillierte Formulierung allgemeinerer elastischer Gesetze wird in dieser Arbeit mit Verweis auf [74] oder [22] verzichtet.

der dimensionslosen Plattendicke für solch verallgemeinerte Materialgesetze das gleiche Resultat folgt wie für das *Saint-Venant–Kirchhoff*'sche Materialgesetz. Da wir hier von vornherein *Saint-Venant–Kirchhoff*'sches Materialverhalten annehmen, erübrigt sich diese allgemeinere Herleitung.

Während für die linearisierte Theorie gezeigt werden kann, dass die Lösung des entsprechenden 3D-Problems für $h \to 0$ streng gegen die Lösung des *Kirchhoff*'schen Plattenproblems konvergiert, fehlt für die *von Kármán*'sche Theorie bis heute ein entsprechendes Resultat [24, 25]. Das heißt, das Ergebnis der formal asymptotischen Methode kann zur Zeit nicht durch einen strengen Konvergenzbeweis gerechtfertigt werden.

Für die klassische Herleitung, wie sie im Abschnitt 5.3 vorgeführt wird, muss die Gültigkeit der folgenden vier Annahmen erfüllt sein[2]:

i) u_i ist ein *Kirchhoff-Love*'sches Verschiebungsfeld.

ii) Der Betrag der Horizontalverschiebungen u_α ist gegenüber dem Betrag der Vertikalverschiebung u_3 vernachlässigbar klein. Der Betrag der Vertikalverschiebung u_3 ist gegenüber dem Plattendurchmesser vernachlässigbar klein.

iii) Der Betrag der Spannung σ_{33} ist gegenüber dem Betrag der Spannungen $\sigma_{\alpha 3}$ vernachlässigbar klein. Für jedes fest gewählte α ist der Betrag der Spannung $\sigma_{\alpha 3}$ gegenüber dem Betrag der Spannungen $\sigma_{\alpha\beta}$ vernachlässigbar klein.

iv) Die resultierenden Abweichungen der Lösung, die sich ergibt, wenn die Randbedingungen über die Plattendicke nur statisch äquivalent erfüllt werden, sind bis auf einen kleinen Randstreifen vernachlässigbar klein.

Die Gültigkeit dieser Annahmen wird meist nur anschaulich über die Kleinheit der in (3.9) definierten dimensionslosen Dicke h^*, seit Abschnitt 4.3.6 mit h bezeichnet, und durch die Höhe der maximal zulässigen Verschiebungen begründet. Die getroffenen Annahmen sind gerade so gewählt, dass die resultierenden *von Kármán*'schen Plattengleichungen bei Linearisierung um $\boldsymbol{H}=\mathbf{0}$ auf die *Kirchhoff*'schen Plattengleichungen führen. Dies unterscheidet die *von Kármán*'sche Theorie von anderen nichtlinearen 2D-Theorien [24], deren Linearisierungen nicht mit der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie identisch sind.

Da rationale Begründungen dieser Annahmen lange Zeit fehlten, wurde die Verwendung der *von Kármán*'schen Plattentheorie zur Approximation von nichtlinearen 3D-Problemen von einigen Autoren kritisiert. So schrieb *Truesdell* 1978 in [104], dass der Zweck des Studiums der *von Kármán*'schen

---

[2] Die detaillierte Erläuterung der Annahmen erfolgt ebenfalls im Abschnitt 5.3.

Plattentheorie reine Analysis sei, da die verwendeten Annahmen von höheren Mächten gegeben wurden.

Dass sich die verwendeten Annahmen tatsächlich in rationaler Weise rechtfertigen lassen, kann mit Hilfe einer formal asymptotischen Entwicklung des 3D-Problems gezeigt werden. Angeregt durch *Truesdell*s Kritik legten *Ciarlet* und *Destuynder* [26] 1979 eine rationale Rechtfertigung dieser Annahmen vor. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die *von Kármán*'schen Plattengleichungen für den Grenzübergang auf eine unendlich dünnen Platte folgen und das diese Grenzwertlösung gerade die Annahmen *i*) bis *iv*) erfüllt.

Zur Rechtfertigung des hier über die klassische Herleitung gefundenden *von Kármán*'schen Plattenproblems stellen wir im Abschnitt 5.4 eine asymptotische Entwicklung des 3D-Problems vor, die ausschließlich auf der asymptotischen Entwicklung der Verschiebungen beruht. Dabei halten wir uns an die Vorgehensweise von *Raoult* [90] und *Miara* [76] entsprechend der Darstellung von *Ciarlet* in [24], wobei wir deren Methoden auf den kubisch anisotropen Fall erweitern und auf die hier vorliegenden Randbedingungen übertragen. Zwar müssen auch für diese Herleitung noch einige Grundannahmen getroffen werden; diese sind aber bei weitem nicht so streng wie Annahmen *i*) bis *iii*).

Um an dieser Stelle den Unterschied zwischen beiden Herleitungen kurz zu umreißen und um den grundsätzlich unterschiedlichen Charakter der in beiden Herleitungen von vornherein getroffen Annahmen zu zeigen, geben wir hier bereits jetzt die Annahmen für die im Abschnitt 5.4 beschriebene asymptotische Entwicklung an. Die Annahmen werden jedoch nicht für die Größen des ursprünglichen Problems getroffen, sondern für neu eingeführte Größen, die wir nachfolgend beschreiben.

Ausgangspunkt für die asymptotische Entwicklung des 3D-Problems ist seine schwache Formulierung gemäß (A.40), welche in ein Koordinatensystem transformiert wird, in dem die Platte unabhängig von h die Dicke 1 hat. Wir nennen dieses Koordinatensystem das skalierte Koordinatensystem und bezeichnen die *Kartesi*'schen Koordinaten dieses Systems mit $\overset{s}{X}_i$. Die Größe h übernimmt hier die Rolle eines Kleinheitsparameters im singulär gestörten Randwertproblem. Die Verschiebungen in diesem Koordinatensystem bezeichnen wir als transformierte Verschiebungen $\overset{s}{u}_i$. In gleicher Weise definieren wir auch die transformierte Randlast $\overset{s}{p}$. Beide transformierten Größen sind nicht nur von den skalierten Koordinaten $\overset{s}{X}_i$ abhängig, sondern auch vom Kleinheitsparameter h. Für $\overset{s}{u}_i$ und $\overset{s}{p}$ werden die folgenden fünf Annahmen getroffen:

I) Es gibt vier feste ganze Zahlen $M_1, M_2, M_3, Q \in \mathbb{G}$, für die sich transformierten Größen wie folgt darstellen lassen,

$$\begin{aligned}\overset{s}{p}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) &= h^{Q}\,\overset{ss}{p}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2), \qquad (5.1)\\ \overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) &= h^{M_i}\,\overset{ss}{u}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3), \qquad (5.2)\end{aligned}$$

wobei falls $\overset{s}{p} \neq 0$ und $\overset{s}{u}_i \neq 0$ gilt, auch $\lim\limits_{h\to 0}\overset{ss}{p}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) \neq 0$ und $\lim\limits_{h\to 0}\overset{ss}{u}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) \neq 0$ gelten soll. Die Größe $\overset{ss}{u}_i$ heißt skalierte Verschiebung und $\overset{ss}{p}$ skalierte Randlast.

II) Die skalierte Randlast ist unabhängig von h, d.h. es gilt

$$\overset{ss}{p}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) = \overset{\langle 0\rangle}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2); \qquad (5.3)$$

die skalierten Verschiebungen sind formal asymptotisch entwickelbar, d.h. es gilt

$$\overset{ss}{u}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = \sum_{A=0}^{N_i} h^{A}\,\overset{\langle A\rangle}{u}_i(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) + O(h^{N_i+1})$$

$$\text{mit} \quad N_i \in \mathbb{N}, \qquad (5.4)$$

wobei $\overset{\langle A\rangle}{u}_i$ unabhängig von h ist. Dabei wird $\overset{\langle 0\rangle}{u}_i$ führender Term von $\overset{ss}{u}_i$ genannt.

III) Die Verschiebungsrandbedingungen des ursprünglichen 3D-Problems müssen nur für die führenden Terme exakt erfüllt werden.

IV) Die Lösung des Problems, das sich ergibt, wenn der Grenzübergang $h \to 0$ für das asymptotisch entwickelte nichtlineare 3D-Problem vollzogen wird und das hieraus resultierende Problem bezüglich $\frac{\partial \overset{ss}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_j} = 0$ linearisiert wird, soll mit der Lösung des Problems übereinstimmen, das durch Linearisierung des nichtlinearen 3D-Problems bezüglich $\frac{\partial \overset{s}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_j} = 0$ und nach anschließender asymptotischer Entwicklung für $h \to 0$ entsteht.

V) Sind $\overset{s}{v}_i$ die transformierten zulässigen Testfunktionen der schwachen Formulierung des skalierten 3D-Problems und $\overset{\langle 0\rangle}{u}_i$ die unbekannten skalierten Verschiebungen, wenn h gegen Null geht, dann muss das für $h \to 0$ resultierende Problem nicht mehr für alle zulässigen $\overset{s}{v}_i$ des 3D-Problems Lösungen $\overset{\langle 0\rangle}{u}_i$ haben, sondern nur für alle zulässigen skalierten Testfunktionen $\overset{ss}{v}_i$, die der gleichen Skalierungsvorschrift wie die Unbekannten genügen und die den gleichen Restriktionen unterliegen, wie die führenden Terme der Unbekannten.

Wir werden zeigen, dass aus den Annahmen *I*) bis *III*) folgt: Die führenden Terme der Verschiebungen haben die Eigenschaften eines *Kirchhoff-Love*-Verschiebungsfeldes. Die Annahme *V*) besagt dann, dass das für $h \to 0$ resultierende Problem, nur Lösungen haben muss, wenn die zulässigen skalierten Testfunktionen ebenfalls ein *Kirchhoff-Love*'sches Verschiebungsfeld bilden.

Der Annahme *IV*) kommt eine Schlüsselrolle zu. Durch sie werden die führenden Terme der Verschiebungen so festgelegt, dass sie mit der schwachen Formulierung des *von Kármán*'schen Plattenproblems übereinstimmen. Genau diese Forderung führt auch dazu, dass die *Kirchhoff*'sche Plattentheorie auf zwei Wegen durch asymptotische Entwicklung herleitbar ist, nämlich als Theorie der führenden Terme der asymptotisch entwickelten linearisierten Impulsbilanz und als Theorie des linearen Anteils der führenden Terme des nichtlinearen asymptotisch entwickelten 3D-Problems. Während die Formulierung der Annahme *IV*) auf *Miara* [76] zurück geht, fordert *Raoult* in [90] und *Ciarlet* in [24] stattdessen, dass von vornherein in Formel (5.1) und (5.2) die Skalierungsvorschriften festliegen, indem sie die Werte $M_\alpha = 2$, $M_3 = 1$ und $Q = 4$ vorgeben[3]. Bei *Miara* ist die Skalierungsvorschrift keine Annahme, sondern ein Resultat, das aus der Forderung nach der Vertauschbarkeit von Linearisierung und Grenzübergang für $h \to 0$ gemäß Annahme *IV*) folgt.

Um der besonderen Situation am Stützring in Formel (4.55) gerecht zu werden, nehmen wir noch die folgende formal asymptotische Entwicklung für die lastabhängigen Koordinaten $\overset{s}{X}_\alpha = \overset{s}{Z}_\alpha$ der Bezugsplatzierung derjenigen Punkte an, die in der Momentanplatzierung den Stützring in einer Linie berühren:

VI)

$$\overset{s}{Z}_\alpha(h) = \sum_{A=0}^{N_z} h^A \overset{(A)}{Z}_\alpha + O(h^{N_Z+1}) \tag{5.5}$$

mit $N_Z \in \mathbb{N}$, $\overset{(A)}{Z}_\alpha$ unabhängig von h und

$$\left(\overset{s}{Z}_\alpha(h) + \overset{s}{u}_\alpha\left(h; \overset{s}{Z}_1(h), \overset{s}{Z}_2(h), \tfrac{1}{2}\right)\right)^2 = R_I^2. \tag{5.6}$$

---

[3] In [43] wird gezeigt, dass wenn stattdessen $Q = 1$ oder $Q = 2$ gefordert wird, die asymptotische Entwicklung des 3D-Problems für $h \to 0$ auf die invariante nichtlineare Membrantheorie oder die invariante nichtlineare Biegetheorie führt. Die Unterschiede der *von Kármán*'schen Theorie zu diesen beiden Theorien erläutern wir kurz im Abschnitt 5.7 am Ende dieses Kapitels.

5.3 Herleitung der *von Kármán*'schen Plattentheorie auf klassischem Wege

5.3.1 Grundannahmen zum Verschiebungs- und Spannungsfeld

Neben der bereits im 3D-Fall formulierten Annahme kleiner Verzerrungen, nehmen wir an, dass zusätzlich in Konkretisierung von Annahme *ii*) auf Seite 51 die Beziehungen

$$|u_\alpha| \ll h \tag{5.7}$$

und

$$|u_3| \ll 2R_I \tag{5.8}$$

gelten sollen. Diese sind, in Hinblick auf die im Abschnitt 3.4 auf Seite 23 vorgenommene Klassifizierung der Verschiebungen, Forderungen nach kleinen Horizontalverschiebungen und moderaten Durchbiegungen.

Das Vorliegen einer dünnen Platte, im Sinne von (3.10), soll außerdem die Annahme eines *Kirchhoff-Love*'schen Verschiebungsfeldes rechtfertigen, was der Annahme *i*) auf Seite 51 entspricht. Ein solches Verschiebungsfeld genügt der Bedingung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_i} = 0 \quad \text{bzw.} \quad E_{i3} = 0, \tag{5.9}$$

bei Verwendung des im Anhang durch Formel (A.34) definierten linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{E}$.

Durch Auswerten von (5.9) lässt sich zeigen, dass diese Forderung der so genannten *Bernoulli*-Hypothese gleichkommt. Diese Hypothese besagt, dass Ebenen, die in der Bezugsplatzierung senkrecht auf der Mittelfläche der Platte liegen, in der Momentanplatzierung eben bleiben und weiterhin senkrecht auf der Mittelfläche der Platte stehen. Da die Komponenten $E_{\alpha 3}$ in der vollständig linearisierten Theorie oft als Schubverzerrung bezeichnet werden, wird eine Theorie, in der die Gültigkeit von (5.9) gefordert wird, auch schubstarre Theorie genannt.

Im Folgenden werden wir zeigen, dass Verschiebungen, die der Bedingung (5.9) genügen, nur linear von X_3 abhängen und durch Kenntnis der Mittelflächenverschiebungen $u_i(X_1, X_2, 0)$ vollständig bestimmt sind. Dazu betrachten wir die Bedingung (5.9) zunächst für den Fall $i = 3$. Aus $2\frac{\partial u_3(X_1,X_2,X_3)}{\partial X_3} = 0$ kann gefolgert werden, dass

$$u_3(X_1, X_2, X_3) = W(X_1, X_2) \tag{5.10}$$

gilt. Aus $\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_\alpha} = 0$ folgt dann unter Beachtung von (5.10)

$$u_\alpha(X_1, X_2, X_3) = U_\alpha(X_1, X_2) - X_3 \frac{\partial W(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha}. \tag{5.11}$$

Die Funktionen U_1, U_2 und W hängen nur noch von X_1 und X_2 ab und wir beschreiben den Vektor der horizontalen Komponenten auch durch

$$\boldsymbol{U} = (U_1, U_2) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{U} : \omega \cup \partial\omega \to \mathbb{R}^2. \tag{5.12}$$

Werten wir (5.10) und (5.11) auf der Fläche $X_3 = 0$ aus, erhalten wir

$$u_\alpha(X_1, X_2, 0) = U_\alpha(X_1, X_2) \quad \text{und} \quad u_3(X_1, X_2, 0) = W(X_1, X_2). \tag{5.13}$$

Damit lassen sich die Funktionen U_a und W auch als Mittelflächenverschiebungen interpretieren. Da u_3 unabhängig von X_3 ist, stellt $W(X_1, X_2)$ nicht nur die Mittelflächenverschiebungen eines materiellen Punktes mit der Bezugsplatzierung $(X_1, X_2, 0) \in \Omega^R$ in X_3-Richtung dar, sondern beschreibt auch die Verschiebungen aller materiellen Punkte in X_3-Richtung, die auf dem Linienabschnitt $\{X_1\}\times\{X_2\}\times[-h/2, h/2]$ liegen.

Die Beachtung von (5.7) und (5.8) lässt Aussagen zu den Größenordnungen der Verschiebungsgradienten zu. Danach hat $\|H_{\alpha\beta}\|$ die gleiche Größenordnung wie $\|H_{3\alpha}H_{3\beta}\|$. Vernachlässigen wir im *Green*'schen Verzerrungstensor (4.12) die kleinen Terme höherer Ordnung, folgt durch Einsetzen der Gleichungen (5.11) und (5.10) die Beziehung

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial X_\alpha} - 2X_3\frac{\partial^2 W}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \frac{\partial W}{\partial X_\alpha}\frac{\partial W}{\partial X_\beta}\right). \tag{5.14}$$

Um zur *Kirchhoff*'schen Plattentheorie gelangen, muss diese Beziehung noch linearisiert werden.

Zusätzlich zu den Annahmen über das Verschiebungsfeld müssen zur Herleitung der *von Kármán*'schen Theorie noch Annahmen über die Größenordnungen der Spannungen gemacht werden. Sie lauten entsprechend Annahme *iii*) auf Seite 51:

$$|\sigma_{33}| \ll \|\sigma_{\alpha 3}\| \quad \text{und} \tag{5.15}$$

$$|\sigma_{\alpha 3}| \ll \|\sigma_{\alpha\beta}\| \quad \text{für } \alpha = 1, 2. \tag{5.16}$$

Die bisher getroffenen Annahmen können wir auch formal durch das Verhalten der Größen für den Grenzübergang $h \to 0$ zusammenfassen:

$$X_3 = O(h), \qquad X_\alpha = O\left(h^0\right) = O(1), \tag{5.17}$$

$$u_3 = O(h), \qquad u_\alpha = O\left(h^2\right), \tag{5.18}$$

$$H_{3\alpha} = O(h), \qquad H_{\alpha\beta} = O\left(h^2\right), \tag{5.19}$$

$$G_{\alpha\beta} = O\left(h^2\right), \qquad G_{33} = O\left(h^2\right), \tag{5.20}$$

$$G_{3\alpha} = O\left(h^3\right), \qquad \sigma_{\alpha\beta} = O\left(h^2\right), \tag{5.21}$$

$$\sigma_{3\alpha} = O\left(h^3\right) \quad \text{und} \qquad \sigma_{33} = O\left(h^4\right). \tag{5.22}$$

Dabei folgt das Verhalten von $\sigma_{\alpha\beta}$ unmittelbar aus dem elastischen Gesetz (4.35) und das der übrigen Spannungskomponenten aus den Annahmen (5.15) und (5.16).

5.3.2 Das ***Saint-Venant–Kirchhoff***'sche Gesetz für dünne Platten

Ausgangspunkt zur Gewinnung eines 2D-Materialgesetzes für dünne Platten ist das ursprüngliche 3D-Materialgesetz (4.31). Für die ebenen Komponenten des *Green*'schen Verzerrungstensors gilt $G_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta mn}\sigma_{mn}$. Vernachlässigen wir hier unter Beachtung von (5.15) und (5.16) die kleinen Terme, erhalten wir das *Saint-Venant–Kirchhoff*'sche Gesetz für dünne Platten:

$$G_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta\gamma\epsilon}\sigma_{\gamma\epsilon}. \tag{5.23}$$

Dieses Gesetz stimmt formal mit dem des ebenen Spannungszustands überein, während (5.9) formal dem ebenen Verzerrungszustand in der linearisierten Theorie entspricht. Der Tensor 4. Stufe $\boldsymbol{c}^P$, welcher der Bedingung

$$c^P_{\rho\tau\alpha\beta}s_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = (\delta_{\rho\gamma}\delta_{\tau\epsilon} + \delta_{\rho\epsilon}\delta_{\tau\gamma})/2 \tag{5.24}$$

genügt, wird Plattensteifigkeitstensor genannt, d.h es gilt $c^P_{\rho\tau\alpha\beta} \neq c_{\rho\tau\alpha\beta}$. Die Umkehrung von (5.23) lautet unter Verwendung von (5.24)

$$\sigma_{\alpha\beta} = c^P_{\alpha\beta\gamma\epsilon}G_{\gamma\epsilon}. \tag{5.25}$$

Speziell für kubisches Material in der $\langle 100\rangle$-Orientierung lautet diese Gleichung unter Verwendung der im Anhang Abschnitt A.2 beschriebenen Zusammenhänge

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda\frac{2\mu + \mu'}{2\mu + \mu' + \lambda}\delta_{\alpha\beta}G_{\gamma\gamma} + 2\mu G_{\alpha\beta} + \mu'\delta_{\alpha\beta}G_{\underline{\beta\beta}}. \tag{5.26}$$

Die Beschreibung der Plattenverschiebungen $\boldsymbol{u}$ durch die Mittelflächenverschiebungen U_α und W impliziert ein zunächst überbestimmtes System von Feldgleichungen, da wir uns einen Teil der Lösung auf andere Weise beschafft haben. Eine derartige Situation tritt häufig auf und wird hier wie folgt gelöst. Wir werden nur einen Teil der Spannungen, nämlich die Komponenten $\sigma_{\alpha\beta}$, durch das oben begründete 2D-Materialgesetz mit den Verzerrungen $G_{\alpha\beta}$ in Beziehung setzen. Die verbleibenden Komponenten σ_{i3} integrieren wir zunächst über die Plattendicke. Die resultierenden Ausdrücke werden dann in die Liste der unbekannten Funktionen aufgenommen, für die das Randwertproblem unter Auswertung einiger Gleichgewichtsbedingungen gelöst wird. Ist das reduzierte Randwertproblem gelöst, kann unter Zuhilfenahme der noch nicht ausgewerteten Gleichgewichtsbedingungen unter Beachtung der Spannungsrandbedingungen letztlich auch σ_{i3} berechnet werden.

5.3.3 Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen für dünne Platten

Wir betrachten nun die Gleichgewichtsbedingungen (4.30) im Detail und versuchen, auch hier eine Reduzierung auf ein zweidimensionales Problem zu erreichen. Hierzu berechnen wir zunächst die führenden Terme der *Piola-Kirchhoff*-Spannungen 1. Art unter der Annahme, dass wir wegen (5.7), (5.8), (5.15) und (5.16) die kleinen Terme vernachlässigen können:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X_1}\sigma_{11} + \frac{\partial W}{\partial X_2}\sigma_{12} & \frac{\partial W}{\partial X_1}\sigma_{12} + \frac{\partial W}{\partial X_2}\sigma_{22} & \frac{\partial W}{\partial X_1}\sigma_{13} + \frac{\partial W}{\partial X_2}\sigma_{23} \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Bringen wir die Gleichgewichtsbedingungen (4.30) in die Form

$$\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial X_\beta} + \frac{\partial S_{\alpha 3}}{\partial X_3} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial S_{3\beta}}{\partial X_\beta} + \frac{\partial S_{33}}{\partial X_3} = 0,$$

ersetzen hierin die Größen $S_{i\beta}$ durch die entsprechenden Größen aus (5.27), erhalten wir schließlich

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial X_\beta} + \frac{\partial \sigma_{\alpha 3}}{\partial X_3} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_{3\beta}}{\partial X_\beta} + \frac{\partial}{\partial X_\beta}\left(\frac{\partial W}{\partial X_\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\right) + \frac{\partial S_{33}}{\partial X_3} = 0. \tag{5.28}$$

Als nächstes führen wir neue Größen ein, die für Plattentheorien von zentraler und anschaulicher Bedeutung sind:

$$N_{\alpha\beta}(X_1, X_2) := \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}(X_1, X_2, X_3)\mathrm{d}X_3 \quad \text{— Membrankrafttensor,} \tag{5.29}$$

$$M_{\alpha\beta}(X_1, X_2) := \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}(X_1, X_2, X_3)X_3\mathrm{d}X_3 \quad \text{— Momententensor,} \tag{5.30}$$

$$Q_{\alpha}(X_1, X_2) := \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3}(X_1, X_2, X_3)\mathrm{d}X_3 \quad \text{— Querkraftvektor.} \tag{5.31}$$

Dabei werden $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ und Q_α auch Schnittgrößen genannt. Diese Größen entstehen auf natürliche Weise, wenn wir die Gleichgewichtsbedingungen (5.28) über die Plattendicke integrieren.

Aus dem ersten Gleichungssystem von (5.28) folgt zunächst

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_\beta} \mathrm{d}X_3 + \sigma_{\alpha 3}(X_1, X_2, h/2) - \sigma_{\alpha 3}(X_1, X_2, -h/2) = 0.$$

Mit den Spannungsrandbedingungen (4.66) folgt unter Verwendung von (5.29) daraus

$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}(X_1, X_2)}{\partial X_\beta} = 0 \quad \forall \ (X_1, X_2) \in \omega. \tag{5.32}$$

Die entsprechende Integration der rechten Gleichung von (5.28) liefert unter Berücksichtigung der Verschiebungsrandbedingung (4.55) bei Verwendung der Definitionen (4.57), (5.29) und (5.31) die Gleichgewichtsbeziehung für alle $(X_1, X_2) \in \omega \setminus \Theta^f$

$$\frac{\partial}{\partial X_\beta} \left(Q_\beta(X_1, X_2) + \frac{\partial W(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha} N_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \right)$$
$$+ S_{33}(X_1, X_2, h/2) - S_{33}(X_1, X_2, -h/2) = 0.$$

Daraus folgt mit den Spannungsrandbedingungen (4.67) und (4.68) sowie der Beziehung (5.10)

$$\frac{\partial}{\partial X_\beta} \left(Q_\beta(X_1, X_2) + \frac{\partial W(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha} N_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \right) = -p(X_1, X_2)$$
$$\forall (X_1, X_2) \in \omega \setminus \Theta^f. \tag{5.33}$$

An dieser Stelle sei bemerkt, dass aus $S_{33}(X_1, X_2, -\frac{h}{2}) = \sigma_{33}(X_1, X_2, -\frac{h}{2}) = -p(X_1, X_2)$ gemäß (4.68) wegen (5.22) sofort auch

$$p = O\left(h^4\right) \tag{5.34}$$

folgt.

Schließlich multiplizieren wir die linke Gleichung von (5.28) zunächst mit X_3 und integrieren erst danach über die Plattendicke. Es folgt unter erneuter Berücksichtigung der Spannungsrandbedingungen (4.66) bei Verwendung der Definitionen (5.31) und (5.30) die Beziehung

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_\beta} = Q_\alpha \quad \forall \ (X_1, X_2) \in \omega. \tag{5.35}$$

Durch Einsetzen von (5.32) und (5.35) in (5.33) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \frac{\partial^2 W}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} N_{\alpha\beta} = -p \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega \setminus \Theta^f. \tag{5.36}$$

Die drei Gleichungen (5.32) und (5.36) bilden zusammen das partielle Differentialgleichungssystem der *von Kármán*'schen Plattentheorie. In diesem System tauchen die Querkräfte Q_α nicht mehr explizit auf. Die Gleichungen (5.32) werden Membrangleichungen oder Scheibengleichungen und die Gleichung (5.36) wird Biegegleichung oder Plattengleichung der *von Kármán*'schen Plattentheorie genannt. Um alle Schnittgrößen durch Ableitungen der Verschiebungsfelder U_α und W darzustellen, müssen wir noch das Materialgesetz in Schnittgrößen formulieren. Auf diese Weise entstehen aus den soeben abgeleiteten zweidimensionalen Differentialgleichungen explizite Feldgleichungen für das gesuchte Verschiebungsfeld.

5.3.4 Formulierung des Materialgesetzes in Schnittgrößen

Der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verschiebungsfeldern lässt sich durch Einsetzen des zweidimensionalen *Saint-Venant – Kirchhoff*'schen Gesetzes (5.25) in die Definitionen (5.29) und (5.30) finden. Die zur Ausführung der Integrationen benötigte explizite X_3-Abhängigkeit der Verzerrungen entnehmen wir den Darstellungen (5.14). Zunächst folgt

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} G_{\alpha\beta}(X_1, X_2, X_3)\mathrm{d}X_3 = hG_{\alpha\beta}(X_1, X_2, 0)$$

$$= \frac{h}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha(X_1, X_2)}{\partial X_\beta} + \frac{\partial U_\beta(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial W(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha}\frac{\partial W(X_1, X_2)}{\partial X_\beta}\right) \tag{5.37}$$

sowie

$$\int\limits_{-h/2}^{h/3} G_{\alpha\beta}(X_1, X_2, X_3)X_3\mathrm{d}X_3 = -\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 W(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}, \tag{5.38}$$

so dass schließlich

$$N_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = hc^P_{\alpha\beta\gamma\epsilon}G_{\gamma\epsilon}(X_1, X_2, 0) \quad \text{und} \tag{5.39}$$

$$M_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -\frac{h^3}{12}c^P_{\alpha\beta\gamma\epsilon}\frac{\partial^2 W(X_1, X_2)}{\partial X_\gamma \partial X_\epsilon} \tag{5.40}$$

folgt. Für kubische Symmetrie in der $\langle 100\rangle$-Orientierung lauten die beiden letzten Gleichungen unter Verwendung von $G^0_{\gamma\epsilon}(X_1, X_2) := G_{\gamma\epsilon}(X_1, X_2, 0)$

$$N_{\alpha\beta} = h\left(\lambda\frac{2\mu + \mu'}{2\mu + \mu' + \lambda}G^0_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu G^0_{\alpha\beta} + \mu'\delta_{\alpha\beta}G^0_{\underline{\beta\beta}}\right) \quad \text{und} \tag{5.41}$$

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{h^3}{12}\left(\lambda\frac{2\mu + \mu'}{2\mu + \mu' + \lambda}\frac{\partial^2 W}{\partial X_\gamma \partial X_\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\frac{\partial^2 W}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \mu'\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 W}{\partial X_{\underline{\beta}}\partial X_{\underline{\beta}}}\right). \tag{5.42}$$

5.3.5 Das System der *von Kármán*'schen Gleichungen

Die drei Gleichungen (5.32) und (5.36) bilden zusammen mit den Materialgleichungen (5.41) und (5.42) und für gegebene äußere Flächenlasten $p(X_1, X_2)$ ein Feldgleichungssystem für die unbekannten Mittelflächenverschiebungen $U_\alpha(X_1, X_2)$ und $W(X_1, X_2)$:

$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}\Big(\boldsymbol{U}(X_1, X_2), W(X_1, X_2)\Big)}{\partial X_\beta} = 0 \quad \forall\ (X_1, X_2) \in \omega, \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}\Big(W(X_1, X_2)\Big)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \frac{\partial^2 W(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} N_{\alpha\beta}\Big(\boldsymbol{U}(X_1, X_2), W(X_1, X_2)\Big) \\ &\qquad = -p(X_1, X_2) \quad \forall\ (X_1, X_2) \in \omega \setminus \Theta^f. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Sie beschreiben zusammen mit den Randbedingungen das vollständige System der *von Kármán*'schen Gleichungen.

Die äußere Flächenlast $p(X_1, X_2)$ wird nach der Theorie der *Hertz*'schen Pressung berechnet. Ihre Berechnung erfolgt im Kapitel 6 unabhängig von der Plattentheorie. Wenn auch die bisher noch nicht in das 2D-Problem eingearbeiteten Randbedingungen auf der Mantelfläche gemäß (4.62) bis (4.65) in ihre zweidimensionalen Entsprechungen überführt werden, ist das vollständige System der *von Kármán*'schen Plattentheorie bekannt, so dass es später in schwacher Formulierung mittels Finiter Elemente numerisch gelöst werden kann.

5.3.6 Die Rand- und Übergangsbedingungen in der 2D-Formulierung

Der Übergang zur 2D-Formulierung wird dadurch erreicht, dass die Randspannungen auf der Mantelfläche, wie sie für das 3D-Problem aufgestellt wurden, entsprechend der Annahme *iv*) auf Seite 51 nur noch statisch äquivalent erfüllt sein müssen. Auf dem Rand liegen die fünf Schnittgrößen N^{nn}, N^{sn}, M^{nn}, M^{sn} und Q^n vor, wobei wir die Notation analog zu den Formeln (4.41) und (4.42) verwenden, d. h.

$$\begin{aligned} &N^{nn} := N_{\alpha\beta} n^R_\alpha n^R_\beta,\ N^{sn} := N_{\alpha\beta} s^R_\alpha n^R_\beta,\ M^{nn} := M_{\alpha\beta} n^R_\alpha n^R_\beta, \\ &\qquad\qquad M^{sn} := M_{\alpha\beta} s^R_\alpha n^R_\beta \quad \text{und} \quad Q^n = Q_\alpha n^R_\alpha. \end{aligned}$$

Die Normalen- und Tangentenvektoren auf der Mantelfläche wurden bereits im Abschnitt 4.3.5 auf Seite 47 eingeführt. Dort ist $\boldsymbol{n}^R = (n^R_1, n^R_2, 0)$ der Vektor der äußeren Flächennormalen in der Bezugsplatzierung und $\boldsymbol{s}^R = (-n^R_2, n^R_1, 0)$ der normierte Tangentenvektor senkrecht zur Zylinderachse.

Die Vorgabe von 5 Randbedingungen auf dem Plattenrand führt jedoch zu einem überbestimmten System. Die Überbestimmtheit können wir an Folgendem erkennen. Nach dem Einsetzen der Materialgleichungen (5.41) und (5.36) in Gleichungen (5.32) erhalten wir zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dadurch können wir für jede dieser beiden Gleichungen je eine Randbedingung vorgeben. Das Einsetzen der Materialgleichungen in (5.32) liefert eine Differentialgleichung vierter Ordnung, die mit den ersten beiden gekoppelt ist. Für diese Gleichung können wir pro Rand zwei Randbedingungen vorgeben. Damit lassen sich insgesamt nur vier Randbedingungen angeben.

Das Problem lässt sich dadurch lösen, dass die Randquerkraft Q^n und das Randverdrillungsmoment M^{sn} in passender Weise zu einer Ersatzquerkraft $\overline{Q}^n$ zusammengefasst wird.

Damit lauten die unmittelbar aus den 3D-Randbedingungen (4.62) bis (4.65) resultierenden 2D-Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
N^{nn} &= 0 \quad \forall (X_1, X_2) \in \partial\omega, && (5.45)\\
N^{sn} &= 0 \quad \forall (X_1, X_2) \in \partial\omega \quad \text{mit} \quad (X_1, X_2) \neq (R^A, 0), &&\\
& \qquad\qquad (X_1, X_2) \neq (0, R^A),\ (X_1, X_2) \neq (-R^A, 0), && (5.46)\\
M^{nn} &= 0 \quad \forall (X_1, X_2) \in \partial\omega, && (5.47)\\
\text{und} & &&\\
U_\alpha s^R_\alpha &= 0, \quad \text{falls} \quad (X_1, X_2) = (R^A, 0),\ (X_1, X_2) = (0, R^A) &&\\
& \qquad\qquad \text{oder} \quad (X_1, X_2) = (-R^A, 0), && (5.48)
\end{aligned}$$

wobei die Einzelpunkte $(R^A, 0)$, $(0, R^A)$ und $(-R^A, 0)$ die Orte der Starrkörperfesseln beschreiben.

Die Vorschrift für die auf dieser Seite erwähnte Ersatzquerkraft auf $\partial\omega$ lautet:

$$\overline{Q}^n := Q^n + \frac{\partial M^{ns}}{\partial s} + N^{nn}\frac{\partial W}{\partial n} + N^{ns}\frac{\partial W}{\partial s}, \tag{5.49}$$

wobei s die krummlinige Koordinate entlang des Kreisrandes $\partial\omega$ ist und n normal zu dieser Linie, d. h. in radialer Richtung verläuft.

Dabei resultiert diese Vorschrift unmittelbar aus der schwachen Formulierung der *von Kármán*'schen Plattengleichungen[4]. Da die Mantelfläche im 3D-Problem in tangentialer und normaler Richtung spannungsfrei ist, folgt die Bedingung

$$\overline{Q}^n = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\omega. \tag{5.50}$$

Diese zum ursprünglichen 3D-Problem statisch äquivalente Bedingung ist eine schwächere Forderung als diejenige, die sich durch integrale Mittelung des 3D-Problems ergibt. In den Punkten auf $\partial\omega$, die keine Fesselpunkte sind,

---

[4] Siehe Anhang, Abschnitt B.1.2 auf Seite 206.

wird statt dem einzelnen Verschwinden von Q^n, M^{sn}, N^{nn} und N^{sn}, unter Beachtung von $M^{sn} = M^{ns}$ und $N^{sn} = N^{ns}$, die abgeschwächte Forderung nach dem Verschwinden von N^{nn}, N^{ns} und $Q^n + \frac{\partial M^{ns}}{\partial s}$ gestellt. In den Fesselpunkten wird hingegen das Verschwinden von N^{nn} und $Q^n + \frac{\partial M^{ns}}{\partial s} + N^{ns}\frac{\partial W}{\partial s}$ gefordert, da N^{sn} dort nicht vorgegeben ist.

Bemerkung

> *Kirchhoff* gelang im Jahre 1850 als Erstem, zu der damals schon über 40 Jahre richtig aufgestellten linearen Plattengleichung, ein vollständiges System von Spannungsrandbedingungen aufzustellen [63]. Die Theorie trägt deshalb noch heute seinen Namen. Auch er fand den Ausdruck für die Ersatzquerkraft durch eine schwache Formulierung. Eine anschauliche Deutung dieser Randbedingung erhält man dadurch, wenn man gemäß einem Vorschlag von *Tompson* und *Tait* [103] das Verdrillungsmoment M^{ns} in jedem Randpunkt durch ein statisch äquivalentes Kräftepaar in einer infinitesimalen Umgebung dieses Punktes ersetzt. Siehe hierzu auch die Ausführungen von *Girkmann* in [50].

Aus der Verschiebungsrandbedingung am Stützring (4.55) wird unter Verwendung von (4.57) jetzt die Übergangsbedingung

$$W = 0 \quad \text{auf} \quad \Theta^f. \tag{5.51}$$

Wegen $|u_\alpha| \ll h \ll 2R_I$ gemäß Forderung (5.7) lässt sich die Kurve Θ^f auch durch die Kurve Θ approximieren, die nicht mehr von U_α abhängt, so dass wir zu der Übergangsbedingung

$$W = 0 \quad \text{auf} \quad \Theta \tag{5.52}$$

mit

$$\Theta = \{(X_1, X_2) | X_1^2 + X_2^2 = R_I^2\} \in \omega. \tag{5.53}$$

gelangen.

Mit dieser Vereinfachung schreiben wir nun statt der 3D-Randbedingung (4.67) die Bedingung

$$S_{33} = \sigma_{33} = 0 \quad \forall \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^+ \setminus \Sigma^R \tag{5.54}$$

unter Verwendung der Definition (4.53) für Σ^R. Den Gültigkeitsbereich der Plattengleichung (5.36) ersetzen wir jetzt entsprechend durch

$$\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \frac{\partial^2 W}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} N_{\alpha\beta} = -p \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega \setminus \Theta. \tag{5.55}$$

Mit diesem vollständigen Satz Randbedingungen können nun die Verschiebungsfelder U_α und W eindeutig bestimmt werden. Die Berechnung der gesuchten Spannungen kann in einem nachgeschalteten Prozess erfolgen. Die einzelnen Schritte dahin werden im nächsten Abschnitt erläutert.

5.3.7 Spannungsberechnung mit der *von Kármán*'schen Plattentheorie

Mit den bekannten Verschiebungsfeldern U_α und W sind zugleich auch die Schnittgrößenfelder $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ und Q_α bekannt. Bei ausreichender Glattheit lassen sich auch die Ableitungen der Schnittgrößen nach X_1 und X_2 berechnen.

Zur Spannungsberechnung zerlegen wir in der zweidimensionalen Materialgleichung (5.26) den *Green*'schen Verzerrungstensor additiv in seinen von X_3 unabhängigen Anteil und den von X_3 abhängigen Anteil $-X_3\frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}$. Den unabhängigen Anteil können wir unter Verwendung der überintegrierten Version (5.41) von (5.26) durch die Schnittkräfte $N_{\alpha\beta}$ ausdrücken. Die Krümmungen $\frac{\partial^2 W}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}$ können wir unter Zuhilfenahme von (5.42) durch die Schnittmomente $M_{\alpha\beta}$ ausdrücken. Damit erhalten wir die Beziehung

$$\sigma_{\alpha\beta}(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{h} N_{\alpha\beta}(X_1, X_2) + \frac{12X_3}{h^3} M_{\alpha\beta}(X_1, X_2). \qquad (5.56)$$

Dabei werden die von X_3 unabhängigen Anteile der Spannungen Membran- oder Scheibenspannungen genannt, da sie ausschließlich auf der Verzerrung der Mittelfläche und aller parallel zu ihr verlaufenden Flächen beruhen. Der von X_3 abhängige Anteil wird Biege- oder Plattenspannung genannt, da er ausschließlich aus der Krümmung, sprich der Biegung, der Mittelfläche herrührt, so dass zur Mittelfläche parallel verlaufende Flächen je nach Vorzeichen von X_3 gestreckt oder gestaucht werden. Würde man das hier vorliegende Problem mit der vollständig linearisierten Theorie behandeln, würde nur der Biegeanteil auftreten und es läge eine *Kirchhoff*'sche Plattenbiegung vor.

Sind die Spannungen $\sigma_{\alpha\beta}$ bekannt, lassen sich die übrigen Spannungen durch Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen (5.28) und der Spannungsrandbedingungen auf der oberen und unteren Deckfläche $\partial\Omega^-$ und $\partial\Omega^+$ gewinnen. Wir erhalten

$$\frac{1}{h}\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial X_\beta} + \frac{12X_3}{h^3}\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_\beta} + \frac{\partial \sigma_{\alpha 3}}{\partial X_3} = 0 \qquad (5.57)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial X_\beta}\left(\sigma_{3\beta} + \frac{\partial W}{\partial X_\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\right) + \frac{\partial S_{33}}{\partial X_3} = 0. \qquad (5.58)$$

Aus (5.57) folgt mit der Randbedingung (4.66)

$$\sigma_{\alpha 3}(X_1, X_2, X_3) = \frac{6}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - X_3^2\right)\frac{\partial M_{\alpha\beta}(X_1, X_2)}{\partial X_\beta}. \qquad (5.59)$$

Damit ergibt sich aus (5.58) die Differentialgleichung

$$\frac{6}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-X_3^2\right)\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}+\frac{\partial^2 W}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\frac{1}{h}N_{\alpha\beta}+\frac{12X_3}{h^3}M_{\alpha\beta}\right) \\ +\frac{12X_3}{h^3}\frac{\partial W}{\partial X_\alpha}\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_\beta}+\frac{\partial S_{33}}{\partial X_3}=0.$$

Nach Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} &S_{33}(X_1,X_2,X_3)\\ &\quad= -\frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}X_3\left(\frac{1}{h}N_{\alpha\beta}(X_1,X_2)+\frac{6X_3}{h^3}M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\right)\\ &\qquad - X_3\frac{6}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{1}{3}X_3^2\right)\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\\ &\qquad - \frac{6X_3^2}{h^3}\frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha}\frac{\partial M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}+C(X_1,X_2), \end{aligned}$$

woraus schließlich mit $\sigma_{33}=S_{33}-\frac{\partial W}{\partial X_\alpha}\sigma_{\alpha 3}$ der Zusammenhang

$$\begin{aligned} &\sigma_{33}(X_1,X_2,X_3)\\ &\quad= -\frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}X_3\left(\frac{1}{h}N_{\alpha\beta}(X_1,X_2)+\frac{6X_3}{h^3}M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\right)\\ &\qquad - X_3\frac{6}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{1}{3}X_3^2\right)\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\\ &\qquad - \frac{3}{2h}\frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha}\frac{\partial M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}+C(X_1,X_2) \end{aligned}$$

folgt. Mit Hilfe der Biegegleichung (5.55) lässt sich $\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}$ eliminieren, so dass für alle $\boldsymbol{X}\in\Omega^R$ mit $(X_1,X_2)\notin\Theta$

$$\begin{aligned} &\sigma_{33}(X_1,X_2,X_3)\\ &\quad= \left(\left(\frac{h^2}{4}-X_3^2\right)N_{\alpha\beta}(X_1,X_2)-3X_3M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\right)\frac{2X_3}{h^3}\frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\\ &\qquad - \frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha}\frac{3}{2h}\frac{\partial M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}+\frac{2X_3}{h^3}\left(\frac{3h^2}{4}-X_3^2\right)p(X_1,X_2)\\ &\qquad + C(X_1,X_2) \end{aligned}$$

verbleibt. Zur Bestimmung der Funktion $C(X_1,X_2)$ werten wir die Randbedingungen (4.68) und (5.54) aus, woraus schließlich mit $C(X_1,X_2)=$

$\frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha}\frac{3}{2h}\frac{\partial M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta} - \frac{p(X_1,X_2)}{2} + \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{3}{2h}M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)$ die Formel

$$\begin{aligned}
&\sigma_{33}(X_1,X_2,X_3)\\
&\quad= \left(\frac{h^2}{4} - X_3^2\right)\frac{2}{h^3}\Big(X_3 N_{\alpha\beta}(X_1,X_2) + 3M_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\Big)\frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\\
&\qquad\qquad + \left(\frac{2X_3}{h^3}\left(\frac{3h^2}{4} - X_3^2\right) - \frac{1}{2}\right)p(X_1,X_2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \boldsymbol{X} \in \Omega^R \setminus (\Theta \times [-h/2, h/2]) \qquad (5.60)
\end{aligned}$$

resultiert. Damit haben wir nun das gesamte Spannungsfeld durch die Unbekannten U_α und W ausgedrückt. Die Berechnung von U_α und W erfolgt mit Hilfe der im Kapitel 7 beschriebenen Finite-Element-Methode auf numerischem Wege.

Durch konsequente Ausnutzung der Materialsymmetrie lässt sich das Rechengebiet auf ein Achtelkreis reduzieren. Dies spart bei Finite-Element-Rechnungen Rechenzeit und Speicherplatz. Im Falle von isotropen Materialverhalten kann das Rechengebiet sogar auf eine Linie reduziert werden. Beide Vereinfachungen werden im Anhang B.3 näher beschrieben.

5.4 Rechtfertigung der *von Kármán*'schen Plattentheorie durch asymptotische Entwicklung des 3D-Problems

2D-Plattentheorien unterscheiden sich vom originalen 3D-Problem durch bestimmte Einschränkungen der Kinematik und durch die konstitutiven Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen. Diese resultieren nach der klassischen Herleitung aus bestimmtem Annahmen, die letztlich nur durch empirische Argumente zu rechtfertigen sind. Für den Fall, dass die Plattendicke viel kleiner als die übrigen Abmessungen ist, wird jedoch die Verwendung einer 2D-Theorie gegenüber einer 3D-Theorie bevorzugt. Als Gründe für dieses Vorgehen können zum einen die einfachere mathematische Struktur und zum anderen der geringere numerische Aufwand der 2D-Theorien genannt werden. Gerade mit der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie kann der praktische Ingenieur für Dimensionierungsaufgaben auf analytische Lösungen zahlreicher Standardbeispiele zurückgreifen, die in den letzten 150 Jahren gefunden wurden. Zur Lösung des *von Kármán*'schen Plattenproblems stehen bis heute nur für einige wenige Beispiele analytische Lösungen zur Verfügung. Vor allem im Schiffs- und Flugzeugbau zur Dimensionierung von Beplankungen aber auch auf dem Gebiet der Feinmechanik wurden deshalb in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts verschiedene Näherungsmethoden entwickelt, die auf der Formulierung zusätzlicher Annahmen, welche über die der *von*

Kármán'sche Theorie hinausgehen. Heute werden hingegen hauptsächlich Finite-Element-Näherungen der *von Kármán*-Probleme verwendet.

Ziel der formal asymptotischen Entwicklung des nichtlinearen 3D-Problems ist es, durch Ermittlung der resultierenden Differentialgleichungen der führenden Terme die a-priori-Annahmen der klassischen Herleitung in rationaler Weise zu rechtfertigen. Außerdem wollen wir die bereits mit der klassischen Herleitung gefundenen Genauigkeitsaussagen (5.18) bis (5.22) und (5.34) bestätigen.

In dieser Arbeit führen wir in den folgenden Abschnitten die Herleitung durch die asymptotische Entwicklung der Verschiebungen für das Problem der auf einer Linie gestützten, horizontal frei abgleitbaren, kubisch anisotropen Platte vor, wobei auf den Deckflächen normale aber keine tangentialen *Piola-Kirchhoff*-Spannungen 2. Art anliegen. Dabei gehen wir in vier Schritten vor.

Als erstes transformieren wir die schwache Formulierung des 3D-Problems in ein Koordinatensystem, in dem die Platte unabhängig von h die dimensionslose Dicke 1 hat. Wir nennen dieses Koordinatensystem das skalierte Koordinatensystem. Als zweites bestimmen wir die führenden Terme der asymptotisch entwickelten Verschiebungen mit Hilfe von Testfunktionen, die im skalierten System nicht explizit von h abhängen. Es ergibt sich, dass die führenden Terme der Verschiebungen ein *Kirchhoff-Love*'sches Verschiebungsfeld bilden. In einem dritten Schritt skalieren wir die Verschiebungen so um, dass die im zweiten Schritt bestimmten führenden Terme nicht mehr explizit von h abhängen. Die gleiche Skalierungsvorschrift wenden wir auch auf die Testfunktionen an. Wir zeigen nun, dass wenn die zulässigen skalierten Testfunktionen auf die Menge der *Kirchhoff-Love*'schen Verschiebungsfelder beschränkt werden, die resultierende schwache Formulierung für den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ mit der schwachen Formulierung des in skalierten Größen im skalierten System dargestellten *von Kármán*'schen Plattenproblems übereinstimmt. Im letzten Schritt transformieren wir die so für $h \rightarrow 0$ gewonnene schwache Formulierung in das ursprüngliche Koordinatensystem zurück. In diesem System ist das aus der schwachen Formulierung resultierende Randwertproblem identisch mit dem durch die klassische Herleitung gewonnenen *von Kármán*'schen Plattenproblem.

5.4.1 Übergang zum skalierten 3D-Problem

Ausgangspunkt ist die schwache Formulierung des 3D-Problems gemäß der im Anhang auf Seite 203 angegebenen Formel (A.40). Die dortige Formel können wir ohne weitere Abänderungen als eine Gleichung von dimensionslosen Größen interpretieren.

Wir betrachten die dimensionslose Dicke h jetzt als Kleinheitsparameter, so dass die Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ und die Randlasten p nicht nur von den

Koordinaten X_i, sondern auch vom Parameter h abhängen. Wir schreiben

$$u_i(X_1, X_2, X_3) = \overset{h}{u}_i(h; X_1, X_2, X_3), \tag{5.61}$$

$$p(X_1, X_2) = \overset{h}{p}(h; X_1, X_2). \tag{5.62}$$

Außerdem nehmen wir die elastischen Konstanten als unabhängig vom Kleinheitsparameter h an.

Die Abhängigkeit der Randlast $\overset{h}{p}$ von h ergibt sich aus der formalen Abhängigkeit der Verschiebungen $\overset{h}{u}_i$ von h, da die Spannungen über das 3D-Materialgesetz von den Verschiebungsgradienten abhängen und die 33-Komponente der 2. *Piola-Kirchhoff*-Spannung auf der oberen Deckfläche mit der Größe $-p$ übereinstimmt.

Hat die Platte für das in (A.40) verwendete Koordinatensystem die dimensionslose Dicke h, gehen wir jetzt auf ein Koordinatensystem über, für das die Platte unabhängig von h die Dicke 1 hat. Der dimensionslose Plattendurchmesser bleibt unverändert. Wir bezeichnen dieses Koordinatensystem als skaliertes Koordinatensystem und seine kartesischen Koordinaten mit $\overset{s}{X}_i$. Der Wafer nimmt in der Bezugsplatzierung im skalierten System den Bereich

$$\overline{\Omega}^s := \omega \times [-1/2, 1/2] \tag{5.63}$$

ein. Zwischen den ursprünglichen Koordinaten und den Koordinaten im skalierten System besteht der folgende Zusammenhang:

$$X_\alpha = \overset{s}{X}_\alpha \quad \text{und} \quad X_3 = h\overset{s}{X}_3. \tag{5.64}$$

Im skalierten System sollen die Koordinaten $\overset{s}{X}_i$ unabhängig von h sein. Für die dimensionslosen Verschiebungen gilt in beiden Koordinatensystemen der Zusammenhang

$$\overset{h}{u}_i(h; X_1, X_2, X_3) = \overset{h}{u}_i\left(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, h\overset{s}{X}_3\right) = \overset{s}{u}_i\left(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, \overset{s}{X}_3\right), \tag{5.65}$$

und wir nennen $\overset{s}{u}_i$ die auf das skalierte System transformierten Verschiebungen.

Genauso lassen sich nun auch auf das skalierte System transformierte Testfunktionen einführen:

$$\overset{h}{v}_i(h; X_1, X_2, X_3) = \overset{h}{v}_i\left(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, h\overset{s}{X}_3\right) = \overset{s}{v}_i\left(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, \overset{s}{X}_3\right). \tag{5.66}$$

In gleicher Weise führen wir auch die auf das skalierte System transformierte Randlast ein:

$$\overset{h}{p}(h; X_1, X_2) = \overset{s}{p}\left(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2\right). \tag{5.67}$$

Außerdem schreiben wir mit (4.14) auch

$$G_{ij}(\boldsymbol{X}) = \overset{h}{G}_{ij}(h;\boldsymbol{X}) = \overset{s}{G}_{ij}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) = \overset{h}{\boldsymbol{G}}(h;\boldsymbol{X}) = \overset{s}{\boldsymbol{G}}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \tag{5.68}$$

und mit (4.31) auch

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{X}) = \overset{h}{\sigma}_{ij}(h;\boldsymbol{X}) = \overset{s}{\sigma}_{ij}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}) = \overset{h}{\boldsymbol{\sigma}}(h;\boldsymbol{X}) = \overset{s}{\boldsymbol{\sigma}}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}). \tag{5.69}$$

Aus *I*) und *II*) folgt, dass die transformierte Randlast $\overset{s}{p}$ die folgende Gestalt hat:

$$\overset{s}{p}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) = h^Q \overset{(Q)}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) \tag{5.70}$$

$$\text{mit} \quad Q \in \mathbb{G}, \ Q \text{ fest}, \ \overset{(Q)}{p} \text{ unabhängig von } h.$$

Außerdem folgt aus beiden Annahmen für die transformierten Verschiebungen $\overset{s}{u}$:

$$\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = \sum_{A=M}^{N} h^A \overset{(A)}{u_i}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) + \mathrm{O}(h^{N+1}) \tag{5.71}$$

$$\text{mit} \quad M,N \in \mathbb{G}, \qquad M \text{ ist fest}, \quad N > M.$$

Die Größe $\overset{(F_i)}{u_i}$, für die $\overset{(F_i)}{u_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \neq 0$ mit $\overset{s}{\boldsymbol{X}} \in \overline{\Omega}^s$ und $\overset{(I)}{u_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = 0$ für $I < F_i$ gilt, nennen wir führenden Term von $\overset{s}{u}_i$.

Mit der Annahme *VI*) erhalten erhalten wir als asymptotische Entwicklung der Verschiebungsrandbedingung (4.55)

$$\begin{aligned}
0 &= \overset{s}{u}_3(h;\overset{s}{Z}_1(h),\overset{s}{Z}_2(h),1/2) \\
&= \overset{s}{u}_3(h;\overset{(0)}{Z_1},\overset{(0)}{Z_2},1/2) + h\,\overset{(1)}{Z_\alpha} \left.\frac{\partial\,\overset{s}{u}_3(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,1/2)}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}\right|_{(\overset{s}{X}_1=\overset{(0)}{Z_1},\overset{s}{X}_2=\overset{(0)}{Z_2})} \\
&\quad +\mathrm{O}(h^{M+2}) \\
&= h^M \overset{(M)}{u_3}(\overset{(0)}{Z_1},\overset{(0)}{Z_2},1/2) \\
&\quad +h^{M+1}\left(\overset{(M+1)}{u_3}(\overset{(0)}{Z_1},\overset{(0)}{Z_2},\frac{1}{2}) + \overset{(1)}{Z_\alpha} \left.\frac{\partial\,\overset{(M)}{u_3}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,1/2)}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}\right|_{(\overset{s}{X}_1=\overset{(0)}{Z_1},\overset{s}{X}_2=\overset{(0)}{Z_2})}\right) \\
&\quad +\mathrm{O}(h^{M+2})
\end{aligned} \tag{5.72}$$

mit

$$\begin{aligned} R_I^2 = & \left(\overset{s}{Z}_\alpha(h) + \overset{s}{u}_\alpha(h; \overset{s}{Z}_1(h), \overset{s}{Z}_2(h), 1/2)\right) \\ & \qquad \left(\overset{s}{Z}_\alpha(h) + \overset{s}{u}_\alpha(h; \overset{s}{Z}_1(h), \overset{s}{Z}_2(h), 1/2)\right) \\ = & \Bigg(h^M \overset{(M)}{u_\alpha}(\overset{(0)}{Z_1}, \overset{(0)}{Z_2}, 1/2) + h^{M+1} \overset{(M+1)}{u_\alpha}(\overset{(0)}{Z_1}, \overset{(0)}{Z_2}, 1/2) \\ & + h^{M+1} \overset{(1)}{Z_\beta} \left. \frac{\partial \overset{(M)}{u_\alpha}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, 1/2)}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right|_{(\overset{s}{X}_1 = \overset{(0)}{Z_1}, \overset{s}{X}_2 = \overset{(0)}{Z_2})} \\ & + \overset{(0)}{Z_\alpha} + h \overset{(1)}{Z_\alpha} + \mathrm{O}(h^2(1+h^M)) \Bigg) \\ & \Bigg(h^M \overset{(M)}{u_\alpha}(\overset{(0)}{Z_1}, \overset{(0)}{Z_2}, 1/2) + h^{M+1} \overset{(M+1)}{u_\alpha}(\overset{(0)}{Z_1}, \overset{(0)}{Z_2}, 1/2) \\ & + h^{M+1} \overset{(1)}{Z_\beta} \left. \frac{\partial \overset{(M)}{u_\alpha}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, 1/2)}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right|_{(\overset{s}{X}_1 = \overset{(0)}{Z_1}, \overset{s}{X}_2 = \overset{(0)}{Z_2})} \\ & + \overset{(0)}{Z_\alpha} + h \overset{(1)}{Z_\alpha} + \mathrm{O}(h^2(1+h^M)) \Bigg). \end{aligned} \tag{5.73}$$

5.4.2 Definition der skalierten Größen

Ist $\overset{(F_i)}{u_i}$ der führende Term von $\overset{s}{u}_i$, dann nennen wir die Komponente

$$\overset{ss}{u}_i := h^{-F_i} \overset{s}{u}_i \tag{5.74}$$

skalierte Verschiebung in Richtung $\overset{s}{X}_i$. Dabei lassen wir ausdrücklich zu, dass die Horizontalverschiebungen $\overset{s}{u}_\alpha$ anders skaliert werden, als die Vertikalverschiebungen $\overset{s}{u}_3$.

Entsprechend können wir $\overset{(Q)}{p}$ in (5.70) als skalierte Randlast betrachten, wenn $\overset{(A)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) = 0$ für alle $A < Q \in \mathbb{G}$ bei festem Q gilt und $\overset{(Q)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \neq 0$ gilt. Wir nennen dann

$$\overset{ss}{p} := \overset{(Q)}{p} \quad \text{mit} \quad Q \in \mathbb{G} \tag{5.75}$$

skalierte Randlast.

Ziel des nächsten Abschnittes ist es, mit den Annahmen *I*) bis *VI*), die Skalierungsvorschriften für $\overset{s}{\boldsymbol{u}}$ und $\overset{s}{p}$ zu berechnen. Dabei wird sich zeigen, dass die Skalierungsvorschriften wie folgt lauten:

$$\overset{s}{u}_3 = h\,\overset{ss}{u}_3, \tag{5.76}$$

$$\overset{s}{u}_\alpha = h^2\,\overset{ss}{u}_\alpha \quad \text{und} \tag{5.77}$$

$$\overset{s}{p} = h^4\overset{ss}{p}. \tag{5.78}$$

Neben den transformierten Verschiebungen lassen sich gemäß (5.69) auch transformierte Verzerrungen und Spannungen einführen. Gehen wir im Materialgesetz (4.35) auf die transformierten Verschiebungen über, folgen aus deren asymptotischer Entwicklung die folgenden Beziehungen:

$$\overset{s}{\sigma}_{\alpha\beta}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \sum_{A=0}^{N} h^{2M-2+A}\ \overset{(2M-2+A)}{\sigma_{\alpha\beta}}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h^{2M-1+N}), \tag{5.79}$$

$$\overset{s}{\sigma}_{\alpha 3}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \sum_{A=0}^{N} h^{2M-1+A}\ \overset{(2M-1+A)}{\sigma_{\alpha 3}}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h^{2M+N}) \quad \text{und} \tag{5.80}$$

$$\overset{s}{\sigma}_{33}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \sum_{A=0}^{N} h^{2M-2+A}\ \overset{(2M-2+A)}{\sigma_{33}}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h^{2M-1+N}), \tag{5.81}$$

wobei M durch (5.71) festgelegt ist. Ein weiteres Ziel des nächsten Abschnitts ist es, die führenden Terme der transformierten Spannungen zu bestimmen, um daraus die Skalierungsvorschrift für die Spannungen zu ermitteln. Wir zeigen, dass sich die Skalierungsvorschriften

$$\overset{s}{\sigma}_{\alpha\beta} = h^2\,\overset{ss}{\sigma}_{\alpha\beta}, \tag{5.82}$$

$$\overset{s}{\sigma}_{\alpha 3} = h^3\,\overset{ss}{\sigma}_{\alpha 3} \quad \text{und} \tag{5.83}$$

$$\overset{s}{\sigma}_{33} = h^4\,\overset{ss}{\sigma}_{33} \tag{5.84}$$

ergeben.

Außerdem definieren wir unter Beachtung der Forderung *V*) die skalierten Testfunktionen

$$\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\mathbf{X}}) := h^{-F_i}\,\overset{s}{v}_i(h;\overset{s}{\mathbf{X}}). \tag{5.85}$$

5.4.3 Herleitung der Skalierungsvorschriften für die Verschiebungen und die Randlast

Da wir anfangs noch nichts über die führenden Terme der transformierten Verschiebungen wissen, nehmen wir zunächst in (5.71) $\overset{(M)}{u_i} \neq 0$ an. Dies ist unter Beachtung der Definition (5.74) gleichbedeutend zu $\overset{s}{u}_i = h^M\,\overset{ss}{u}_i$, d.h.

es gilt dann $F_i = M$. Dies bedeutet auch, dass alle Verschiebungskomponenten nach der gleichen Vorschrift skaliert werden. Folgen wir jetzt (5.85) ergibt sich für die Testfunktionen die Vorschrift $\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\mathbf{X}}) := h^{\bar{M}}\,\overset{s}{v}_i(h;\overset{s}{\mathbf{X}})$ mit $\bar{M} = M$. Da die Testfunktionen in jeder schwachen Formulierung nur linear vorkommen, können wir $\bar{M} = 0$ setzen, ohne dass sich die schwache Lösung ändert. Damit erhalten wir transformierte Testfunktionen, die unabhängig von h sind, so dass

$$\overset{s}{v}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) \tag{5.86}$$

gilt. Dies entspricht auch der Vorgehensweise von *Miara* in [76], wo die Skalierungsvorschrift für die isotrope, zum Teil fest eingespannte Platte berechnet wird.

Statt (A.40) schreiben wir für die schwache Formulierung zunächst

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega^R} \overset{h}{S}_{ij}\left(\overset{h}{\boldsymbol{u}}(h;\boldsymbol{X})\right)\frac{\partial \overset{h}{v}_i(h;\boldsymbol{X})}{\partial X_j}\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\mathrm{d}X_3\\ &\qquad = \iint\limits_{\omega} \overset{h\,-}{F}_{i3}(h;X_1,X_2)\;\overset{h}{p}(h;X_1,X_2)\;\overset{h\,-}{v_i}(h;X_1,X_2)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\text{mit}\quad \overset{h\,-}{F}_{i3}(h;X_1,X_2) := \delta_{i3} + \left.\frac{\partial \overset{h}{u}_i(h;X_1,X_2,X_3)}{\partial X_3}\right|_{X_3=-h/2}$$

$$\text{und}\quad \overset{h\,-}{v_i}(h;X_1,X_2) := \overset{h}{v}_i(h;X_1,X_2,X_3)|_{X_3=-h/2}.$$

Für die rechte Seite gilt unter Beachtung von (5.86) beim Übergang auf das skalierte System

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\omega} \overset{h\,-}{F}_{i3}(h;X_1,X_2)\;\overset{h}{p}(h;X_1,X_2)\;\overset{h\,-}{v_i}(h;X_1,X_2)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\\ &\quad = \iint\limits_{\omega}\left(\delta_{i3} + \frac{1}{h}\,\overset{s\,-}{u_i}{}_{,3}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\right)\overset{s}{p}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\;\overset{ss\,-}{v_i}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2\end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\text{mit}\quad \overset{s-}{u}_{i,3}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) := \left.\frac{\partial \overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3)}{\partial \overset{s}{X}_3}\right|_{\overset{s}{X}_3=-1/2}$$

$$\text{und}\quad \overset{ss-}{v_i}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) := \overset{ss}{v}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2\,\overset{s}{X}_3)|_{\overset{s}{X}_3=-1/2}\ .$$

Für die linke Seite gilt

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega^R} \overset{h}{S}_{ij}\left(\overset{h}{\boldsymbol{u}}(h;\boldsymbol{X})\right)\frac{\partial \overset{h}{v}_i(h;\boldsymbol{X})}{\partial X_j}\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\mathrm{d}X_3\\
&= \iiint\limits_{\Omega^s}\left(\sigma^s_{\beta\alpha}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})\left(\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}+\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\beta}\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}\right)h\right.\\
&\quad+\sigma^s_{\alpha3}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})\\
&\qquad\left(\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}h+\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}+\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}+\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\right)\\
&\quad\left.+\sigma^s_{33}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})\left(\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}+\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{1}{h}\right)\right)d\,\overset{s}{X}_1\,d\,\overset{s}{X}_2\,d\,\overset{s}{X}_3 \quad (5.89)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\sigma^s_{\alpha\beta} &= \left(\lambda\left(\frac{\partial\,\overset{s}{u}_\gamma}{\partial\,\overset{s}{X}_\gamma}+\frac{1}{2}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_\gamma}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_\gamma}\right)+\mu'\left(\frac{\partial\,\overset{s}{u}_{\underline{\alpha}}}{\partial\,\overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}}+\frac{1}{2}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}}\right)\right)\delta_{\alpha\beta}\\
&\quad+\mu\left(\frac{\partial\,\overset{s}{u}_\alpha}{\partial\,\overset{s}{X}_\beta}+\frac{\partial\,\overset{s}{u}_\beta}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}+\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_\beta}\right)+\lambda\left(\frac{\partial\,\overset{s}{u}_3}{\partial\,\overset{s}{X}_3}+\frac{1}{2}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{1}{h}\right)\frac{1}{h}\delta_{\alpha\beta},
\end{aligned}\quad (5.90)$$

$$\sigma^s_{\alpha3}=\mu\left(\frac{\partial\,\overset{s}{u}_3}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}+\left(\frac{\partial\,\overset{s}{u}_\alpha}{\partial\,\overset{s}{X}_3}+\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\right)\frac{1}{h}\right)\quad \text{und} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned}
\sigma^s_{33} &= \lambda\left(\frac{\partial\,\overset{s}{u}_\gamma}{\partial\,\overset{s}{X}_\gamma}+\frac{1}{2}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_\gamma}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_\gamma}\right)\\
&\qquad+\left(\lambda+2\mu+\mu'\right)\left(\frac{\partial\,\overset{s}{u}_3}{\partial\,\overset{s}{X}_3}+\frac{1}{2}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{\partial\,\overset{s}{u}_i}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{1}{h}\right)\frac{1}{h}. \quad (5.92)
\end{aligned}$$

Setzen wir (5.89) und (5.88) in (5.87) ein, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\omega} \left(\delta_{i3} + \frac{1}{h}\ \overset{s-}{u}_{i},_{3}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\right) \overset{s}{p}(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\ \overset{ss-}{v_i}\ (\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)d\,\overset{s}{X}_1\,d\,\overset{s}{X}_2 \\
&= \iiint\limits_{\Omega^s} \left(\sigma^s_{\beta\alpha}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial\,\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\beta}\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) h \right. \\
&\quad + \sigma^s_{\alpha 3}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \\
&\qquad \left(\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha} h + \frac{\partial\,\overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3} + \frac{\partial\,\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial\,\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3} \right) \\
&\quad \left. + \sigma^s_{33}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3} + \frac{\partial\,\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\frac{1}{h} \right) \right) d\,\overset{s}{X}_1\,d\,\overset{s}{X}_2\,d\,\overset{s}{X}_3 \qquad (5.93)
\end{aligned}
$$

Wird jetzt der Entwicklungsansatz (5.71) in (5.93) eingesetzt, tritt h auf der rechten Seite in den Potenzen $3M-3,\ 3M-1,\ 3M+1,\ 2M-2,\ 2M-1,\ 2M,\ 2M+1,\ M-1,\ M$ und $M+1$ auf. Für $M<3$ sind diese Potenzen verschieden. Wie wir im Folgenden sehen werden, genügt es zunächst nur $M<-1$ anzunehmen.

Wird außerdem (5.70) in (5.93) eingesetzt, ergeben sich auf der linken Seite die Potenzen Q und $Q+M-1$. Wir können jetzt diese Gleichung auswerten, indem wir untersuchen, für welche Werte von Q das Problem (5.93) unter den Annahmen *I*) bis *VI*) nichttriviale Lösungen für $h\to 0$ hat. Wir beginnen mit einem kleinsten, festen, zunächst noch unbestimmten Wert von Q und erhöhen diesen Wert jeweils um 1, wenn das Problem für $h\to 0$ nur triviale Lösungen hat. Für Q nehmen wir folgendes an:

Schritt 0: $Q<3M-3,\ M<-1,\ M$ fest, Q fest)

Als erstes multiplizieren wir (5.93) mit h^{-Q-M+1}. Vollziehen wir jetzt den Grenzübergang $h\to 0$, folgt:

$$\iint\limits_{\omega} \overset{(Q)}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\overset{(M)-}{u_{i},_{3}}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\overset{ss-}{v_i}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)d\,\overset{s}{X}_1\,d\,\overset{s}{X}_2 = 0$$

mit $\overset{(M)-}{u_{i},_{3}}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) := \left.\frac{\overset{(M)}{u_i}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3)}{\partial \overset{s}{X}_3}\right|_{\overset{s}{X}_3=-1/2}$. Dies kann nur für alle $\overset{ss-}{v_i}$ erfüllt werden, wenn

$$\overset{(Q)}{p}\ \overset{(M)-}{u_{i},_{3}} = 0 \quad \text{für} \quad Q<3M-3, M<-1 \qquad (5.94)$$

gilt. Anschließend multiplizieren wir (5.93) mit h^{-Q}, werten (5.94) aus und vollziehen wieder den Grenzübergang $h \to 0$. Es verbleibt

$$\iint\limits_{\omega} \overset{(Q)}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\,\overset{ss}{v}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2 = 0.$$

Dies kann nur erfüllt werden, falls

$$\overset{(Q)}{p} = 0 \quad \text{für} \quad Q < 3M-3, M < -1 \tag{5.95}$$

gilt. Wir schließen daraus, dass $Q > -10$ gelten muss.

Schritt 1: $Q = 3M-3,\ M < -1,\ M$ fest)

Wir multiplizieren (5.93) mit h^{-4M+4} und vollziehen den Grenzübergang $h \to 0$. Es verbleibt

$$\iint\limits_{\omega} \overset{(3M-3)}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\;\overset{(M)-}{u}_{i;3}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\;\overset{ss-}{v}_i(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\;d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2 = 0.$$

Dies kann nur für alle $\overset{ss-}{v}_i$ gelten, wenn

$$\overset{(3M-3)}{p}\;\overset{(M)-}{u}_{i;3} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.96}$$

gilt. Als nächstes multiplizieren (5.93) mit h^{-3M+3}, werten (5.96) aus und vollziehen den Grenzübergang $h \to 0$. Dann wählen wir alle $\overset{ss}{v}_i$, für die $\frac{\partial \overset{ss}{v}_i}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$ gilt. Es verbleibt

$$\iint\limits_{\omega} \overset{(3M-3)}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\;\overset{ss-}{v}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\;d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2 = 0.$$

Dies kann nur erfüllt werden, wenn

$$\overset{(3M-3)}{p} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.97}$$

gilt. Wir schließen daraus, dass $Q > -9$ gelten muss. Für alle zulässigen $\overset{ss}{v}_i$ verbleibt nun

$$\iiint\limits_{\Omega^s} \sigma_{33}^{(2M-2)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\;\frac{\partial \overset{(M)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3}\;\frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3}\;d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2\,d\overset{s}{X}_3 = 0,$$

mit $\sigma_{33}^{(2M-2)} = (\lambda+2\mu+\mu')\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{(M)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3}\frac{\partial \overset{(M)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3}$. Für die spezielle Wahl $\overset{ss}{v}_i = \overset{(M)}{u}_i$ folgt

$$(\lambda + 2\mu + \mu') \iiint\limits_{\Omega^s} \left(\frac{\partial \overset{(M)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{(M)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right)^2 d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2\, d\overset{s}{X}_3 = 0,$$

was auf

$$\frac{\partial \overset{(M)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overset{(M)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{(M)}{U}_i(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.98}$$

führt.

Schritt 2: $Q = 3M + K,\ M < -1,\ K \in \{-2, -1\})$

Wir wählen erst $K = -2$, vollziehen die gleiche Prozedur wie für Schritt 0 auf Seite 74 und wiederholen sie anschließend für $K = -1$. Nach Multiplikation von (5.93) mit h^{-4M-K}, Auswertung von (5.98) und Grenzübergang $h \to 0$, folgt entsprechend

$$\overset{(3M+K)}{p}\ \overset{(M+1)-}{u}_{i,3} = 0 \quad \text{für} \quad K \in \{-2, -1\},\ M < -1. \tag{5.99}$$

Multiplizieren wir (5.93) mit h^{-3M-K}, werten (5.98) und (5.99) aus und vollziehen den Grenzübergang $h \to 0$, folgt wieder

$$\overset{(3M+K)}{p} = 0 \quad \text{für} \quad K \in \{-2, -1\},\ M < -1. \tag{5.100}$$

Wir schließen daraus, dass $Q > -7$ gelten muss.

Schritt 3: $Q = 3M,\ M < -1,\ M$ fest)

Wir multiplizieren (5.93) mit h^{-4M} und werten (5.98) aus. Vollziehen wir jetzt den Grenzübergang $h \to 0$, dann verbleibt

$$\iint\limits_{\omega} \overset{(3M)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\ \overset{(M+1)-}{u}_{i,3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\ \overset{ss-}{v}_i(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\, d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2 = 0,$$

woraus

$$\overset{(3M)}{p}\ \overset{(M+1)-}{u}_{i,3} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.101}$$

folgt. Jetzt multiplizieren wir (5.93) mit h^{-3M}, werten (5.98) und (5.101) aus und vollziehen den Grenzübergang $h \to 0$. Wählen wir dann zunächst alle zulässigen Testfunktionen $\overset{ss}{v}_i$, für die $\frac{\partial \overset{ss}{v}_i}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$ gilt, verbleibt

$$\iint\limits_{\omega} \overset{(3M)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\ \overset{ss-}{v_3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\ d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2 = 0.$$

Dies kann nur erfüllt werden, wenn

$$\overset{(3M)}{p} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.102}$$

gilt. Wir schließen daraus, dass $Q > -6$ gelten muss. Testen wir nun mit allen zulässigen $\overset{ss}{v}_i$, verbleibt

$$\iiint\limits_{\Omega^s} \left(\sigma_{33}^{(2M)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\ \frac{\partial \overset{(M+1)}{u_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \sigma_{\alpha 3}^{(2M)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\ \frac{\partial \overset{(M)}{u_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2\, d\overset{s}{X}_3 = 0,$$

mit $\sigma_{33}^{(2M)} = \frac{1}{2}\left(\left(\lambda + 2\mu + \mu'\right) \frac{\partial \overset{(M+1)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{(M+1)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_3} + \lambda \frac{\partial \overset{(M)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(M)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right)$ und $\sigma_{\alpha 3}^{(2M)} = \mu \frac{\partial \overset{(M)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(M+1)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_3}$. Für $\overset{ss}{v}_i = \overset{(M+1)}{u_i}$ folgt aus

$$\frac{1}{2}\left(\left(\lambda + 2\mu + \mu'\right) \frac{\partial \overset{(M+1)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{(M+1)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_3} + \lambda \frac{\partial \overset{(M)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(M)}{u_j}}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) \frac{\partial u_k^{s(M+1)}}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial u_k^{s(M+1)}}{\partial \overset{s}{X}_3} + \mu \frac{\partial u_j^{s(M)}}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial u_j^{s(M+1)}}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial u_i^{s(M)}}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial u_i^{s(M+1)}}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$$

die Beziehung

$$\frac{\partial \overset{(M+1)}{u_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overset{(M+1)}{u_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{(M+1)}{U_i}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \quad \text{für} \quad M < -1, \tag{5.103}$$

da alle Terme nichtnegativ sind.

Schritt 4: $Q = 3M+1, M < -1, M$ fest)

Wir multiplizieren (5.93) mit h^{-4M-2} und werten (5.98) aus. Vollziehen wir jetzt den Grenzübergang $h \to 0$, dann verbleibt

$$\iint\limits_{\omega} \overset{(3M+1)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\ \overset{(M+2)-}{u}_{i,3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\ \overset{ss-}{v}_i(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\, d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2 = 0,$$

woraus

$$\overset{(3M+1)}{p}\ \overset{(M+2)-}{u}_{i,3} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.104}$$

folgt. Wir multiplizieren (5.93) mit h^{-3M-1} und werten (5.104), (5.98) sowie (5.103) aus. Es verbleibt

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega^s} \left(\left(\sigma_{33}^{(2M)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\ \frac{\partial \overset{(M+2)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sigma_{\alpha 3}^{(2M+1)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\ \frac{\partial \overset{(M)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \\
&\qquad + \left.\left(\sigma_{\alpha\beta}^{(2M)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\ \frac{\partial \overset{(M)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}\ \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right)\right) d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2\, d\overset{s}{X}_3 \\
&\qquad\qquad = \iint\limits_{\omega} \overset{(3M+1)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\ \overset{ss-}{v}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\, d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2
\end{aligned} \tag{5.105}$$

mit $\sigma_{33}^{(2M)} = \frac{1}{2}\lambda \frac{\partial \overset{(M)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(M)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}$, $\sigma_{\alpha 3}^{(2M+1)} = \mu \frac{\partial \overset{(M)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(M+2)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3}$ und

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2M)} = \frac{1}{2} \left(\lambda \frac{\partial \overset{(M)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} \frac{\partial \overset{(M)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} + \mu' \frac{\partial \overset{(M)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} \frac{\partial \overset{(M)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} \right) \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial \overset{(M)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(M)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right).$$

Haben wir bisher nur die ab Seite 52 formulierten Annahmen I), II) und V) ausgewertet, kommt an dieser Stelle die Annahme IV) zum Tragen. Danach soll die Reihenfolge der Operation Linearisierung um den Verschiebungsgradienten $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$ und der Operation Grenzübergang $h \to 0$ vertauschbar sein. Wären wir vom linearisierten 3D-Problem (A.41) auf Seite 204 ausgegangen, würde $0 = \iint\limits_{\omega} \overset{(3M+1)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\ \overset{ss-}{v}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\, d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2$ verbleiben, woraus in diesem

Fall $\overset{(3M+1)}{p} = 0$ folgt. Mit der Forderung IV) soll dies nun auch für den nichtlinearen Fall folgen, d.h. es soll

$$\overset{(3M+1)}{p} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.106}$$

auch im nichtlinearen Fall gelten. Wir schließen daraus, dass $Q > -5$ gelten muss.

Wählen wir jetzt die speziellen Testfunktionen $\overset{ss}{v}_i = \overset{(M)}{u}_i$, folgt aus (5.105) unter Beachtung von (5.98) und (5.103)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint\limits_{\omega}\Bigg(&\lambda\frac{\partial\overset{(M)}{U}_i}{\partial\overset{s}{X}_\gamma}\frac{\partial\overset{(M)}{U}_i}{\partial\overset{s}{X}_\gamma}\frac{\partial\overset{(M)}{U}_j}{\partial\overset{s}{X}_\alpha}+\mu'\frac{\partial\overset{(M)}{U}_i}{\partial\overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}}\frac{\partial\overset{(M)}{U}_i}{\partial\overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}}\frac{\partial\overset{(M)}{U}_j}{\partial\overset{s}{X}_\alpha}\\ &+2\mu\frac{\partial\overset{(M)}{U}_i}{\partial\overset{s}{X}_\alpha}\frac{\partial\overset{(M)}{U}_i}{\partial\overset{s}{X}_\beta}\frac{\partial\overset{(M)}{U}_j}{\partial\overset{s}{X}_\beta}\Bigg)\frac{\partial\overset{(M)}{U}_j}{\partial\overset{s}{X}_\alpha}d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2 = 0.\end{aligned}$$

Da alle Terme dieser Gleichung nichtnegativ sind, kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn

$$\frac{\partial\overset{(M)}{U}_i}{\partial\overset{s}{X}_\beta} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.107}$$

gilt. Dies bedeutet, dass $\overset{(M)}{U}_i$ konstant ist. Zur weiteren Auswertung benutzen wir jetzt die Forderung III). Aus den Starrkörperfesseln (4.61) folgt aus (5.107) sofort $\overset{(M)}{U}_\alpha = 0$.

Multiplizieren wir die Stützrandbedingung (5.72) mit h^{-M}, verbleibt für $h \to 0$ die Beziehung $\overset{(M)}{U}_3(\overset{(0)}{Z}_1, \overset{(0)}{Z}_2) = 0$. Daraus folgt

$$\overset{(M)}{U}_3 = 0, \quad \text{für} \quad M < -1, \quad \text{falls} \quad (\overset{(0)}{Z}_1, \overset{(0)}{Z}_2) \in \omega \tag{5.108}$$

gilt. Damit gilt, falls $(\overset{(0)}{Z}_1, \overset{(0)}{Z}_2) \in \omega$

$$\overset{(M)}{u}_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overset{(M)}{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1. \tag{5.109}$$

Als vorläufiges Zwischenergebnis können wir, falls $(\overset{(0)}{Z}_1, \overset{(0)}{Z}_2) \in \omega$ gilt, für das gemäß (5.71) asymptotisch entwickelte Verschiebungsfeld angeben[5]:

$$\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = h^{-1}\,\overset{(-1)}{u_i}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) + \sum_{A=0}^{N} h^A\,\overset{(A)}{u_i}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) + O(h^{N+1}) \qquad \text{mit} \quad N \in \mathbb{N}. \tag{5.110}$$

<u>Schritt 5:</u> $Q = -4)$

Nach Multiplikation von (5.93) mit h^5, Auswertung von (5.110) sowie (5.103) und Grenzübergang $h \to 0$ verbleibt

$$0 = \iint_\omega \overset{(-4)}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\,\overset{ss-}{v_i}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\,\overset{(0)-}{u}_{i,3}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2,$$

Dies kann nur für alle $\overset{ss-}{v_i}$ gelten, wenn

$$\overset{(-4)}{p}\,\overset{(0)-}{u}_{i,3} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.111}$$

gilt. Als nächstes multiplizieren (5.93) mit h^4, werten (5.111) aus und vollziehen den Grenzübergang $h \to 0$. Es verbleibt

$$\iint_\omega \overset{(-4)}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\;\overset{ss-}{v_3}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\;d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2 = 0.$$

Dies kann nur erfüllt werden, wenn

$$\overset{(-4)}{p} = 0 \quad \text{für} \quad M < -1 \tag{5.112}$$

gilt.

<u>Schritt 6:</u> $Q = -3)$

Nach Multiplikation von (5.93) mit h^4, Auswertung von (5.110) sowie (5.103) und Grenzübergang $h \to 0$ verbleibt

$$0 = \iint_\omega \overset{(-3)}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\,\overset{ss-}{v_i}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\,\overset{(0)-}{u}_{i,3}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2\,.$$

Dies kann nur für alle $\overset{ss-}{v_i}$ gelten, wenn

$$\overset{(-3)}{p}\,\overset{(0)-}{u}_{i,3} = 0 \tag{5.113}$$

Die weitere Vorgehensweise ist identisch mit Schritt 3, wenn die Ungleichung $M < -1$ durch $M < 0$ ersetzt wird. Insbesondere gilt (5.102) und (5.103) jetzt für $M < 0$.

---

[5] Wir zeigen später in Formel (5.125) auf Seite 85, dass $(\overset{(0)}{Z}_1,\overset{(0)}{Z}_2) \in \bar{\omega}$ tatsächlich gilt.

Schritt 7: $Q = -2)$

Nach Multiplikation von (5.93) mit h^{-Q}, Auswertung von (5.110) sowie (5.103) für $M < 0$ und Grenzübergang $h \to 0$ verbleibt die Gleichung

$$\iiint\limits_{\Omega^s} \left(\left(\sigma_{33}^{(-2)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \, \frac{\partial \overset{(1)}{u_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \sigma_{\alpha 3}^{(-1)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \, \frac{\partial \overset{(-1)}{u_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) \frac{\partial \overset{ss}{v_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(-2)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \, \frac{\partial \overset{(-1)}{u_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \, \frac{\partial \overset{ss}{v_i}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right) \right) d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3$$

$$= \iint\limits_{\omega} \overset{(-2)}{p} \left(\overset{ss-}{v_i}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \, \overset{(1)-}{u_{i,3}}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) + \overset{ss-}{v_3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2 \right) d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2$$

wobei die Spannungsterme durch (5.105) definiert sind, wenn dort $M = -1$ gesetzt wird. Mit der gleichen Argumentation wie für $Q = 3M + 1$ mit $M < -1$ folgern wir jetzt mit $M < 0$ analog zu (5.106)

$$\overset{(-2)}{p} = 0 \tag{5.114}$$

und analog zu (5.109)

$$\overset{(-1)}{u_i} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overset{(-1)}{\boldsymbol{u}} = 0. \tag{5.115}$$

Als neues vorläufiges Zwischenergebnis können wir, falls $(\overset{(0)}{Z_1}, \overset{(0)}{Z_2}) \in \omega$ gilt, für das gemäß (5.110) asymptotisch entwickelte Verschiebungsfeld angeben:

$$\overset{s}{u_i}(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, \overset{s}{X}_3) = \sum_{A=0}^{N} h^A \; \overset{(A)}{u_i}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, \overset{s}{X}_3) + O(h^{N+1}) \quad \text{mit} \quad N \in \mathbb{N}. \tag{5.116}$$

Schritt 8: $Q = -1)$

Nach Multiplikation von (5.93) mit h^{-Q}, Auswertung von (5.110) sowie (5.103) für $M < 0$ und Grenzübergang $h \to 0$ verbleibt die Gleichung

$$0 = \iint\limits_{\omega} \overset{(-1)}{p} \left(\overset{ss-}{v_i}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \, \overset{(1)-}{u_{i,3}}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) + \overset{ss-}{v_3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2 \right) d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2$$

Wollen wir jetzt wieder die Forderung $IV)$ erfüllen, muss

$$\overset{(-1)}{p} = 0 \tag{5.117}$$

gelten.

<u>Schritt 9:</u> $Q = 0)$

Werten wir in (5.93) die Formeln (5.116) und (5.103) für $M = -1$ aus, verbleibt nach dem Grenzübergang $h \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega^s} \left(\sigma_{33}^{(0)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \right. \\
&\qquad \left. + \sigma_{\alpha 3}^{(0)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(0)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \right) d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2\, d\overset{s}{X}_3 \\
&\qquad = \iint\limits_{\omega} \overset{(0)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \left(\overset{ss-}{v_3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \overset{ss-}{v_i}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\, \overset{(1)-}{u}_{i,3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \right) d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2
\end{aligned} \tag{5.118}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } \sigma_{33}^{(0)} &= \lambda \left(\frac{\partial \overset{(0)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{(0)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(0)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) \\
&\qquad + \left(\lambda + \mu' + 2\mu\right) \left(\frac{\partial \overset{(1)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \\
\text{und } \sigma_{\alpha 3}^{(0)} &= \mu \left(\frac{\partial \overset{(0)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(0)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3} \right).
\end{aligned}$$

Wählen wir jetzt in (5.118) alle $\overset{ss}{v}_i$, für die $\frac{\partial \overset{ss}{v}_i}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$ gilt, verbleibt

$$\begin{aligned}
0 = \iint\limits_{\omega} &\overset{(0)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \left(\overset{ss-}{v_3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \right. \\
&\qquad \left. + \overset{ss-}{v_i}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\; \overset{(1)-}{u}_{i,3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \right) d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2,
\end{aligned}$$

woraus mit $IV)$ wieder

$$\overset{(0)}{p} = 0 \tag{5.119}$$

folgt. Nun wählen wir in (5.118) alle $\overset{ss}{v}_i$, für die $\frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$ gilt. Es verbleibt unter Beachtung von (5.119)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^s} \Bigg(\sigma_{33}^{(0)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) + \\ \sigma_{\alpha 3}^{(0)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{(0)}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \Bigg) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nur dann für beliebige zulässige $\overset{ss}{v}_3$ erfüllt, wenn

$$\sigma_{33}^{(0)} \left(1 + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) + \sigma_{\alpha 3}^{(0)} \frac{\partial \overset{(0)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} = 0 \tag{5.120}$$

gilt. Um dies einzusehen, wählen wir Testfunktionen $\overset{ss}{v}_i$ mit

$$\overset{ss}{v}_i = \int_{-\frac{1}{2}}^{\overset{s}{X}_3} \varphi_i(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, y) d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, dy,$$

wobei φ_i bei $\overset{s}{X}_3 = \pm\frac{1}{2}$ verschwinden sollen. Mit diesen Testfunktionen können wir Variationsgleichungen der Gestalt

$$\iiint_{\Omega^s} f_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3 = 0$$

immer auf die Form $\iiint_{\Omega^s} f_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \varphi_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3 = 0$ bringen, so dass für beliebige, bei $\overset{s}{X}_3 = \pm\frac{1}{2}$ verschwindende φ_i sofort $f_i = 0$ folgt[6].

Von (5.118) verbleibt nun für beliebige zulässige $\overset{ss}{v}_i$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^s} \Bigg(\sigma_{\alpha 3}^{(0)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(0)}{u}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{v}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \\ + \sigma_{33}^{(0)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{(1)}{u}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{ss}{v}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \Bigg) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3 = 0. \end{aligned}$$

---

[6] Siehe auch *Ciarlet* in [24] S. 37.

Zur Erfüllung dieser Gleichung für beliebige zulässige $\overset{ss}{v}_\alpha$ muss

$$\sigma_{\alpha 3}^{(0)} \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \overset{(0)}{u}_\beta}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) + \sigma_{33}^{(0)} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_\beta}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0 \tag{5.121}$$

gelten. Die Formeln (5.120) und (5.121) bilden ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $\frac{\partial \overset{(1)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_3}$, d. h. $\frac{\partial \overset{(1)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_3}$ hängt nur von $\frac{\partial \overset{(0)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}$ ab.

<u>Schritt 10:</u> $Q = 1$)

Multiplizieren wir (5.93) mit h^{-Q}, werten die Formeln (5.116) und (5.103) aus und vollziehen Grenzübergang $h \to 0$, verbleibt mit

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = {} & \Bigg(\lambda \left(\frac{\partial \overset{(0)}{u}_\gamma}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{(0)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} \frac{\partial \overset{(0)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \\
& + \mu' \left(\frac{\partial \overset{(0)}{u}_{\underline{\alpha}}}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{(0)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} \frac{\partial \overset{(0)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} \right) \Bigg) \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial \overset{(0)}{u}_\beta}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(0)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\beta} + \frac{\partial \overset{(0)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(0)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right),
\end{aligned}$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = \lambda \left(\frac{\partial \overset{(2)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(0)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) + \left(\lambda + \mu' + 2\mu \right) \left(\frac{\partial \overset{(2)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(2)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3} \right)$$

und $\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = \mu \left(\frac{\partial \overset{(1)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(2)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(0)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(2)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3} \right)$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega^s} \Bigg(& \left(\sigma_{33}^{(0)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{(2)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \\
& + \sigma_{33}^{(1)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \\
& + \sigma_{\alpha 3}^{(0)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \\
& + \sigma_{\alpha 3}^{(1)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(0)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sigma^{(0)}_{\alpha\beta}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(0)}{u}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right) \Bigg) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3 \\
&= \iint\limits_{\omega} \overset{(1)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \Big(\overset{ss-}{v_3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \\
&\qquad + \overset{ss-}{v_i}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \, \overset{(1)-}{u}_{i,3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \Big) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, . \qquad (5.122)
\end{aligned}
$$

Da im linearisierten Problem für die spezielle Wahl $\overset{ss}{v}_\alpha = 0$ und $\frac{\partial \overset{ss}{v}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$ die linke Seite dieser Gleichung verschwindet, führt dies wegen IV) wieder auf

$$\overset{(1)}{p} = 0. \qquad (5.123)$$

Unter Beachtung der Definitionen für $\sigma^{(0)}_{\alpha\beta}$ und $\sigma^{(0)}_{\alpha 3}$ auf der vorherigen Seite und auf Seite 82, sowie (5.103) für $M = -1$, (5.120) und (5.121) wird aus (5.122) für die spezielle Wahl $\overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{ss}{V}_i(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)$ die nichtlineare Variationsgleichung

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\omega} \Bigg(\sigma^{(0)}_{\alpha 3}\Big(\overset{(0)}{\boldsymbol{U}}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\Big) \left(\frac{\partial \overset{ss}{V}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) \\
&\qquad + \sigma^{(0)}_{\alpha\beta}\Big(\overset{(0)}{\boldsymbol{U}}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\Big) \left(\frac{\partial \overset{ss}{V}_\beta(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial \overset{(0)}{U}_i(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{V}_i(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right) \Bigg) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Wir suchen solche Lösungen $\overset{(0)}{\boldsymbol{U}}$ des obigen Variationsproblems, die außerdem die Verschiebungsrandbedingungen (5.72) und (4.61) erfüllen. Dieses Problem hat im allgemeinen keine eindeutige Lösung. Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung eines solchen lastfreien Zustands ist jedoch

$$\overset{(0)}{U}_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overset{(0)}{u}_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overset{(0)}{\boldsymbol{u}} = 0. \qquad (5.124)$$

Damit erhalten wir aus (5.73) für $h \to 0$ unter Beachtung von Definition (5.53)

$$R_I^2 = \overset{(0)}{Z}_\alpha \overset{(0)}{Z}_\alpha \quad \text{bzw.} \quad (\overset{(0)}{Z}_1, \overset{(0)}{Z}_2) \in \Theta \subset \omega. \qquad (5.125)$$

Als Zwischenergebnis können wir für das gemäß (5.116) asymptotisch entwickelte Verschiebungsfeld angeben:

$$\overset{s}{u}_i(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = \sum_{A=1}^{N} h^A \overset{(A)}{u}_i(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) + O(h^{N+1}) \quad \text{mit} \quad N \in \mathbb{N}. \tag{5.126}$$

Mit Hilfe von (5.125) schreiben wir jetzt statt (5.6)

$$\overset{s}{Z}_\alpha(h) + \overset{s}{u}_\alpha\left(h;\overset{s}{Z}_1(h),\overset{s}{Z}_2(h),\frac{1}{2}\right) - \overset{(0)}{Z}_\alpha = 0 \quad \text{mit} \quad \overset{(0)}{Z}_\alpha \overset{(0)}{Z}_\alpha = R_I^2. \tag{5.127}$$

Weitere Auswertungen im Schritt 10:

Aus (5.120) folgt nun $\frac{\partial \overset{(1)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$ und aus (5.121) $\frac{\partial \overset{(1)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$. Dies lässt sich zusammenfassen zu

$$\frac{\partial \overset{(1)}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \overset{(1)}{\boldsymbol{u}}}{\partial \overset{s}{X}_3} = \boldsymbol{0} \quad \text{bzw.} \quad \overset{(1)}{\boldsymbol{u}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{(1)}{\boldsymbol{U}}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2). \tag{5.128}$$

Von (5.122) verbleibt wegen $\overset{(0)}{\sigma}_{ij} = 0$ die Gleichung

$$\iiint_{\Omega^s} \left(\overset{(1)}{\sigma}_{33}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \overset{(1)}{\sigma}_{\alpha 3}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2\, d\overset{s}{X}_3 = 0,$$

die nur erfüllt werden kann, wenn $\overset{(1)}{\sigma}_{i3} = 0$ gilt. Dies ist gleichbedeutend zu

$$\frac{\partial \overset{(2)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} = -\frac{\lambda}{\lambda + \mu' + 2\mu} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \quad \text{und} \tag{5.129}$$

$$\frac{\partial \overset{(2)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_3} = -\frac{\partial \overset{(1)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \overset{(2)}{u}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{(2)}{U}_\alpha(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) - \overset{s}{X}_3 \frac{\partial \overset{(1)}{U}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}. \tag{5.130}$$

Schritt 11: $Q = 2)$

Multiplizieren wir (5.93) mit h^{-Q}, werten die Formeln (5.126) und (5.128) aus und vollziehen Grenzübergang $h \to 0$, verbleibt

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega^s} \Bigg(\sigma_{33}^{(2)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \ \sigma_{\alpha 3}^{(2)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} & \\
+ \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{ss}{v}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \Bigg) \ d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3 & \\
= \iint\limits_{\omega} \overset{(2)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \, \overset{ss-}{v_3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \ d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2, &
\end{aligned} \tag{5.131}$$

mit

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} &= \left(\lambda \left(\frac{\partial \overset{(1)}{u}_\gamma}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} + \frac{\partial \overset{(2)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) + \mu' \frac{\partial \overset{(1)}{u}_{\underline{\alpha}}}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} \right) \delta_{\alpha\beta} \\
&\qquad + \mu \left(\frac{\partial \overset{(1)}{u}_\beta}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right) \\
&= \left(\lambda \frac{\mu' + 2\mu}{\lambda + \mu' + 2\mu} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_\gamma}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} + \mu' \frac{\partial \overset{(1)}{u}_{\underline{\alpha}}}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} \right) \delta_{\alpha\beta} \\
&\qquad + \mu \left(\frac{\partial \overset{(1)}{u}_\beta}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right), \\
\sigma_{33}^{(2)} &= \lambda \left(\frac{\partial \overset{(2)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{(1)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right) \\
&\qquad + \Big(\lambda + \mu' + 2\mu \Big) \left(\frac{\partial \overset{(3)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{(2)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{(2)}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \quad \text{und} \\
\sigma_{\alpha 3}^{(2)} &= \mu \left(\frac{\partial \overset{(2)}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(3)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial u_j^{s(1)}}{\partial x_\alpha^s} \frac{\partial u_j^{s(2)}}{\partial x_3^s} \right).
\end{aligned}$$

Wählen wir jetzt in (5.131) alle $\overset{ss}{v}_i$, für die $\frac{\partial \overset{ss}{v}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$ und $\overset{ss}{v}_\alpha = 0$ gilt, folgt sofort

$$\overset{(2)}{p} = 0. \tag{5.132}$$

Für die Wahl $\overset{ss}{v}_3 = 0$ und $\overset{ss}{v}_\alpha = \overset{(1)}{U}_\alpha$ ergibt sich

$$\iint\limits_\omega \left(\left(\lambda \frac{\mu' + 2\mu}{\lambda + \mu' + 2\mu} \frac{\partial \overset{(1)}{U}_\gamma}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} + \mu' \frac{\partial \overset{(1)}{U}_{\underline{\alpha}}}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} \right) \frac{\partial \overset{(1)}{U}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial \overset{(1)}{U}_\beta}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(1)}{U}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right) \left(\frac{\partial \overset{(1)}{U}_\beta}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(1)}{U}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right) \right) d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 = 0,$$

was nur für

$$\frac{\partial \overset{(1)}{U}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\beta} = 0 \tag{5.133}$$

erfüllt werden kann, da alle Terme nichtnegativ sind. Aus dieser Bedingung folgt unter Beachtung der Starrkörperfesseln (4.61)

$$\overset{(1)}{u}_\alpha = 0, \tag{5.134}$$

so dass aus (5.129)

$$\overset{(2)}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{(2)}{U}_3(\overset{s}{X}_\alpha, \overset{s}{X}_\alpha) \tag{5.135}$$

folgt. Aus der verbleibenden Gleichung folgt

$$\sigma^{(2)}_{\alpha 3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \overset{(3)}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_3} = -\frac{\partial \overset{(2)}{U}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \quad \text{und} \tag{5.136}$$

$$\sigma^{(2)}_{33} = 0. \tag{5.137}$$

Dividieren wir (5.127) zuerst durch h, erhalten wir für $h \to 0$

$$\overset{(1)}{Z}_\alpha = 0. \tag{5.138}$$

Wird (5.127) danach durch h^2 dividiert, ergibt sich für $h \to 0$

$$\overset{(2)}{Z}_\alpha = -\overset{(2)}{u}_\alpha(\overset{(0)}{Z}_1, \overset{(0)}{Z}_2, 1/2) = \left. \frac{\partial \overset{(1)}{U}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{2\, \partial \overset{s}{X}_\alpha} \right|_{(\overset{s}{X}_1 = \overset{(0)}{Z}_1, \overset{s}{X}_2 = \overset{(0)}{Z}_2)} - \overset{(2)}{U}_\alpha(\overset{(0)}{Z}_1, \overset{(0)}{Z}_2). \tag{5.139}$$

Wir halten als Zwischenergebnis fest

$$\overset{s}{u}_\alpha(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = h^2\left(\overset{(2)}{U}_\alpha(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) - \overset{s}{X}_3\,\frac{\partial\,\overset{(1)}{U}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}\right) + \mathrm{O}(h^3), \tag{5.140}$$

$$\overset{s}{u}_3(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = h\,\overset{(1)}{U}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) + \mathrm{O}(h^2) \quad \text{und} \tag{5.141}$$

$$\begin{aligned}\overset{s}{Z}_\alpha(h) = \overset{(0)}{Z}_\alpha + h^2 &\left(\left.\frac{\partial\,\overset{(1)}{U}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)}{2\;\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}\right|_{(\overset{s}{X}_1=\overset{(0)}{Z}_1,\overset{s}{X}_2=\overset{(0)}{Z}_2)} - \overset{(2)}{U}_\alpha(\overset{(0)}{Z}_1,\overset{(0)}{Z}_2)\right)\\ &+\mathrm{O}(h^3) \quad \text{mit} \quad \overset{(0)}{Z}_\alpha\,\overset{(0)}{Z}_\alpha = R_I^2.\end{aligned} \tag{5.142}$$

Die Randbedingung (5.72) hat jetzt die Gestalt

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{s}{u}_3(h;\overset{s}{Z}_1(h),\overset{s}{Z}_2(h),1/2)\\ &= h\,\overset{(1)}{U}_3(\overset{(0)}{Z}_1,\overset{(0)}{Z}_2) + \mathrm{O}(h^2).\end{aligned} \tag{5.143}$$

Dividieren wir diese Gleichung durch h und bilden $h \to 0$ folgt

$$\overset{(1)}{U}_3(\overset{(0)}{Z}_1,\overset{(0)}{Z}_2) = 0. \tag{5.144}$$

Entsprechend folgt aus den Starrkörperfesseln

$$\overset{(2)}{U}_1(0,R_A) = \overset{(2)}{U}_2(R_A,0) = \overset{(2)}{U}_2(-R_A,0) = 0. \tag{5.145}$$

<u>Schritt 12:</u> $Q = 3$)

Multiplizieren wir (5.93) mit h^{-Q}, werten die Formeln (5.140) und (5.141) aus und vollziehen den Grenzübergang $h \to 0$, verbleibt

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\omega} \overset{(3)}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\;\overset{ss-}{v}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\,d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2\\ &\quad= \iiint\limits_{\Omega^s}\left(\sigma^{(3)}_{33}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\,\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3} + \sigma^{(3)}_{\alpha 3}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\,\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\right.\\ &\qquad\qquad\left. + \,\sigma^{(2)}_{\alpha\beta}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\,\frac{\partial\,\overset{ss}{v}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha}\right) d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2\,d\overset{s}{X}_3\,.\end{aligned} \tag{5.146}$$

Für die Wahl $\overset{ss}{v}_\alpha = 0$ und $\frac{\partial \overset{ss}{v}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$ folgt auch hier

$$\overset{(3)}{p} = 0. \tag{5.147}$$

Jetzt folgt für $\overset{ss}{v}_\alpha = 0$ und beliebige zulässige $\overset{ss}{v}_3$

$$\sigma_{33}^{(3)} = 0. \tag{5.148}$$

Damit gilt

$$\sigma_{\alpha\beta}^{s} = h^2 \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} + O(h^3), \tag{5.149}$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{s} = h^3 \sigma_{\alpha 3}^{(3)} + O(h^4) \quad \text{und} \tag{5.150}$$

$$\sigma_{33}^{s} = h^4 \sigma_{33}^{(4)} + O(h^5). \tag{5.151}$$

<u>Schritt 13:</u> $Q = 4)$

Multiplizieren wir (5.93) mit h^{-Q} und werten die Formeln (5.140), (5.141), (5.148) und (5.146) aus, verbleibt nach dem Grenzübergang $h \to 0$ die Variationsgleichung

$$\begin{aligned}
&\iint_\omega \overset{(4)}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\, \overset{ss-}{v}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2 \\
&= \iiint_{\Omega^s} \Bigg(\sigma_{\beta\alpha}^{(3)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{ss}{v}_\beta(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \sigma_{\beta\alpha}^{(2)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{(1)}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \\
&\qquad + \sigma_{\alpha 3}^{(3)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) + \sigma_{\alpha 3}^{(4)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \\
&\qquad\quad + \sigma_{33}^{(4)}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} + \frac{\partial \overset{(1)}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{ss}{v}_i(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \Bigg) d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2\, d\overset{s}{X}_3\,.
\end{aligned} \tag{5.152}$$

In dieser Gleichung kann die rechte Seite nicht durch geeignete Wahl von nichttrivialen Testfunktionen zu Null gebracht werden. Dies gilt auch für das linearisierte 3D-Problem, so dass hier die Forderung *IV*) keine weiteren Vereinfachungen bringt. Damit gilt

$$\overset{s}{p} = h^4 \overset{(4)}{p}, \tag{5.153}$$

womit auch die Skalierungsvorschrift (5.78) gerechtfertigt ist. Für $\overset{(4)}{p} \neq 0$ sind auch die führenden Terme der Verschiebung von Null verschieden. Daraus folgt, dass die führenden Terme von $\overset{s}{u}_\alpha$ von der Ordnung h sind und dass die führenden Terme von $\overset{s}{u}_\alpha$ von der Ordnung h^2 sind, so dass die durch (5.76) und (5.77) beschriebenen Skalierungsvorschriften gerechtfertigt sind.

Durch geeignetes Testen erhalten wir zwei Variationsgleichungen, die nur noch von den führenden Termen $\overset{(2)}{U}_\alpha$ und $\overset{(1)}{U}_3$ abhängen. Außerdem haben wir mit (5.149) bis (5.151) die Skalierungsvorschriften für die Spannungen (5.82) bis (5.84) bestätigt.

Wir zeigen im nächsten Abschnitt, dass wenn wir die Testfunktionen ebenfalls wie (5.76) und (5.77) skalieren, die Gleichungen der führenden Terme der asymptotisch entwickelten und nach (5.76) und (5.77) skalierten Verschiebungen, den *von Kármán*'schen Gleichungen entsprechen.

5.4.4 Herleitung der *von Kármán*'schen Gleichungen unter Anwendung der Skalierungsvorschriften

Durch (5.140) und (5.141) motivieren wir die Einführung skalierter Verschiebungen $\overset{ss}{u}_i$, die den Gleichungen (5.76) und (5.77) genügen, d. h. zwischen den transformierten Verschiebungen $\overset{s}{u}_i$ und skalierten Verschiebungen $\overset{ss}{u}_i$ bestehen die Beziehungen $\overset{s}{u}_\alpha = h^2\,\overset{ss}{u}_\alpha$ und $\overset{s}{u}_3 = h\,\overset{ss}{u}_3$. Genauso lässt sich durch (5.153) die Einführung einer skalierten Randlast $\overset{ss}{p}$ gemäß (5.78) motivieren, nach der $\overset{s}{p} = h^4\,\overset{ss}{p}$ gilt. Damit werden über die drei Skalierungsvorschriften (5.76), (5.77) und (5.153) die transformierten Größen gerade durch diejenigen skalierten Größen ersetzt, die für den Grenzübergang $h \to 0$ nicht verschwinden.

Skalieren wir jetzt die Testfunktionen, entsprechend der Forderung V), genauso wie die Verschiebungen, können wir mit den Vorschriften (5.76) und (5.77) skalierte Testfunktionen $\overset{ss}{v}_i$ einführen, die im Gegensatz zur Formel (5.86) zu den transformierten Testfunktionen in folgenden Beziehungen stehen:

$$\overset{s}{v}_\alpha(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = h^2\,\overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) \quad \text{und} \tag{5.154}$$

$$\overset{s}{v}_3(h;\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = h\,\overset{ss}{v}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3). \tag{5.155}$$

Statt (5.93) erhalten wir aus (5.87) auf Seite 72 unter Verwendung von

(5.77), (5.76), (5.78), (5.82), (5.83), (5.84), (5.154) und (5.155)

$$
\begin{aligned}
& h^5 \iint\limits_{\omega} \overset{ss}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \Bigg(\left(1 + h \frac{\partial \overset{ss-}{u_3}(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_3}\right) \overset{ss-}{v_3}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \\
& \qquad + h^3 \frac{\partial \overset{ss-}{u_\alpha}(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_3} \overset{ss-}{v_\alpha}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \Bigg) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \\
& = h^5 \iiint\limits_{\Omega^s} \sigma^{ss}_{kj}(h; \overset{s}{\boldsymbol{X}}) \Bigg(\frac{\partial \overset{ss}{v}_k(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} + \frac{\partial \overset{ss}{u}_3(h; \overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_k} \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} \\
& \qquad + \frac{\partial \overset{ss}{u}_\alpha(h; \overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_k} \frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} h^2 \Bigg) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3 \, . \qquad (5.156)
\end{aligned}
$$

Bevor wir die konkrete Gestalt der skalierten Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^{ss}$ angeben, definieren wir noch über die skalierten Verschiebungen (5.76) und (5.77) die skalierten Verzerrungen $\overset{ss}{G}_{ij}$, für die mit (5.68)

$$
\begin{aligned}
\overset{h}{G}_{\alpha\beta}(h; \boldsymbol{X}) &= h^2 \, \overset{ss}{G}_{\alpha\beta}(h; \boldsymbol{X}), \ \overset{h}{G}_{\alpha 3}(h; \boldsymbol{X}) = h \, \overset{ss}{G}_{\alpha 3}(h; \boldsymbol{X}) \quad \text{und} \\
\overset{h}{G}_{33}(h; \boldsymbol{X}) &= \overset{ss}{G}_{33}(h; \boldsymbol{X}) \qquad (5.157)
\end{aligned}
$$

gilt. Dabei lässt sich $\overset{ss}{\boldsymbol{G}}$ durch

$$
\overset{ss}{G}_{ij}(h; \boldsymbol{X}) = \overset{[0]}{\Gamma}_{ij}(h; \boldsymbol{X}) + h^2 \, \overset{[2]}{\Gamma}_{ij}(h; \boldsymbol{X}) \qquad (5.158)
$$

mit

$$
\overset{[0]}{\Gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{ss}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_j} + \frac{\partial \overset{ss}{u}_j}{\partial \overset{s}{X}_i} + \frac{\partial \overset{ss}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_i} \frac{\partial \overset{ss}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_j} \right) \quad \text{und} \quad \overset{[2]}{\Gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{ss}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_i} \frac{\partial \overset{ss}{u}_\beta}{\partial \overset{s}{X}_j} \qquad (5.159)
$$

darstellen. Die skalierten Spannungen haben dann unter Beachtung von (5.69) speziell für die ⟨100⟩-Orientierung die Gestalt

$$
\begin{aligned}
\sigma^{ss}_{ij}(h; \overset{s}{\boldsymbol{X}}) &= h^{-4} \ \overset{[-4]}{\Sigma}_{ij}(h; \overset{s}{\boldsymbol{X}}) + h^{-2} \ \overset{[-2]}{\Sigma}_{ij}(h; \overset{s}{\boldsymbol{X}}) + \overset{[0]}{\Sigma}_{ij}(h; \overset{s}{\boldsymbol{X}}) + h^2 \ \overset{[2]}{\Sigma}_{ij}(h; \overset{s}{\boldsymbol{X}}) \\
&= h^{-4} \ \overset{\langle -4 \rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + h^{-3} \ \overset{\langle -3 \rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + h^{-2} \ \overset{\langle -2 \rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) h^{-1} \ \overset{\langle -1 \rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \\
&\quad + \overset{\langle 0 \rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h), \qquad (5.160)
\end{aligned}
$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma^{ss}_{\alpha\beta} &= h^{-2}\,\overset{h}{\sigma}_{\alpha\beta} = h^{-2}\left(\lambda\,\overset{h}{G}_{33}\,\delta_{\alpha\beta} + \left(\lambda\,\overset{h}{G}_{\gamma\gamma} + \mu'\,\overset{h}{G}_{\underline{\alpha\alpha}}\right)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\,\overset{h}{G}_{\alpha\beta}\right)\\
&= h^{-2}\lambda G^{ss}_{33}\delta_{\alpha\beta} + \left(\lambda G^{ss}_{\gamma\gamma} + \mu' G^{ss}_{\underline{\alpha\alpha}}\right)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu G^{ss}_{\alpha\beta}\\
&= h^{-2}\lambda\,\overset{[0]}{\Gamma}_{33}\,\delta_{\alpha\beta} + \left(\lambda\left(\overset{[2]}{\Gamma}_{33} + \overset{[0]}{\Gamma}_{\gamma\gamma}\right) + \mu'\,\overset{[0]}{\Gamma}_{\underline{\alpha\alpha}}\right)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\,\overset{[0]}{\Gamma}_{\alpha\beta}\\
&\qquad + h^2\left(\left(\lambda\,\overset{[2]}{\Gamma}_{\gamma\gamma} + \mu'\,\overset{[2]}{\Gamma}_{\underline{\alpha\alpha}}\right)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\,\overset{[2]}{\Gamma}_{\alpha\beta}\right)\\
&=: h^{-2}\,\overset{[-2]}{\Sigma}_{\alpha\beta} + \overset{[0]}{\Sigma}_{\alpha\beta} + h^2\,\overset{[2]}{\Sigma}_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{5.161}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{ss}_{\alpha 3} &= h^{-3}\,\overset{h}{\sigma}_{\alpha 3} = h^{-3}2\mu\,\overset{h}{G}_{\alpha 3} = h^{-2}2\mu G^{ss}_{\alpha 3} = h^{-2}2\mu\,\overset{[0]}{\Gamma}_{\alpha 3} + 2\mu\,\overset{[2]}{\Gamma}_{\alpha 3}\\
&=: h^{-2}\,\overset{[-2]}{\Sigma}_{\alpha 3} + \overset{[0]}{\Sigma}_{\alpha 3}
\end{aligned} \tag{5.162}$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma^{ss}_{33} &= h^{-4}\,\overset{h}{\sigma}_{33} = h^{-4}\left(\left(\lambda + 2\mu + \mu'\right)\overset{h}{G}_{33} + \lambda\,\overset{h}{G}_{\alpha\alpha}\right)\\
&= h^{-4}\left(\lambda + 2\mu + \mu'\right)G^{ss}_{33} + h^{-2}\lambda G^{ss}_{\alpha\alpha}\\
&= h^{-4}\left(\lambda + 2\mu + \mu'\right)\overset{[0]}{\Gamma}_{33} + h^{-2}\left(\left(\lambda + 2\mu + \mu'\right)\overset{[2]}{\Gamma}_{33} + \lambda\,\overset{[0]}{\Gamma}_{\alpha\alpha}\right) + \lambda\,\overset{[2]}{\Gamma}_{\alpha\alpha}\\
&=: h^{-4}\,\overset{[-4]}{\Sigma}_{33} + h^{-2}\,\overset{[-2]}{\Sigma}_{33} + \overset{[0]}{\Sigma}_{33}\,.
\end{aligned} \tag{5.163}$$

Setzen wir die obere Zeile von (5.160) in (5.156) ein und sortieren nach Potenzen von h, erhalten wir

$$\begin{aligned}
h^5 \iint\limits_{\omega} \overset{ss}{p}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) &\left(\left(1 + h\frac{\partial\,\overset{ss-}{u}_3(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\right)\overset{ss-}{v}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\right.\\
&\left. + h^3\frac{\partial\,\overset{ss-}{u}_\alpha(h; \overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial\,\overset{s}{X}_3}\,\overset{ss-}{v}_\alpha(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\right) d\overset{s}{X}_1\, d\overset{s}{X}_2\\
&=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega^s} \Bigg(\Bigg(& \overset{[-4]}{\Sigma}_{33}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(1 + \frac{\partial \overset{ss}{u}_3(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3}\right) \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \Bigg) \\
& + h^2 \Bigg(\overset{[-2]}{\Sigma}_{kj}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_k(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} + \frac{\partial \overset{ss}{u}_3(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_k} \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} \right) \\
& \qquad + \overset{[-4]}{\Sigma}_{33}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{u}_\alpha(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} \right) \Bigg) \\
& + h^4 \Bigg(\overset{[0]}{\Sigma}_{kj}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_k(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} + \frac{\partial \overset{ss}{u}_3(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_k} \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} \right) \\
& \qquad + \overset{[-2]}{\Sigma}_{kj}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{u}_\alpha(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_k} \frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} \right) \Bigg) \\
& + h^6 \Bigg(\overset{[2]}{\Sigma}_{\gamma\beta}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_\gamma(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\beta} + \frac{\partial \overset{ss}{u}_3(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right) \\
& \qquad + \overset{[0]}{\Sigma}_{kj}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{u}_\alpha(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_k} \frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} \right) \Bigg) \\
& + h^8 \Bigg(\overset{[2]}{\Sigma}_{\gamma\beta}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{u}_\alpha(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} \frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right) \Bigg) \Bigg) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3 \, . \qquad (5.164)
\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ verbleibt $\iiint\limits_{\Omega^s} \overset{\langle -4\rangle}{\sigma}_{33}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(1 + \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3}\right) \frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_3} d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \, d\overset{s}{X}_3 = 0$. Die Gleichung kann nur für beliebige $\overset{ss}{v}_3$ erfüllt werden, wenn

$$\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3}\right) \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} \left(1 + \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3}\right) = 0$$

gilt. Da aus dem linearisierten 3D-Problem $\frac{\partial \overset{\langle 0,L\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0$ folgt, lautet die Lösung wegen der Forderung $IV)$ auf Seite 52

$$\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} = 0, \qquad (5.165)$$

was auch die einzige physikalisch sinnvolle Lösung ist. Dieses Ergebnis stimmt für $i = 3$ mit (5.128) überein.

Dividieren wir (5.164) durch h, verbleibt jetzt für $h \to 0$ die Gleichung $\iiint\limits_{\Omega^s} \overset{\langle -3\rangle}{\sigma_{33}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\frac{\partial \overset{ss}{v_3}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X_3}}\, d\overset{s}{X_1}\, d\overset{s}{X_2}\, d\overset{s}{X_3} = 0$. Sie kann nur erfüllt werden, wenn

$$\frac{\partial \overset{\langle 1\rangle}{u_3}}{\partial \overset{s}{X_3}} = 0 \tag{5.166}$$

gilt. Dieses Ergebnis stimmt mit (5.129) überein, wenn das Resultat (5.134) ausgewertet wird. Damit können wir statt (5.160) auch

$$\sigma_{ij}^{ss}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = h^{-2}\,\overset{\langle -2\rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + h^{-1}\,\overset{\langle -1\rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + \overset{\langle 0\rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h) \tag{5.167}$$

schreiben.

Als nächstes dividieren wir (5.164) durch h^2 und bilden $h \to 0$. Für $\overset{ss}{v_3} = 0$ verbleibt $\iiint\limits_{\Omega^s} \overset{\langle -2\rangle}{\sigma_{\alpha 3}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\frac{\partial \overset{ss}{v_\alpha}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X_3}}\, d\overset{s}{X_1}\, d\overset{s}{X_2}\, d\overset{s}{X_3} = 0$, woraus

$$\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u_3}}{\partial \overset{s}{X_\alpha}} + \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u_\alpha}}{\partial \overset{s}{X_3}} = 0 \tag{5.168}$$

wird. Diese Gleichung entspricht dem Resultat (5.130). Damit ist bereits gezeigt, dass die skalierten Verschiebungen für $h \to 0$ ein *Kirchhoff-Love*-Verschiebungsfeld bilden. Die letztlich verbleibende Gleichung lautet $\iiint\limits_{\Omega^s} \overset{\langle -2\rangle}{\sigma_{33}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\frac{\partial \overset{ss}{v_3}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X_3}}\, d\overset{s}{X_1}\, d\overset{s}{X_2}\, d\overset{s}{X_3} = 0$. Sie ist nur erfüllt, wenn

$$\frac{\partial \overset{\langle 2\rangle}{u_3}}{\partial \overset{s}{X_3}} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + \mu'}\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u_\alpha}}{\partial \overset{s}{X_\alpha}} - \frac{1}{2}\frac{2(\lambda+\mu)+\mu'}{\lambda + 2\mu + \mu'}\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u_3}}{\partial \overset{s}{X_\alpha}}\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u_3}}{\partial \overset{s}{X_\alpha}} \tag{5.169}$$

gilt. Für die skalierten Spannungen gilt statt (5.167) demnach

$$\sigma_{ij}^{ss}(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = h^{-1}\,\overset{\langle -1\rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + \overset{\langle 0\rangle}{\sigma_{ij}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h). \tag{5.170}$$

Im vorletzten Schritt dividieren wir (5.164) durch h^3 und bilden wieder $h \to 0$. Für $\overset{ss}{v_3} = 0$ verbleibt jetzt $\iiint\limits_{\Omega^s} \overset{\langle -1\rangle}{\sigma_{\alpha 3}}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})\frac{\partial \overset{ss}{v_\alpha}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X_3}}\, d\overset{s}{X_1}\, d\overset{s}{X_2}\, d\overset{s}{X_3} = 0$. Dies kann nur erfüllt werden, wenn auch $\overset{\langle 1\rangle}{u_i}$ ein *Kirchhoff-Love*-Verschiebungsfeld ist, d.h. außer der Bedingung (5.166) auch der Bedingung

$$\frac{\partial \overset{\langle 1\rangle}{u_3}}{\partial \overset{s}{X_\alpha}} + \frac{\partial \overset{\langle 1\rangle}{u_\alpha}}{\partial \overset{s}{X_3}} = 0 \tag{5.171}$$

genügt. In gleicher Weise folgt aus der verbleibenden Gleichung

$$\frac{\partial \overset{\langle 3\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_3} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu+\mu'}\frac{\partial \overset{\langle 1\rangle}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{2(\lambda+\mu)+\mu'}{\lambda+2\mu+\mu'}\frac{\partial \overset{\langle 1\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}\frac{\partial \overset{\langle 1\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}, \tag{5.172}$$

so dass schließlich

$$\sigma^{ss}_{ij}(h; \overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{\langle 0\rangle}{\sigma}_{ij}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h) \tag{5.173}$$

folgt. Wenn $\overset{\langle 0\rangle}{\sigma}_{ij}$ nicht verschwindet, ist diese Größe der führende Term der skalierten Spannung.

Im letzten Schritt dividieren wir (5.164) durch h^4 und bilden $h \to 0$. Es verbleibt

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\omega} p^{ss}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\,\overset{ss-}{v}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\,d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2 \\ &= \iiint\limits_{\Omega^s} \sigma^{\langle 0\rangle}_{kj}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_k(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} + \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_k}\frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_j} \right) d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2\,d\overset{s}{X}_3. \end{aligned} \tag{5.174}$$

Schränken wir unsere zulässigen Testfunktionen auf solche ein, die entsprechend der Forderung $V)$ wie die führenden Terme der skalierten Verschiebung ein *Kirchhoff-Love*-Verschiebungsfeld bilden, d.h. der Bedingung $\frac{\partial \overset{ss}{v}_i}{\partial \overset{s}{X}_3} = -\frac{\partial \overset{ss}{v}_3}{\partial \overset{s}{X}_i}$ genügen, verbleibt

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\omega} p^{ss}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\,\overset{ss-}{v}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)\,d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2 \\ &= \iiint\limits_{\Omega^s} \sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \left(\frac{\partial \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\beta} + \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}\frac{\partial \overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right) d\overset{s}{X}_1\,d\overset{s}{X}_2\,d\overset{s}{X}_3, \end{aligned} \tag{5.175}$$

mit

$$\begin{aligned}\sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta} &= \lambda\frac{2\mu+\mu'}{\lambda+2\mu+\mu'}\left(\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_\gamma}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} + \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\gamma}\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\gamma} \right)\delta_{\alpha\beta} \\ &\quad + \mu'\left(\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_{\underline{\alpha}}}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} + \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}}\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_{\underline{\alpha}}} \right)\delta_{\alpha\beta} + \mu\left(\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_\beta}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} + \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_\alpha}{\partial \overset{s}{X}_\beta} + \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \right). \end{aligned} \tag{5.176}$$

Ein Vergleich mit (5.26) zeigt, dass der gefundene Zusammenhang zwischen den führenden Termen der skalierten Spannungen $\sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}$ und der skalierten

Verschiebungsgradienten $\frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{u}_i}{\partial \overset{s}{X}_\beta}$ dem auf klassischem Wege hergeleiteten Materialgesetz für dünne Platten moderater Durchbiegungen entspricht. Bemerkenswert ist außerdem, dass die Spannungskomponenten $\sigma^{\langle 0\rangle}_{3i}$ für diese Wahl der Testfunktionen in der schwachen Formulierung überhaupt nicht mehr auftreten.

Für beide *Kirchhoff-Love*-Verschiebungsfelder schreiben wir nun

$$\overset{\langle 0\rangle}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{\langle 0\rangle}{U}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \quad \text{und} \quad \overset{\langle 0\rangle}{u}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{\langle 0\rangle}{U}_\alpha(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) - \overset{s}{X}_3 \, \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{U}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \tag{5.177}$$

sowie

$$\overset{ss}{v}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{ss}{V}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \quad \text{und} \quad \overset{ss}{v}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = \overset{ss}{V}_\alpha(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) - \overset{s}{X}_3 \, \frac{\partial \overset{ss}{V}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\alpha}. \tag{5.178}$$

Setzen wir (5.178) in (5.176) ein und wählen $\overset{ss}{V}_3 = 0$, verbleibt

$$0 = \iint\limits_\omega \left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, \overset{s}{X}_3) \, d\overset{s}{X}_3 \right) \frac{\partial \overset{ss}{V}_\alpha(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \,. \tag{5.179}$$

Wählen wir hingegen in (5.176) $\overset{ss}{V}_\alpha = 0$, verbleibt

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_\omega p^{ss}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \; \overset{ss}{V}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \\
&\quad = \iint\limits_\omega \left(\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, \overset{s}{X}_3) d\overset{s}{X}_3 \right) \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{U}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{V}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \right. \\
&\quad \left. - \left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2, \overset{s}{X}_3) \, \overset{s}{X}_3 \, d\overset{s}{X}_3 \right) \frac{\partial^2 \overset{ss}{V}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\alpha \, \partial \overset{s}{X}_\beta} \right) d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \,.
\end{aligned} \tag{5.180}$$

Analog zu (5.29) und (5.30) lassen sich auch hier die führenden Terme von skalierten Schnittkraft- und Schnittmomententensoren definieren, so dass

(5.179) und (5.180) auch durch

$$0 = \iint\limits_{\omega} N^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \frac{\partial \overset{ss}{V}_\alpha(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \tag{5.181}$$

und

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\omega} p^{ss}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \;\; \overset{ss}{V}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \\ &\quad = \iint\limits_{\omega} \Bigg(N^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \frac{\partial \overset{\langle 0\rangle}{U}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\alpha} \frac{\partial \overset{ss}{V}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\beta} \\ &\qquad - M^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \frac{\partial^2 \overset{ss}{V}_3(\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2)}{\partial \overset{s}{X}_\alpha \, \partial \overset{s}{X}_\beta} \Bigg) \, d\overset{s}{X}_1 \, d\overset{s}{X}_2 \end{aligned} \tag{5.182}$$

beschrieben werden können. Beide Gleichungen bilden analog zu (B.4) und (B.6) die schwache Formulierung eines Feldgleichungssystems, dass nur noch von $\overset{\langle 0\rangle}{U}_i$ abhängt. Die zugehörigen Differentialgleichungen lauten

$$\frac{\partial N^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}}{\partial \overset{s}{X}_\beta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \overset{\langle 0\rangle}{M}_{\alpha\beta}}{\partial \overset{s}{X}_\alpha \, \partial \overset{s}{X}_\beta} + \overset{\langle 0\rangle}{N}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \overset{\langle 0\rangle}{U}_3}{\partial \overset{s}{X}_\alpha \, \partial \overset{s}{X}_\beta} = -p^{ss}. \tag{5.183}$$

Die Randbedingungen für das Randwertproblem ergeben sich aus den gleichen Umformungen, wie sie im Anhang Abschnitt B.1.2 dargestellt sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} n^R_\alpha \overset{(0)}{N}_{\alpha\beta} n^R_\beta &= 0 \quad \forall (\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \in \partial\omega, && (5.184) \\ s^R_\alpha \overset{(0)}{N}_{\alpha\beta} n^R_\beta &= 0 \quad \forall (X_1, X_2) \in \partial\omega \quad \text{mit} \quad (\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \neq (R^A, 0), \\ & \qquad (\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \neq (0, R^A), \; (\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \neq (-R^A, 0) && (5.185) \\ n^R_\alpha \overset{(0)}{M}_{\alpha\beta} n^R_\beta &= 0 \quad \forall (\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \in \partial\omega \quad \text{und} && (5.186) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \frac{\overset{(0)}{M}_{\alpha\beta}}{\partial \overset{s}{X}_\beta} n^R_\alpha + n^R_\alpha \overset{(0)}{N}_{\alpha\beta} s^R_\beta \frac{\partial \overset{(0)}{U}_3}{\partial s} + \frac{\partial s^R_\alpha \overset{(0)}{M}_{\alpha\beta} n^R_\beta}{\partial s} \\ & \qquad \forall (\overset{s}{X}_1, \overset{s}{X}_2) \in \partial\omega. \end{aligned} \tag{5.187}$$

Ist $\overset{\langle 0\rangle}{U}_i$ bekannt, sind auch $N^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}$ und $M^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}$ bekannt. Analog zu (5.56) lässt sich $\sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}$ gemäß (5.176) auch durch die Schnittkräfte und -momente ausdrücken.

Es gilt

$$\sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = N^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) + 12\,\overset{s}{X}_3\,M^{\langle 0\rangle}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2). \tag{5.188}$$

Um auch $\sigma^{\langle 0\rangle}_{i3}$ für bekannte $\overset{\langle 0\rangle}{U}_i$ aus der schwachen Formulierung zu gewinnen, müssten wir in (5.174) Testfunktionen $\overset{ss}{v}_i$ zulassen, die kein *Kirchhoff-Love*-Verschiebungsfeld bilden. Es lässt sich jedoch zeigen, dass zur Erfüllung von $\sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha 3} = 0$ in $\partial\omega\times]-1/2,1/2[$ die Erfüllung von $\overset{(0)}{M}_{\alpha\beta}\,n^R_\beta$ in $\partial\omega\times]-1/2,1/2[$ nötig ist[24]. Dies ist im allgemeinen nicht möglich. Im hier betrachteten Fall lässt sich $\overset{(0)}{M}_{\alpha\beta}\,n^R_\beta$ auf $\partial\omega\times]-1/2,1/2[$ nur für isotropes Material erfüllen. Wir können uns deshalb nur ein $\sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha 3} = 0$ beschaffen, welches am schmalen Plattenrand nicht die 3D-Randbedingung erfüllt. Das Vorgehen ist identisch zum Abschnitt 5.3.7 bei der klassischen Herleitung. Aus $\frac{\partial\sigma^{\langle 0\rangle}_{\alpha j}(\overset{s}{\boldsymbol{X}})}{\partial\,\overset{s}{X}_j} = 0$ folgt

$$\overset{\langle 0\rangle}{\sigma}_{\alpha 3}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3) = 6\left(\frac{1}{4} - \left(\overset{s}{X}_3\right)^2\right)\frac{\partial\,\overset{\langle 0\rangle}{M}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)}{\partial\,\overset{s}{X}_\beta}. \tag{5.189}$$

und daraus schließlich

$$\begin{aligned}
&\sigma^{\langle 0\rangle}_{33}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2,\overset{s}{X}_3)\\
&\quad= \left(\frac{1}{4} - \overset{s}{X}_3{}^2\right) 2\Big(\overset{s}{X}_3\,\overset{\langle 0\rangle}{N}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2) + 3\,\overset{\langle 0\rangle}{M}_{\alpha\beta}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\Big)\frac{\partial^2\,\overset{\langle 0\rangle}{U}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha\,\partial\,\overset{s}{X}_\beta}\\
&\qquad\qquad + \left(2\,\overset{s}{X}_3\left(\frac{3}{4} - \overset{s}{X}_3{}^2\right) - \frac{1}{2}\right)\overset{ss}{p}(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2).
\end{aligned} \tag{5.190}$$

5.4.5 Reskalierung, Identifizierung der klassischen Plattengrößen

Wir kehren jetzt ins ursprüngliche Koordinatensystem zurück. Dazu betrachten wir die Skalierungsvorschriften (5.64), (5.76) und (5.77) sowie die Beziehungen (5.61) und (5.65). Es gilt

$$u_\alpha(\boldsymbol{X}) = \overset{h}{u}_\alpha(h;\boldsymbol{X}) = \overset{s}{u}_\alpha(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = h^2\,\overset{ss}{u}_\alpha(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}})$$

und

$$u_3(\boldsymbol{X}) = \overset{h}{u}_3(h;\boldsymbol{X}) = \overset{s}{u}_3(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = h\,\overset{ss}{u}_3(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}).$$

Zusätzlich definieren wir jetzt die Verschiebungen

$$u_3^P(\boldsymbol{X}) := h\,\overset{(1)}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = h\,\overset{\langle 0\rangle}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) \tag{5.191}$$

und

$$u^P_\alpha(\boldsymbol{X}) := h^2\,\overset{(2)}{u}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = h^2\,\overset{\langle 0\rangle}{u}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}}), \tag{5.192}$$

die wir als Verschiebungen des *von Kármán*'schen Plattenproblems identifizieren können.

Aus der asymptotischen Entwicklung des ursprünglichen 3D-Problems folgt nun

$$\begin{aligned}\overset{h}{u}_3(h;\boldsymbol{X}) &= h\,\overset{ss}{u}_3(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = h\left(\overset{\langle 0\rangle}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h)\right) = h\,\overset{\langle 0\rangle}{u}_3(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h^2)\\ &= h\,\overset{\langle 0\rangle}{U}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\ + O(h^2)\\ &= U_3^P(X_1,X_2)\ + O(h^2)\\ &= u_3^P(\boldsymbol{X})\ + O(h^2) = O(h)\end{aligned} \tag{5.193}$$

und

$$\begin{aligned}\overset{h}{u}_\alpha(h;\boldsymbol{X}) &= h^2\,\overset{ss}{u}_\alpha(h;\overset{s}{\boldsymbol{X}}) = h^2\left(\overset{\langle 0\rangle}{u}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h)\right) = h^2\,\overset{\langle 0\rangle}{u}_\alpha(\overset{s}{\boldsymbol{X}}) + O(h^3)\\ &= h^2\,\overset{\langle 0\rangle}{U}_\alpha(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)\ - h^2\,\overset{s}{X}_3\,\frac{\partial\,\overset{\langle 0\rangle}{U}_3(\overset{s}{X}_1,\overset{s}{X}_2)}{\partial\,\overset{s}{X}_\alpha} + O(h^3)\\ &= U_\alpha^P(X_1,X_2)\ - X_3\frac{\partial U_3^P(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha} + O(h^3)\\ &= u_\alpha^P(\boldsymbol{X})\ + O(h^3) = O(h^2).\end{aligned} \tag{5.194}$$

Dabei gilt entsprechend der Bezeichnungen im Abschnitt 5.3 $U_3 = W$ bzw. $U_3^P = W^P$, wobei wir zur Unterscheidung zu den Größen des Original-3D-Problems die Plattengrößen mit einem oberen Index P versehen.

In gleicher Weise können wir nun auch die mit der Plattentheorie berechneten Spannungen als die führenden Terme der formal asymptotischen Entwicklung interpretieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} &= \sigma^P_{\alpha\beta} + O(h^3) = O(h^2),\ \sigma_{\alpha 3} = \sigma^P_{\alpha 3} + O(h^3) = O(h^3) \quad \text{und}\\ \sigma_{33} &= \sigma^P_{33} + O(h^4) = O(h^4).\end{aligned} \tag{5.195}$$

Bemerkung

> Hätten wir ein 3D-Problem formuliert, in dem statt der Spannungsrandbedingung $\sigma_{\alpha 3} = 0$ die Verschiebungsrandbedingung $\frac{\partial u_3(\boldsymbol{X})}{\partial X_3} = 0$ in $\partial\omega\times]-h/2, h/2[$ gefordert wird, würde fast das gleiche Plattenproblem resultieren. Es ergeben sich die gleichen Verschiebungs- und Spannungsfelder. Der einzige Unterschied

ist, dass sich $\overset{\langle 0 \rangle}{\sigma}_{i3}$ aus der schwachen Formulierung herleiten lässt. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &= \sigma^P_{\alpha 3} + O(h^4) = O(h^3) \quad \text{und} \\ \sigma_{33} &= \sigma^P_{33} + O(h^5) = O(h^4). \end{aligned}$$

Die am Rand resultierende Spannung $\sigma^P_{\alpha 3}$ liesse sich dann als diejenige Spannung interpretieren, die notwendig ist, um den Rand in 33-Richtung unverzerrt zu lassen.

5.5 Zusammenfassung und Folgerungen zur Anwendbarkeit der *von Kármán*'schen Plattentheorie

Betrachten wir als Ausgangspunkt das nichtlineare 3D-Problem einer dünnen elastischen Platte aus *Saint-Venant–Kirchhoff*'schen Material, die frei abgleitbar auf einer starren Stütze liegt, und sich unter einer Randlast auf der Deckfläche verbiegt. Die übrigen Plattenränder sollen spannungsfrei sein. Wir formulieren die Impulsbilanz für den quasistatischen Fall in der Bezugsplatzierung. Nehmen wir für die Unbekannten eine formal asymptotische Entwicklung nach einem Kleinheitsparameter an, der proportional zur Plattendicke ist, erhalten wir für $h \to 0$ ein System von Gleichungen, dass nur noch die führenden Terme der Unbekannten enthält. Unter der Forderung, dass die Linearisierung der Gleichungen der führenden Terme bezüglich des lastfreien Zustands die gleiche Lösung haben soll, wie die führenden Gleichungen des 3D-Problems, das entsteht, wenn die Linearisierung vor dem Grenzübergang vorgenommen wird, sind die führenden Gleichungen eines solchen nichtlinearen Problems äquivalent zu den *von Kármán*'schen Gleichungen.

Daraus ergibt sich, dass die *von Kármán*'schen Gleichungen nur für eine Platte exakt sind, deren Dicke gegen Null geht. Nur dann, wenn die Plattendicke gegen Null geht, sind die Terme höherer Ordnung gegenüber den führenden Termen vernachlässigbar klein. Da die führenden Terme von u_3 proportional zu h und die führenden Terme von u_α proportional zu h^2 sind, wird für $h \to 0$ der Betrag von u_α gegen den Betrag von u_3 vernachlässigbar klein. Soll dass reale Problem endlicher Dicke in ausreichender Genauigkeit durch die *von Kármán*'sche Theorie beschrieben werden, muss demnach $h \ll 1$ gelten, wobei wir einen dimensionslosen Platten- bzw. Stützringdurchmesser nahe 1 betrachten, und $|u_\alpha| \ll |u_3| \ll 1$. Dies sind genau die Forderungen (5.7) und (5.8) aus der klassischen Herleitung.

In gleicher Weise lassen sich die Forderungen (5.15)und (5.16) der klassischen Herleitung für die Spannungen begründen, da auch hier die führenden Terme proportional zu unterschiedlichen Potenzen von h sind. Die Gültigkeit dieser Annahmen rechtfertigt letztlich das 2D-Materialgesetz entsprechend dem ebenen Spannungszustand.

Da die führenden Terme der Verschiebungen ein *Kirchhoff-Love*-Verschiebungsfeld bilden, ist auch diese Annahme für das gesamte Verschiebungsfeld letztlich dann gerechtfertigt, wenn alle Kleinheitsannahmen erfüllt sind.

Mit Hilfe der *von Kármán*'schen Plattentheorie lassen sich im allgemeinen keine Schubspannungsfelder berechnen, die am schmalen Plattenrand verschwinden. Stattdessen kann am Rand nur der Wert für die aus beiden Schubspannungen resultierende Ersatzquerkraft zu Null vorgegeben werden. Diese Ungenauigkeit hat auf die Berechnung des Verschiebungsfeldes und die Spannungskomponenten bei Erfüllung aller Kleinheitsforderungen keinen Einfluss, da die punktweise Erfüllung dieser Randbedingung für die Lösung des *von Kármán*'schen Plattenproblem ohne Einfluss ist.

Die führenden Terme der Spannungen σ_{i3} hängen nicht mehr wie im ursprünglichen Problem über konstitutive Gleichungen von den Verschiebungen ab, sondern resultieren aus der Impulsbilanz und den Randwerten der Spannungen auf der Deckfläche. Dies ist deshalb möglich, weil ein Teil der Unbekannten in der 3D-Impulsbilanz der führenden Terme bereits durch die Lösung der *von Kármán*'schen Plattengleichungen bestimmt wurde. Die drei Bilanzgleichungen sind jetzt drei Bestimmungsgleichungen für die drei Unbekannten σ_{i3}. Dabei gehen in die so ermittelten Spannungen nur die jeweiligen Randwerte der Deckflächen ein, so dass es letztlich nicht möglich ist, die ursprünglichen Spannungsrandbedingungen für $\sigma_{\alpha 3}$ auf dem schmalen Plattenrand zu erfüllen. Bei Erfüllung der Kleinheitsforderungen kann wegen des Prinzips von *Saint Venant* davon ausgegangen werden, dass sich der tatsächliche Schubspannungsverlauf nach einem gewissen Abstand vom Rand kaum von der Näherung unterscheidet, die mit der Plattentheorie gewonnen wurde, da die Schubspannungsrandbedingungen zumindest statisch äquivalent erfüllt werden.

Weiter folgern wir: Unterscheiden sich die Lösungen nach der 2D-Plattentheorie für zwei unterschiedlich dünne Platten beim Übergang auf skalierte Größen nicht, approximiert die Lösung nach der Plattentheorie das Original-Problem für die dünnere Platte genauer als für die dickere Platte.

Anhand konkreter Rechnungen am Schluss des Kapitels 7 lässt sich für die gegebenen Daten zeigen, dass $|u_\alpha| \ll |u_3| \ll 1$ überall erfüllt wird. Hingegen gilt $|\sigma_{33}| \ll |\sigma_{\alpha 3}| \ll \|\sigma_{\alpha\beta}\|$ nur fast überall. Eine Verletzung dieser Bedingungen liegt in den Kontaktbereichen vor. Die Breite der Kontaktbereiche sind klein gegenüber dem Plattendurchmesser, denn der Kontaktbereich zum Stützring ist als Linie idealisiert worden und der Kontaktbereich zur Druckkugel liegt in der Größenordnung der Plattendicke. Wegen des Prinzips von *Saint Venant* treten die Abweichungen von der Plattenlösung nur in einer gewissen Umgebung dieser Bereiche auf. Innerhalb dieser Bereiche muss deshalb mit nicht zu vernachlässigenden Abweichungen des tatsächlichen

Verschiebungsfeldes von einem *Kirchhoff-Love*-Verschiebungsfeld gerechnet werden. Ebenso ist ein tatsächliches Spannungsfeld zu erwarten, dass in nicht zu vernachlässigender Weise vom ebenen Spannungszustand abweicht.

Während die Abweichungen der Spannungen am Stützring zur Bestimmung der maximalen Zugspannung kaum von Interesse sind, fällt der Ort der maximalen Zugspannung genau in den Bereich, wo die *von Kármán*'sche Plattentheorie als schlechte Näherung anzusehen ist. Deshalb muss dieser Bereich gesondert untersucht werden. Die Berechnung der Randlast erfolgt im nächsten Kapitel, die Berechnung der maximalen Zugspannung nach der Plattentheorie erfolgt numerisch mit dem im Kapitel 7 beschriebenen Finite-Element-Programm. Eine genaue 3D-Untersuchung der Umgebung der Kontaktfläche erfolgt im Kapitel 8.

5.6 Anmerkungen zur Entstehung der *von Kármán*'schen Plattengleichungen

Während die vollständige Formulierung des linearen Problems für dünne Platten bereits im Jahre 1850 durch *Kirchhoff* abgeschlossen wurde [63], formuliert *Kirchhoff* ein viertel Jahrhundert später über das Prinzip der virtuellen Verrückungen die schwache Formulierung des in dieser Arbeit nach *von Kármán* benannten nichtlinearen Plattenproblems [64]. Er führte in dieser Arbeit bereits Verzerrungen ein, die den Komponenten $G^P_{\alpha\beta}$ des *Green*'schen Verzerrungstensors der Plattentheorie gemäß (5.14) entsprechen. Die vollständigen Differentialgleichungen des statischen Gleichgewichts und die zugehörigen Randbedingungen leitete er jedoch nicht her, obwohl er bereits sämtliche Grundlagen formulierte.

Wegen dieses frühen richtigen Resultates wird die daraus resultierende Plattentheorie von französischen Autoren nichtlineare *Kirchhoff*'sche Plattentheorie genannt, so auch von *Ciarlet* und *Destuynder* in [26] und [24]. Sie verwenden die Bezeichnung dann, wenn die schmalen Plattenränder eingespannt oder spannungsfrei sind. Werden am schmalen Plattenrand hingegen auch von Null verschiedene Normalspannungen vorgegeben, bezeichnen sie das resultierende Problem als ein *von Kármán*'sches Plattenproblem. Bei dieser Bezeichnung ist bei einem *von Kármán*'schen Plattenproblem Ausbeulen möglich, bei einem nichtlinearen *Kirchhoff*'schen Plattenproblem jedoch nicht.

Als Vorläuferarbeit der nichtlinearen Plattengleichungen, kann auch die lineare Plattengleichung von *Clebsch* aus dem Jahre 1862 betrachtet werden [27]. Er gab dort eine Biegegleichung in Form von (5.36) an, wobei er die Membrankräfte $N_{\alpha\beta}$ als konstant ohne Deviatoranteil annahm, d.h es gilt bei ihm $N_{\alpha\beta} = T\delta_{\alpha\beta}$, wobei T als konstant vorgegeben wurde.

Saint-Venant erweiterte 1883 in den Anmerkungen zur französischen Übersetzung dieses Buches die Biegegleichung derart, dass auch konstante

Membrankrafttensoren vorgegeben werden können, die deviatorische Anteile haben [28]. Biegegleichungen dieser Art wurden 1891 auch von *Bryan* zur Untersuchung von Platten-Beulproblemen verwendet [15].

Bubnow wendete als erster nichtlineare Plattengleichungen auf reale Probleme an [16] [13]. Er gab analytische und Näherungslösungen für verschiedene Biegeprobleme zylindrisch ausbiegender Plattenstreifen an. Unter Plattenstreifen werden Platten verstanden, die in eine Richtung unendlich lang sind. Auf diese Weise konnte er bereits im Jahre 1902 erfolgreich Dimensionierungsaufgaben für Schiffsbeplankungen lösen. Die von *Bubnow* verwendeten Näherungsmethoden lassen sich auch als Vorläuferarbeiten für heute verwendete Finite-Element-Techniken betrachten. Noch heute werden bestimmte Näherungsmethoden, die auf einer schwachen Formulierung von Randwertproblemen beruhen, als *Bubnow-Galjorkin*-Methoden bezeichnet. Darunter fällt auch die im Kapitel 7 vorgestellte FE-Methode.

Föppl gab 1907 in [41] ein System von Plattengleichungen an, das der endgültigen Form der nichtlinearen Plattengleichung schon fast entspricht. Es fehlte lediglich die Biegesteifigkeit in Gleichung (5.36), d.h. bei ihm galt $\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}$ als vernachlässigbar. *Föppl* ging davon aus, dass bei hinreichend dünnen Platten die Biegesteifigkeit vernachlässigbar ist. *Wolmir* bezeichnet diese Theorie deshalb auch als Theorie von absolut biegsamen Platten.

Im Jahre 1910 ergänzte *von Kármán* unter Hinweis auf die *Bubnow*'schen Arbeiten zur Dimensionierung von Schiffsbeplankungen die *Föppl*'sche Biegegleichung um den Term, der die Biegesteifigkeit berücksichtigt. Er formulierte als erster die Gleichgewichtsbedingungen vollständig.

Während einige Autoren aus dem deutschen Sprachraum die endgültigen Gleichungen als *Föppl–von-Kármán*-Gleichungen bezeichnen, heißen diese Gleichungen bei einigen Autoren im russischen Sprachraum nach *Bubnow* und *von Kármán*. Als konkrete Randbedingungen werden in der Originalarbeit bei *von Kármán* jedoch nur eingespannte oder spannungsfreie Ränder in Betracht gezogen, also keine Beulprobleme. Im Unterschied zum *Euler*'schen Knickstab und zum *Bernoulli*'schen Biegebalken ist die bereits oben erwähnte, im französischen Sprachraum übliche Unterscheidung zwischen nichtlinearer *Kirchhoff*-Theorie und *von Kármán*-Theorie nicht nachvollziehbar.

5.7 *Von Kármán*-Theorie versus invariante nichtlineare Membrantheorie und invariante nichtlineare Biegetheorie

Während das ursprüngliche 3D-Problem invariant gegenüber Starrkörperdrehungen ist, gilt dies für die *von Kármán*-Theorie nicht mehr. Der *Green*'sche Verzerrungstensor der *von Kármán*-Theorie $\boldsymbol{G}^P$ vermag es im Gegensatz zum echten *Green*'schen Verzerrungstensor $\boldsymbol{G}$ nicht, Starrkörperdrehungen verzerrungsfrei abzubilden. Um mit der *von Kármán*-Theorie realistische Ergebnisse zu erzielen, müssen die aus einer Starrkörperdrehung resultierenden Verschiebungen in den horizontalen Verschiebungskomponenten klein gegen die Plattendicke sein und in den vertikalen Verschiebungen klein gegen den Plattendurchmesser sein. Nur dann bleiben die fälschlich erzeugten Verzerrungen gegenüber den echten Verzerrungen vernachlässigbar klein.

Plattentheorien für große Starrkörperrotationen müssen deshalb invariant gegen solche Drehungen sein. Zwei bekannte invariante Theorien sind die nichtlineare Membrantheorie und die invariante nichtlineare Biegetheorie. Letztere wird auch ausdehungsfreie Theorie genannt.

Allen drei Theorien gemeinsam ist die Verwendung eines Materialgesetzes, welches dem des ebenen Spannungszustands entspricht, d.h. der verwendete 2D-Steifigkeitstensor $c^P_{\alpha\beta\gamma\rho}$ ist durch (5.24) definiert. Außerdem werden die Verschiebungen u_i in der gesamten Platte durch die Mittelflächenverschiebungen U_i ausgedrückt.

In der nichtlinearen Membrantheorie werden Biegeeffekte völlig vernachlässigt, d.h. es treten keine Biegemomente $\boldsymbol{M}$ auf. Außerdem gilt $u_i^M(\boldsymbol{X}) = U_i(X_1, X_2)$. Dafür werden im 2D-Materialgesetz für die Berechnung des Membrankrafttensors $\boldsymbol{N}$ und in der Impulsbilanz im Vergleich zur *von Kármán*'schen Theorie zusätzliche nichtlineare Terme des Verschiebungsgradienten berücksichtigt. Der *Green*'sche Verzerrungstensor dieser 2D-Theorie lautet $G^M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_\alpha}{X_\beta} + \frac{U_\beta}{X_\alpha} + \frac{U_i}{X_\beta}\frac{U_i}{X_\alpha}\right)$. Mit dieser Theorie könnte z.B. die Berechnung der Spannungen eines Trampolintuchs erfolgen. Wird die nichtlineare Membrangleichung bezüglich der Bezugsplatzierung linearisiert, ergibt sich die Scheibengleichung der linearen *Kirchhoff*-Theorie. Werden keine deviatorischen Spannungsanteile zugelassen, führt die Linearisierung der nichtlineare Membrangleichung bezüglich der Momentanplatzierung auf die klassische lineare Membrantheorie.

In der nichtlinearen Biegetheorie werden die Membrankräfte $\boldsymbol{N}$ komplett vernachlässigt. Die Verschiebungen haben die Darstellung $u_i^F(\boldsymbol{X}) = U_i(X_1, X_2) + X_3\theta_i(\boldsymbol{U}(X_1, X_2))$

Die Besonderheit bei dieser Theorie ist, dass die Mittelfläche nicht gedehnt wird, da $G^F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{X}) = -X_3\frac{\partial^2 U_i(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} n_i$ mit

$$n_i = \frac{\frac{\partial U_j(X_1,X_2)}{\partial X_1}\varepsilon_{lij}\frac{\partial U_l(X_1,X_2)}{\partial X_2}}{\sqrt{\frac{\partial U_m(X_1,X_2)}{\partial X_1}\varepsilon_{nkm}\frac{\partial U_n(X_1,X_2)}{\partial X_2}\frac{\partial U_p(X_1,X_2)}{\partial X_1}\varepsilon_{qkp}\frac{\partial U_q(X_1,X_2)}{\partial X_2}}}$$

gilt. Die Spannungen sind reine Biegespannungen und hängen über das 2D-Materialgesetz nur von den Krümmungen der ungedehnten Mittelfläche ab. Ein Anwendungsbeispiel hierfür ist das elastische „Zusammenrollen“ einer Overheadfolie oder eines Zeichenblattes, wenn plastische und Kriecheffekte vernachlässigt werden. Während die Mittelfläche dieser Folie ohne Längenänderung gekrümmt wird, werden die Außenflächen gestaucht oder gestreckt, so dass in der Folie nur Momente wirken. Werden die Biegegleichungen bezüglich der Momentanplatzierung linearisiert, verbleibt nur die lineare *Kirchhoff*'sche Biegegleichung.

Während sich die *von Kármán*'sche Theorie aus dem ursprünglichen 3D-Problem, dargestellt im skalierten Koordinatensystem, unter Annahme der folgenden Skalierungsvorschriften

$$\overset{s}{u}_3 = h\,\overset{ss}{u}_3, \quad \overset{s}{u}_\alpha = h^2\,\overset{ss}{u}_\alpha \quad \text{und} \quad \overset{s}{p} = h^4\overset{ss}{p},$$

entsprechend (5.76), (5.77) und (5.78) herleiten lässt, kann die Membrantheorie für die Annahmen

$$\overset{s}{u}_i = \overset{ss}{u}_i \quad \text{und} \quad \overset{s}{p} = h\overset{ss}{p},$$

und die Biegetheorie für die Annahmen

$$\overset{s}{u}_i = \overset{ss}{u}_i \quad \text{und} \quad \overset{s}{p} = h^3\overset{ss}{p}$$

durch asymptotische Entwicklung der Verschiebungen gerechtfertigt bzw. hergeleitet werden. Für detaillierte Ausführungen zu beiden invarianten Theorien, einschließlich zur Prozedur der asymptotischen Entwicklung und zu weiteren Literaturhinweisen, sei hier auf *Fox*, *Raoult* und *Simo* [43] verwiesen, sowie auf die beiden Bücher von *Ciarlet* [24] und [25].

Kapitel 6

Hertz'sche Pressung — Berechnung der äußeren Flächenlast und der Kontaktfläche zwischen Kugel und Platte

6.1 Das elastische Problem für den isotropen und für den kubisch symmetrischen Fall

Schließlich berechnen wir gemäß der *Hertz*'schen Theorie die Form und Größe der Kontaktfläche $\partial\Omega^f \subset \partial\Omega^-$ des Kugel-Platte-Systems sowie die Druckverteilung auf $\partial\Omega^f$. Dazu nehmen wir an, dass die Fläche gleich der ist, die sich ergibt, wenn mit einer Kugel auf einen elastischen Halbraum gedrückt wird. Dieses Problem wurde für isotrope Körper bereits im Jahr 1881 von *Heinrich Hertz* gelöst [54, 55].

Das Resultat lautet: Wird eine isotrope Stahlkugel mit dem Radius R_K, dem E-Modul E_S und der Querkontraktionszahl ν_S mit einer Kraft f auf einen ebenen isotropen Halbraum mit den elastischen Konstanten E und ν gedrückt, dann entsteht ein kreisrunde Kontaktfläche mit dem Radius

$$R_C = \sqrt[3]{3/4 \; f \; R_K \; k}, \tag{6.1}$$

wobei

$$k = \frac{1-\nu_S^2}{E_S} + \frac{1-\nu^2}{E} \tag{6.2}$$

die Summe der Kontaktnachgiebigkeiten ist.

Die Druckverteilung auf der Kontaktfläche lautet

$$p^f(r) = p_0^f \sqrt{1 - \left(r/R_C\right)^2} \quad \text{mit} \quad p_0^f = \frac{3f}{2\pi R_C^2},\ r = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \tag{6.3}$$

so dass

$$\iint\limits_{\partial\Omega^f} p^f\left(r(X_1, X_2)\right)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 = f \tag{6.4}$$

und

$$p_0^f = \frac{1}{I}\sqrt[3]{\frac{48f}{R_K^2}} \quad \text{mit} \quad I = 2\pi\ k^{\frac{2}{3}} \tag{6.5}$$

gilt.
Dieses Resultat wurde von *Willis* 1966 in [114] auf das Kontaktproblem zweier anisotroper Körper übertragen. Insbesondere untersuchte er den Kontakt einer starren Kugel auf einen ebenen kubisch elastischen Halbraum, dessen (100)-Ebene mit der Oberfläche des Halbraums übereinstimmt.

Hertz ließ nur solche glatt berandeten Kontaktflächen zu, deren Begrenzungslinie einer Ellipsengleichung genügt. Damit erhält er beim Pressen isotroper Kugeln auf isotrope Halbräume Kreisberandungen. *Willis* ließ als Kontaktflächen ebenfalls nur Ellipsen zu und erhält daher bei kubischer Symmetrie auch wieder nur die Kreisberandung. Eine solche Annahme trägt jedoch der kubischen Symmetrie des Materials nicht Rechnung.

In der vorliegenden Arbeit lassen wir eine Winkelabhängigkeit des Kontaktradius zu und erhalten für den betrachteten kubisch symmetrischen Fall keine Kreisfläche. Dazu gehen wir hier gemäß [35] wie folgt vor: Ausgangspunkt unserer Berechnung sind die *Hertz*'schen Formeln (6.1) bis (6.4). Allerdings berücksichtigen wir, dass der E-Modul und die Querkontraktionszahl im Falle eines Materials mit kubischer Symmetrie Funktionen der Richtung sind.

Wir betrachten jetzt einen kubischen Einkristall, dessen (100)-Ebene in der Ebene $X_3 = 0$ liegt[1], und dessen Hauptachsen um den Winkel φ bezüglich der X_1- und X_2-Achse des Beobachtersystems verdreht sind. Das Koordinatensystem, das mit dem Kristallhauptachsensystem zusammenfällt, lässt sich dann mit dem Koordinatensystem des Beobachters durch die Drehmatrix

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

identifizieren.

---

[1] Siehe Abbildung 6.1 auf der nächsten Seite sowie auch Abbildung 3.2 auf Seite 19 und Abbildung 4.2 auf Seite 38.

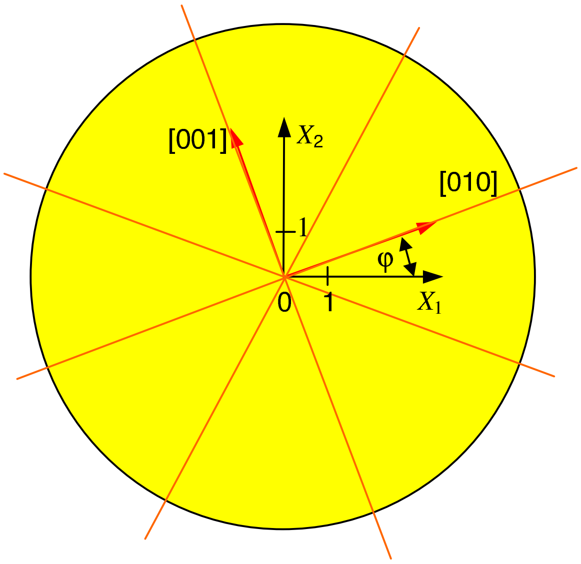

Abbildung 6.1: Das Kristallhauptachsensystem ist in der (100)-Ebene um den Winkel φ verdreht. Die dünnen orangen Linien sind die Symmetrielinien des kubischen Wafermaterials.

Mit Hilfe von $\boldsymbol{Q}$ kann nun der Nachgiebigkeitstensor für ein Material, welches die oben beschriebene Orientierung hat, durch den Nachgiebigkeitstensor s_{ijkl} eines Materials in der $\langle 100\rangle$-Orientierung ausgedrückt werden. Kennzeichnen wir die Nachgiebigkeit des um φ zur $\langle 100\rangle$-Orientierung gedrehten Kristalls durch $s_{ijkl}^{\langle\varphi\rangle}$, gilt zwischen beiden Tensoren die Beziehung:

$$s_{ijkl}^{\langle\varphi\rangle} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lq}s_{mnpq}. \tag{6.7}$$

Durch die kubische Symmetrie folgt für alle $N \in \mathbb{G}$: $s_{ijmn}^{\langle N\pi/2\rangle} = s_{ijmn}$. Der E-Modul und die Querkontraktionszahl für eine um φ verdrehte Orientierung kann dann ebenfalls durch den hochgestellten Index $\langle\varphi\rangle$ gekennzeichnet werden. Wir erhalten unter Verwendung von (A.5), (A.6) und (A.3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{E^{\langle\varphi\rangle}} = s_{1111}^{\langle\varphi\rangle} &= Q_{1m}Q_{1n}Q_{1p}Q_{1q}s_{mnpq} \\ &= s_{11} - 2\left(s_{11} - s_{12} - \frac{s_{44}}{2}\right) Q_{11}^2 Q_{12}^2 \\ &= s_{11} - \frac{1}{2}\left(s_{11} - s_{12} - \frac{s_{44}}{2}\right)\sin^2(2\varphi)\end{aligned} \tag{6.8}$$

sowie

$$\begin{aligned}\nu^{\langle\varphi\rangle} &= -E^{\langle\varphi\rangle} s_{1122}^{\langle\varphi\rangle} = -E^{\langle\varphi\rangle} Q_{1m} Q_{1n} Q_{2p} Q_{2q} s_{mnpq} \\ &= -E^{\langle\varphi\rangle}\left(s_{12} + \frac{1}{2}\left(s_{11} - s_{12} - \frac{s_{44}}{2}\right)\sin^2(2\varphi)\right).\end{aligned} \tag{6.9}$$

Die Verallgemeinerung von (6.1) ist

$$R_C(\varphi) = \sqrt[3]{3/4\ f\ R_K\ k^{\langle\varphi\rangle}}, \tag{6.10}$$

mit

$$k^{\langle\varphi\rangle} = \frac{1-\nu_S^2}{E_S} + \frac{1-(\nu^{\langle\varphi\rangle})^2}{E^{\langle\varphi\rangle}}. \tag{6.11}$$

Der Vergleich der mit (6.11) berechneten Kontaktfläche mit den Kontaktflächen, die nach den verschiedenen isotropen 3D-Näherungsformeln gemäß Tabelle A.4 auf Seite 199 berechnet wurden, zeigt, dass die Kontaktfläche tatsächlich kein Kreis ist. Wie in der Abbildung 6.2 zu sehen, liefern die verschiedenen isotropen 3D-Näherungen nahezu gleiche Kontaktradien, die mit dem Kontaktradius der ⟨110⟩-Orientierung des kubischen Materials übereinstimmen. Eine detaillierte Liste der verschiedenen resultierenden Lastradien ist in Tabelle 6.1 enthalten. Dabei fällt auf, dass die *Voigt*'schen und

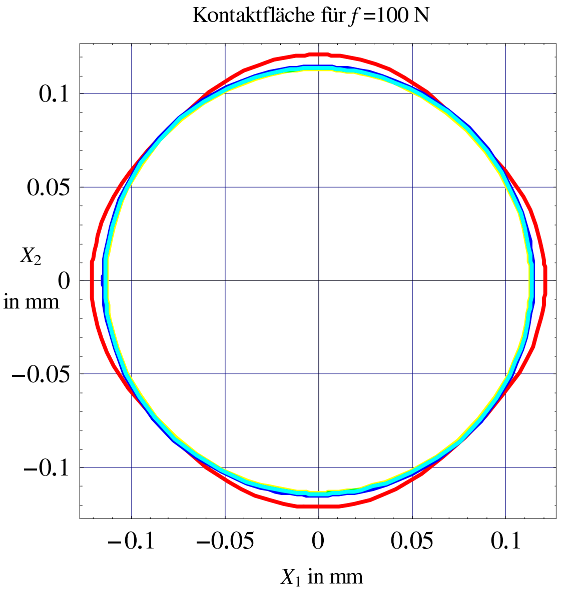

Abbildung 6.2: Kontaktfläche zwischen einem ⟨100⟩-orientierten GaAs-Halbraum und einer Stahlkugel mit Radius R_K bei einer Druckkraft $f = 100$ N bei Annahme von rein elastischem Materialverhalten. Rot: Druckfläche in der (100)-Ebene. Die Kreisflächen resultieren aus isotropen 3D-Näherungen. Blau: *Reuss*, Türkis: *Hill* und *Eisenberg*, Gelb: *Voigt*.

Kraft	Radien exakt oder nach 3D-Mittelungsformel in mm					
in N	⟨100⟩	⟨110⟩	*Voigt*	*Eisenberg*	*Reuss*	*Hill*
50	0,09607	0,09076	0,08985	0,09042	0,09107	0,09044
100	0,12104	0,11435	0,11321	0,11393	0,11474	0,11395
150	0,13856	0,13090	0,12959	0,13042	0,13134	0,13044
200	0,15251	0,14407	0,14264	0,14355	0,14456	0,14356
250	0,16428	0,15520	0,15365	0,15463	0,15572	0,15465
300	0,17458	0,16492	0,16328	0,16432	0,16548	0,16434
350	0,18378	0,17362	0,17189	0,17298	0,17420	0,17301
400	0,19215	0,18152	0,17971	0,18086	0,18213	0,18088
450	0,19984	0,18879	0,18691	0,18810	0,18942	0,18812

Tabelle 6.1: Lastradien in Abhängigkeit von der Druckkraft, der Orientierung des Einkristalls und den isotropen 3D-Näherungsformeln nach *Voigt*, *Eisenberg*, *Reuss* und *Hill* für GaAs.

Reuss'schen Mittelungen tatsächlich die kleinsten und die größten isotropen Lastradien liefern, was ihrem Schrankencharakter entspricht. Jedoch liegt der anisotrope Radius nicht zwischen diesen beiden Mitteln.

Zu einer etwas besseren Approximation der Kontaktfläche gelangen wir mit Hilfe der im Anhang, Abschnitt B.3.3, beschriebenen isotropen 2D-Näherungen. Wir erkennen in Abbildung 6.3, dass die resultierenden isotropen Kontaktflächen zwar immer noch kleiner als die Konktaktfläche des anisotropen Materials sind, jedoch etwas größer als die aus den 3D-Mittelungen resultierenden Kontaktflächen sind. Auch hier sind die Mittelungen nach *Eisenberg* und *Hill*, wie auch in Tabelle 6.2 zu sehen, praktisch kaum zu unterscheiden.

Aus Abbildung 6.4 erkennen wir, dass für Kräfte im Bereich zwischen 50 und 450 N die Kontaktflächen einen Durchmesser von rund $1/4\ h$ bis $2/3\ h$ erreichen. Dies ist gerade der Bereich, für den sich der Waferhersteller bezüglich des Bruchverhaltens interessiert. Für kleinere Lasten, bei denen die resultierenden Durchbiegungen ausreichend klein für die Anwendung der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie sind, resultieren Kontaktflächendurchmesser, die sehr viel kleiner als die Plattendicke sind.

Die anisotrope Druckverteilung auf der Kontaktfläche lautet analog zur Formel (6.3)

$$p(r,\varphi) = p_0\sqrt{1-\big(r/R_C(\varphi)\big)^2}. \tag{6.12}$$

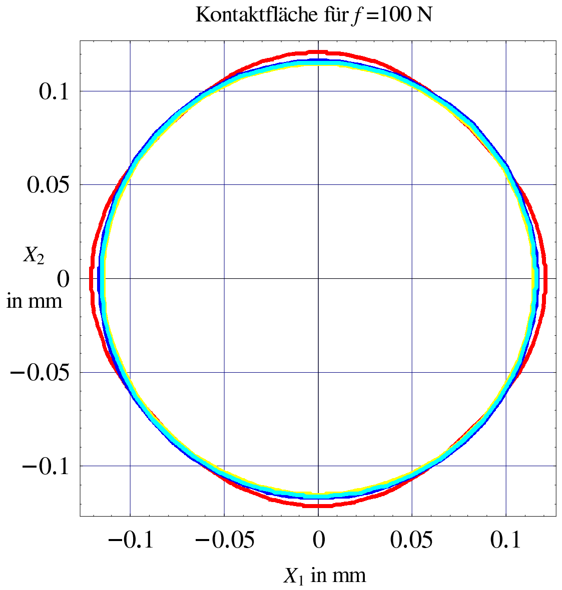

Abbildung 6.3: Kontaktfläche zwischen einem $\langle 100\rangle$-orientierten GaAs-Halbraum und einer Stahlkugel mit Radius R_K bei einer Druckkraft $f = 100$ N für rein elastisches Materialverhalten. Rot: Druckfläche in der (100)-Ebene. Die Kreisflächen resultieren aus isotropen 2D-Näherungen. Blau: *Reuss*, Türkis: *Hill* und *Eisenberg*, Gelb: *Voigt*.

Kraft in N	Radien exakt oder nach 3D-Mittelungsformel in mm					
	$\langle 100\rangle$	$\langle 110\rangle$	*Voigt*	*Eisenberg*	*Reuss*	*Hill*
50	0,09607	0,09076	0,09119	0,09188	0,09258	0,09187
100	0,12104	0,11435	0,11489	0,11576	0,11665	0,11574
150	0,13856	0,13090	0,13151	0,13252	0,13353	0,13249
200	0,15251	0,14407	0,14475	0,14585	0,14697	0,14583
250	0,16428	0,15520	0,15593	0,15712	0,15831	0,15709
300	0,17458	0,16492	0,16570	0,16696	0,16823	0,16693
350	0,18378	0,17362	0,17443	0,17576	0,17711	0,17573
400	0,19215	0,18152	0,18237	0,18376	0,18517	0,18373
450	0,19984	0,18879	0,18968	0,19112	0,19258	0,19109

Tabelle 6.2: Lastradien in Abhängigkeit von der Druckkraft, der Orientierung des Einkristalls und den isotropen 2D-Näherungsformeln nach *Voigt*, *Eisenberg*, *Reuss* und *Hill* für GaAs.

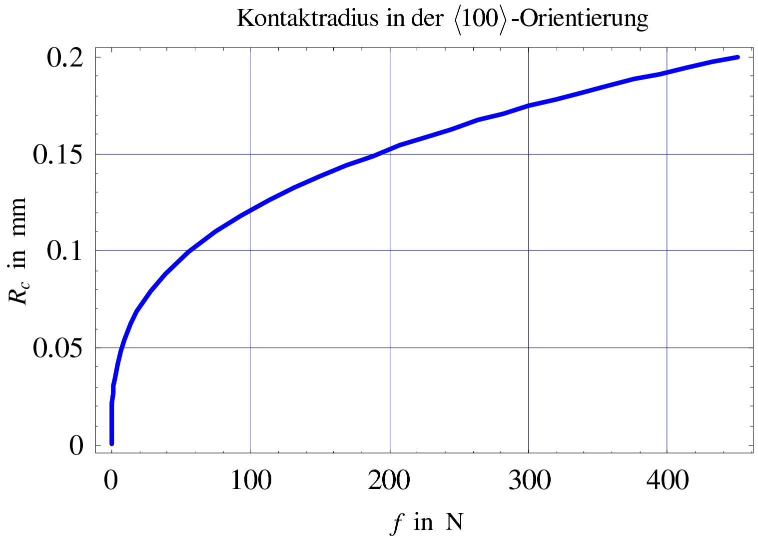

Abbildung 6.4: Kontaktradius für die ⟨100⟩-Orientierung in Abhängigkeit von der Druckkraft.

Der auf p_0 bezogene Spannungsverlauf über der Druckfläche ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Zur Berechnung von p_0 in (6.12) muss das Integral

$$\iint\limits_{\partial\Omega^f} p(r(X_1,X_2),\varphi(X_1,X_2))\ \mathrm{d}X_1\ \mathrm{d}X_2 = f \tag{6.13}$$

unter Beachtung des winkelabhängigen Kontaktradius (6.10) ausgewertet werden. Es ergibt sich analog zu (6.5)

$$p_0 = \frac{1}{I}\sqrt[3]{\frac{48f}{R_K^2}} \quad \text{mit} \quad I = 8\int\limits_0^{\pi/4} \big(k(\varphi)\big)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}\varphi. \tag{6.14}$$

Das Integral wird numerisch berechnet. Für Stahl und GaAs ergeben sich die Werte aus Tabelle 6.3.

	kubisch	*Voigt* 3D/2D	*Eisenberg* 3D/2D	*Reuss* 3D/2D	*Hill* 3D/2D
I	3,61864	3,32735 3,42676	3,37004 3,47921	3,41766 3,53250	3,37085 3,47803

Tabelle 6.3: Werte des Integrals (6.14) für Stahl und kubisch symmetrisches und isotrop genähertes GaAs in $10^{-7}\mathrm{Pa}^{-2/3}$.

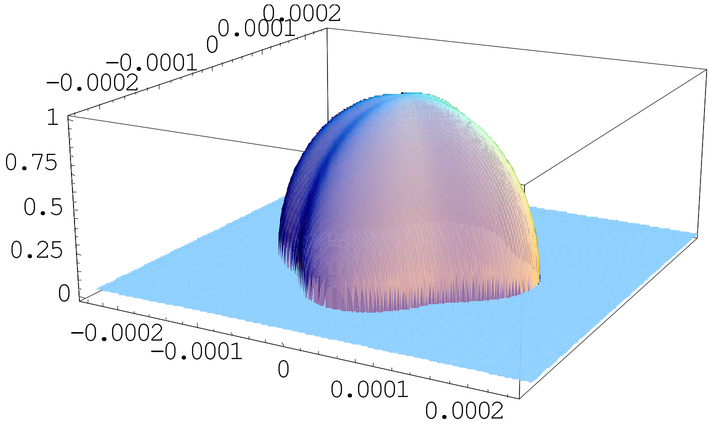

Abbildung 6.5: Druckspannungsverlauf bei $f = 100$ N bezogen auf p_0.

Da der Wert von I für den kubisch symmetrischen Fall am größten ist, liegt hier im Vergleich zu den isotropen Näherungen eine kleinere Maximaldruckspannung p_0 vor.

Die beste Näherung der Kontaktfläche erreichen wir jedoch mit den isotropen Werten, die wir aus dem Vergleich der im Abschnitt 7.7.2 berechneten Finite-Element-Lösung gewonnen haben. Für die Darstellung der entsprechenden Resultate verweisen wir schon hier auf den Abschnitt 7.7.2.

Rechnen wir die maximale Druckspannung gemäß (6.14) in Abhängigkeit von der Druckkraft aus, erhalten wir Maximalwerte, deren Verlauf in Abbildung 6.6 gezeigt wird.

6.2 Inelastische Effekte

Am Schluss dieses Kapitels gehen wir noch kurz auf mögliche inelastische Effekte in der Kontaktfläche ein.

Ein Indiz dafür, dass tatsächlich inelastische Verformungen stattfinden, ist die folgende Beobachtung: Ein Wafer, der bereits schon einmal durch eine Druckkugel gebogen wurde, wird so auf den Stützring gelegt, dass die vormals mit der Kugel in Kontakt stehende Waferdeckfläche jetzt nach unten zeigt. Wird nun der Wafer erneut belastet, so dass jetzt die vormalige Kontaktfläche auf Zug beansprucht wird, bricht der Wafer schon bei sehr geringer Last. Gemäß *Jurisch* [59] führt hingegen die Mehrfachbelastung eines Wafers, für den ein solcher Seitenwechsel nicht durchgeführt wird, kaum zu Veränderungen im Bruchverhalten. Ein weiteres Anzeichen für inelastische Verformungen ist der Umstand, dass nach einem Biegeversuch GaAs-Partikel an der Druckkugel verbleiben, so dass sie nach einigen wenigen Biegetests ausgetauscht werden muss.

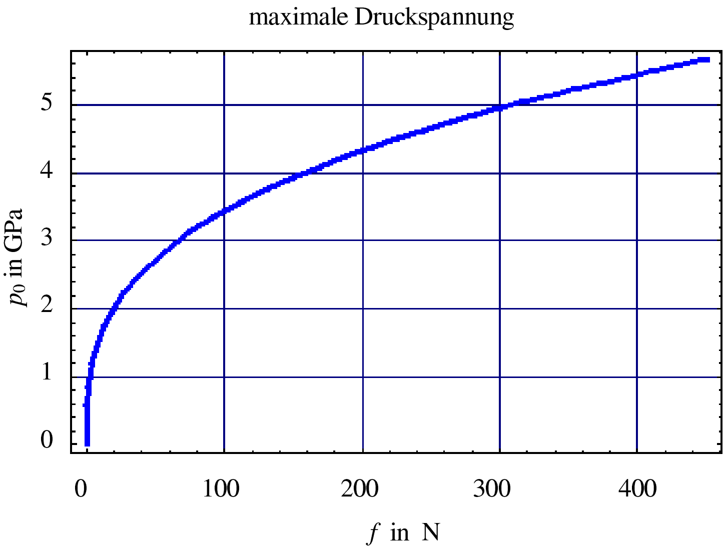

Abbildung 6.6: Maximale Druckspannung p_0 in Abhängigkeit von der Druckkraft f.

Durch das Klebenbleiben von GaAs-Teilchen an der Druckkugel findet eine Aufrauhung der ursprünglich glatt polierten Oberfläche statt. Diese Rauigkeiten bilden letztlich Risskeime, die für den Fall, dass der Wafer vor einem erneuten Test gedreht wird, die Ursache dafür sind, das der so gedrehte Wafer schon bei geringer Last bricht.

Damit stellt sich die Frage, ob inelastische Effekte auch für die Berechnung der maximalen Zugspannung berücksichtigt werden müssen.

Müssten sie berücksichtigt werden, bewirken die inelastischen Verformungen hier zweierlei. Zum einen finden durch sie Spannungsumlagerungen statt, infolgedessen die maximalen Normalspannungen in der Kontaktfläche nicht so anwachsen können, wie im rein elastischen Fall. Andererseits kommt es im plastizierten Gebiet zu einer Verringerung der tragfähigen Plattendicke, so dass es eher zum Bruch kommt.

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die in [10] beschriebenen statischen Mikrohärtetests für kubisches GaAs, um Vergleiche zwischen berechneten und gemessenen Härtewerten anzustellen.

Die Härte eines untersuchten Werkstoffs ist der Widerstand, den dieser Werkstoff dem Eindringen eines härteren Prüfkörpers entgegen setzt. In den Vorschriften für Härtemessungen werden so große Mindestlasten gefordert, dass abhängig von der Größe des Prüfkörpers nach der Entlastung eine bestimmte Mindesteindringtiefe verbleibt. Die verbleibenden Eindrücke sind deshalb Ausdruck einer inelastischen Deformation. Die inelastische Härte wird aus dem Quotienten der aufgebrachten Kraft f und der vermessenen Oberfläche O des Eindrucks berechnet. Sie ist somit ein Ausdruck für die maximal aufgenommene elastische mittlere Druckspannung in der Kontaktfläche.

Moderne Messtechnik erlaubt es, auch die Gesamthärte unter Last zu bestimmen. Hierzu wird die Kraft auf die unter Last vermessene Kontaktoberfläche zwischen Werkstoff und Prüfkörper bezogen. Die Gesamthärte enthält neben dem inelastischen Anteil noch einen elastischen Anteil. Auf die Weise könnte auch die Härte von ideal elastischen Materialien gemessen werden.

Reale Materialien, wie GaAs, verhalten sich nur innerhalb eines bestimmten Bereiches elastisch. Während der elastische Anteil der Härte lastabhängig ist, wird beobachtet, dass sich der inelastische Anteil mit zunehmender Last kaum noch ändert. Wir können demnach den inelastischen Härtewert als Materialparameter betrachten.

Damit ist es uns in einfacher Weise möglich, mit der Theorie der *Hertz*'schen Pressung für den betrachteten Lastbereich zu überprüfen, ob dieser Wert erreicht wird. Erreicht die mittlere Spannung diesen Wert, erscheint eine Berücksichtigung des inelastischen Verhaltens notwendig. Unterschreitet die maximale Druckspannung diesen Wert, tritt der Effekt nicht auf bzw. ist vernachlässigbar klein.

In [10] wird die inelastische Mikrohärte von undotiertem GaAs in der (100)-Ebene durch

$$H_V^{inel} = 6,52 \text{ GPa} \tag{6.15}$$

angegeben. Die Bestimmung dieses Wertes erfolgte mit dem *Vickers*-Härtetest. Bei einem solchen Test ist der Prüfkörper eine vierseitige Pyramide. Da Galliumarsenid rund doppelt so spröde wie Silizium oder Glas [10] ist, sind die im Test verwendeten Indenter sehr klein, so dass Druckkräfte von rund 1 N auf Eindrücke von rund 60 μm Breite führen.

Ein Blick auf Abbildung 6.6 zeigt, dass die dort abgebildete maximale Druckspannung im betrachteten Bereich bis 450 N noch nicht den Wert der *Vickers*-Härte entsprechend (6.15) erreicht.

Zu Vergleichszwecken betrachten wir jetzt einen fiktiven rein elastischen *Brinell*-Härtetest, in dem eine starre Kugel mit dem Radius R_K auf den im vorigen Abschnitt beschriebenen elastischen Halbraum gedrückt wird. Durch Verwendung einer starren Kugel schalten wir sämtliche Effekte aus, die aus der elastischen Verzerrung der Kugel herrühren würden. Die so entstehenden Kontaktradien sind, wie in Abbildung 6.7 zu sehen, ein Fünftel kleiner als die Kontaktradien im vorherigem Abschnitt.
Es gilt

$$p_{0R} = \frac{1}{I_R}\sqrt[3]{\frac{48f}{R_K^2}} \quad \text{mit} \quad I_R = 8\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{1-(\nu^{\langle\varphi\rangle})^2}{E^{\langle\varphi\rangle}}\right)^{\frac{2}{3}} \mathrm{d}\varphi. \tag{6.16}$$

Die *Brinell*-Härte ist im isotropen Fall der Quotient aus der aufgebrachten

Kraft und der Oberfläche der Kontaktkugelkalotte:

$$H_B^{ges}(f) = H_B^{el}(f) = \frac{f}{O(f)} = \frac{f}{2\pi R_K \left(R_K - \sqrt{R_K^2 - \left(R_C(f)\right)^2}\right)}. \tag{6.17}$$

Da die Kontaktradien klein gegen die Kugelradien sind, gilt $O \approx \pi \left(R_C\right)^2$.

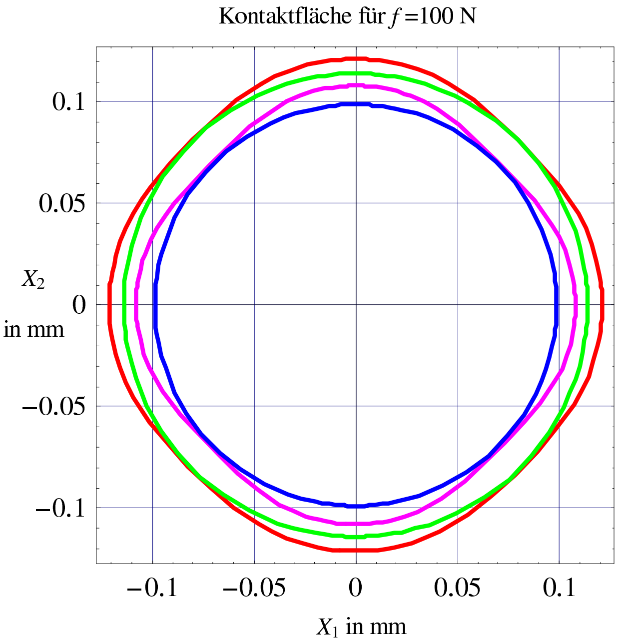

Abbildung 6.7: Kontaktfläche zwischen einem rein elastischen ⟨100⟩-orientierten GaAs-Halbraum und einer starren Kugel mit dem Radius R_K bei einer Druckkraft f = 100 N. Violett: Druckfläche in der (100)-Ebene mit starrer Kugel. Rot: Druckfläche in der (100)-Ebene mit elastischer Stahlkugel. Die Kreisflächen resultieren aus isotropen 3D-Näherungen nach *Eisenberg*. Blau: mit starrer Kugel. Grün: mit elastischer Stahlkugel.

Im kubischen Fall gilt mit (6.10) und (6.16)

$$O \approx 4 \int_0^{\pi/4} \left(R_C(\varphi)\right)^2 \mathrm{d}\varphi = \left(\frac{9}{2} f^2 \; R_K^2\right)^{\frac{1}{3}} \frac{I_R}{4}. \tag{6.18}$$

Die elastische *Brinell*-Härte lautet dann

$$H_B^{el}(f) = \frac{4}{I_R} \sqrt[3]{\frac{2f}{9 \; R_K^2}} = \frac{2}{3} p_{0R}. \tag{6.19}$$

Tragen wir die maximale und die mittlere Druckspannung über den gegebenen Lastbereich auf, erkennen wir in Abbildung 6.8, dass die maximale

Druckspannung erst weit oberhalb des vorgegebenen Lastbereiches bis 450 N den *Vickers*-Härtewert erreicht.

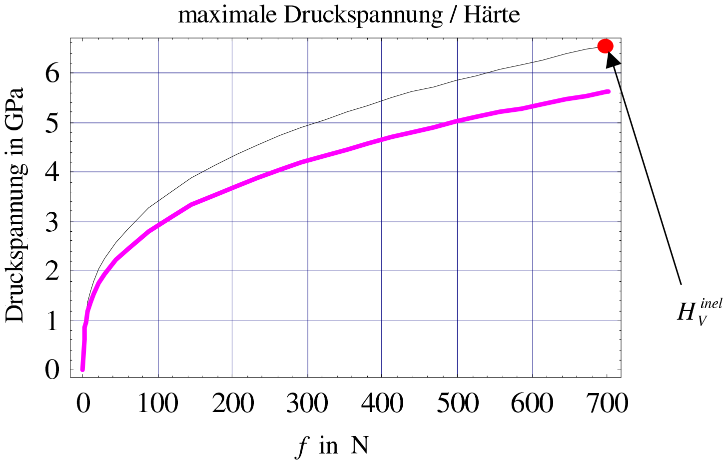

Abbildung 6.8: Härte von GaAs in Abhängigkeit von der Druckkraft. Blaue Kurve: Maximale Druckspannung berechnet nach *Hertz*'scher Theorie. Violett: Elastische *Brinell*-Härte berechnet nach *Hertz*'scher Theorie. Roter Punkt: Lastunabhängige inelastische *Vickers*-Härte gemäß [10].

Wir folgern, dass eine Vernachlässigung der inelastische Effekte nicht durch den *Vickers*-Härtetest gemäß [10] konterkariert wird.

Kapitel 7

Finite-Element-Approximation des 2D-Plattenproblems

7.1 Allgemeines

Zum Auffinden von Näherungslösungen des 2D-Plattenproblems verwenden wir hier die Finite-Element-Methode (FEM). Im folgenden Abschnitt machen wir einen Exkurs zur Funktionsweise dieser Methode an. Da die Finite-Element-Methode im Wesentlichen auf der Approximation von Variationsformulierungen von Randwertaufgaben beruht und als ein spezielles *Galjorkin*-Verfahren betrachtet werden kann, gibt es nicht *die* FE-Methode, sondern so viele Methoden, wie es Variationsprinzipien gibt. Wir stellen hier nur die FE-Methode vor, die konform zur im Anhang B.1.2 verwendeten schwachen Formulierung ist. In diesem Sinne handelt es sich hier um die FE-Diskretisierung der Methode der virtuellen Verrückungen. Für detaillierte Ausführungen sei auf das *Handbook of Numerical Analysis* verwiesen, insbesondere auf den unter [23] angegebenen Artikel dieses Handbuchs. Weitere mathematisch orientierte Verfahrensbeschreibungen, speziell für dünne Platten, sind in dem Buch von *Destuynder* und *Salaun* [33] zu finden. Eine ausführliche Darstellung der FE-Diskretisierung des *von Kármán*'schen Plattenproblems, die der hier vorgestellten FE-Diskretisierung sehr ähnlich ist, wird in der Dissertation von *Kruse* [68] gegeben. Schließlich verweisen wir auf die hilfreichen Darstellungen aus der Sicht des Berechnungsingenieurs bei *Knothe*, *Wessels* und *Gasch* in [65] und [49].

Die Methode der Finiten Elemente wurde erstmals 1943 von *Courant* in [30] vorgestellt, fand aber anfangs kaum Beachtung. In den frühen 50er Jahren des letzten Jahrhunderts kam es dann im Ingenieurwesen, wo die von *Bubnow*, *Ritz*, *Galjorkin* und anderen entwickelten Verfahren [16, 17, 18, 92, 93, 48] schon damals seit Jahrzehnten erfolgreich zur Lösung von realen technischen Problemstellungen verwendet wurden, unabhängig von *Courant* zu einer Neuentwicklung dieser Methode. Insbesondere die Arbeiten von *Argyris* [2] sowie *Turner*, *Clough*, *Martin* und *Topp* [107] führten dazu, dass die Methode in den Folgejahren im Ingenieurwesen einer breiten Anwendung zugeführt wurde. Der Name der Methode wurde 1960 von *Clough* [29] eingeführt und wird zur Unterscheidung der infiniten Elemente der Differential- und Integralrechnung benutzt.

7.2 Die Finite-Element-Methode als spezielles *Galjorkin*-Verfahren

Die Beschreibung der Finite-Element-Methode wollen wir jetzt am Beispiel des *von Kármán*'schen Plattenmodells für den in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Biegetest vornehmen. Zur Vereinfachung fassen wir die schwachen Formulierungen (B.4) und (B.6) vorübergehend in folgender Operatorschreibweise zusammen:

$$\mathrm{A}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = \mathrm{B}(p, V_3) \tag{7.1}$$

mit $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathcal{V}_0(\omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(\omega) \; = \; \big\{ \boldsymbol{W} \in \mathcal{V}(\omega) | \;\; & W_\alpha s_\alpha^R = 0 \quad \text{in} \quad \{(R_A, 0), (0, R_A), (-R_A, 0)\}, \\ & W_3 = 0 \quad \text{auf} \quad \Theta\}, \end{aligned} \tag{7.2}$$

und

$$\mathcal{V}(\omega) = \Big\{ \boldsymbol{W} \in \mathcal{H}^1(\omega) \times \mathcal{H}^1(\omega) \times \mathcal{H}^2(\omega) \Big\}, \tag{7.3}$$

wobei $\mathcal{H}^1(\omega)$ und $\mathcal{H}^2(\omega)$ im Anhang C.1 definiert sind. $\boldsymbol{U} \in \mathcal{V}_0(\omega)$ ist dann die Lösung des zugehörigen Randwertproblems, wenn (7.1) für alle $\boldsymbol{V} \in \mathcal{V}_0(\omega)$ erfüllt ist.

Im *Galjorkin*-Verfahren werden jetzt die unbekannten Lösungen $\boldsymbol{U}$ durch Funktionen $\boldsymbol{U}^G \in \mathcal{V}_0^{GU}(\omega)$ approximiert, mit

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^{GU}(\omega) \; = \; \Big\{ \boldsymbol{W} \in \mathcal{V}^{GU}(\omega) | \;\; & W_\alpha s_\alpha^R = 0 \quad \text{in} \;\; \{(R_A, 0), (0, R_A), (-R_A, 0)\}, \\ & W_3 = 0 \quad \text{auf} \quad \Theta\}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

wobei $\mathcal{V}^{GU}(\omega) \subset \mathcal{V}(\omega)$ endlichdimensional ist. Damit wird U_i durch eine Linearkombination von M_i bekannten linear unabhängigen Ansatzfunktionen $\Phi_{iI} : \bar{\omega} \to \mathbb{R}$ genähert:

$$\begin{aligned} U_i(X_1, X_2) \approx U_i^G(X_1, X_2) \;\; &:= \;\; \sum_{I=1}^{M_{\underline{i}}} G_{iI} \Phi_{\underline{i}I}(X_1, X_2) \quad \text{mit} \\ U_\alpha^G s_\alpha^R \;\; &= \;\; 0 \quad \text{in} \quad \{(R_A, 0), (0, R_A), (-R_A, 0)\} \quad \text{und} \\ U_3^G \;\; &= \;\; 0 \quad \text{auf} \quad \Theta. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Die neuen $N = M_1M_2M_3$ Unbekannten sind jetzt die Linearkoeffizienten G_{iI} in (7.5). Um diese zu bestimmen, werden jetzt in (7.1) nur Testfunktionen $\boldsymbol{V}^G \in \mathcal{V}_0^{GV}(\omega) \subset \mathcal{V}(\omega)$ zugelassen, die ebenfalls aus einem endlichdimensionalen Raum sind, der für jede Komponente i durch M_i linear unabhängige Gewichtsfunktionen $\Psi_{iI} : \bar{\omega} \to \mathbb{R}$ aufgespannt wird. Die zulässigen Testfunktionen beschreiben wir jetzt wie folgt:

$$\begin{aligned} V_i^G(X_1, X_2) \quad &:= \quad \sum_{I=1}^{M_{\underline{i}}} Q_{iI}\Psi_{\underline{i}I}(X_1, X_2) \quad \text{mit} \\ V_\alpha^G s_\alpha^R \quad &= \quad 0 \quad \text{in} \quad \{(R_A, 0), (0, R_A), (-R_A, 0)\} \quad \text{und} \\ V_3^G \quad &= \quad 0 \quad \text{auf} \quad \Theta. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Für den endlichdimensionalen Raum $\mathcal{V}^{GV}(\omega)$, der mit $\mathcal{V}_0^{GV}(\omega)$ in gleicher Weise in Beziehung steht wie $\mathcal{V}^{GU}(\omega)$ mit $\mathcal{V}_0^{GU}(\omega)$, wird zunächst auch nur gefordert, dass er ein Unterraum von $\mathcal{V}(\omega)$ ist.

Sind $\mathcal{V}^{GU}(\omega)$ und $\mathcal{V}^{GV}(\omega)$ endlichdimensionale Unterräume von $\mathcal{V}(\omega)$, sprechen wir von konformen *Galjorkin*-Verfahren. Gilt $\mathcal{V}^{GU}(\omega) \not\subset \mathcal{V}(\omega)$ und $\mathcal{V}^{GU}(\omega) \subset \mathcal{L}_2(\omega)$ oder $\mathcal{V}^{GV}(\omega) \not\subset \mathcal{V}(\omega)$ und $\mathcal{V}^{GV}(\omega) \subset \mathcal{L}_2(\omega)$, heißen sie nichtkonforme *Galjorkin*-Verfahren. Die nachfolgend beschriebene Finite-Element-Methode kann für Platten sowohl mit konformen als auch mit nichtkonformen Ansätzen beschrieben werden. Wir wollen hier nur konforme Verfahren benutzen, da nichtkonforme Verfahren im allgemeinen nicht konvergieren und die Theorie der konvergierenden nichtkonformen Ansätze eine sehr detaillierte Analysis erfordert.

Gilt $\mathcal{V}^{GV}(\omega) = \mathcal{V}^{GU}(\omega)$ wird von einem *Bubnow-Galjorkin*-Verfahren gesprochen. In diese Klasse gehört die hier beschriebene Methode der Finiten Elemente, aber auch das klassische *Ritz*-Verfahren. Handelt es sich in (7.1) um einen linearen symmetrischen Operator A wird ein *Bubnow-Galjorkin*-Verfahren auch *Ritz-Galjorkin*-Verfahren genannt. Sind die Funktionenräume verschieden, d.h. gilt $\mathcal{V}^{GV}(\omega) \neq \mathcal{V}^{GU}(\omega)$, spricht man von *Petrow-Galjorkin*-Verfahren. Als ein solches Verfahren kann z.B. die Methode der Finiten Volumen betrachtet werden, wo die Testfunktionen stückweise Rampenfunktionen sind.

Werden nun $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ in (7.1) durch die in (7.5) und (7.6) definierten Größen ersetzt, entsteht daraus die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} &\sum_{I=1}^{M_3} \Big(\mathrm{A}_{iI}^G(G_{11}, ..., G_{1M_1}, G_{21}, ..., G_{2M_2}, G_{31}, ..., G_{3M_3})Q_{iI} - \mathrm{B}_{3I}^G Q_{3I} \Big) \\ &\qquad + \sum_{I=1}^{M_1} \mathrm{A}_{1I}^G(G_{11}, ..., G_{1M_1}, G_{21}, ..., G_{2M_2}, G_{31}, ..., G_{3M_3})Q_{1I} \\ &\qquad + \sum_{J=1}^{M_2} \mathrm{A}_{2J}^G(G_{11}, ..., G_{1M_1}, G_{21}, ..., G_{2M_2}, G_{31}, ..., G_{3M_3})Q_{2I} \quad = \quad 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Die $N = M_1 M_2 M_3$ Größen G_{iI} sind dann eine Lösung des im allgemeinen nichtlinearen algebraischen Systems

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}^G_{\alpha I}(G_{11}, ..., G_{1M_1}, G_{21}, ..., G_{2M_2}, G_{31}, ..., G_{3M_3}) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq I \leq M_\alpha, \\ &\mathrm{A}^G_{3I}(G_{11}, ..., G_{1M_1}, G_{21}, ..., G_{2M_2}, G_{31}, ..., G_{3M_3}) = \mathrm{B}^G_{3I} \quad \text{für} \quad 1 \leq I \leq M_3, \end{aligned} \tag{7.8}$$

wenn (7.7) für jeden endlichen reellen Wert der Koeffizienten Q_{iI} erfüllt ist.

Das nichtlineare Gleichungssystem (7.2) kann z.B. mit dem *Newton*-Verfahren gelöst werden. Wird für das *Newton*-Schema die *Jacobi*-Matrix vollständig berechnet, ergibt sich für das *von Kármán*'sche Plattenproblem mit der Startnäherung $G^{(0)}_{iI} = 0$ nach dem ersten *Newton*-Schritt die *Galjorkin*-Approximation $G^{(1)}_{iI} = G^L_{iI}$ des linearen *Kirchhoff*'schen Plattenproblems.

Beim *Kirchhoff*'schen Plattenproblem ist in (7.2) die letzte Gleichung von den ersten beiden entkoppelt, so dass aus den ersten beiden für $M_1 = M_2 = M$ das homogene Gleichungssystem

$$\sum_{J=1}^{M} K_{I\alpha J\beta} G_{\beta J} = 0$$

folgt. Die dritte Gleichung wird zu $\sum_{J=1}^{M_3} K_{3I3J} G_{3J} = \mathrm{B}^G_{3I}$, wobei K_{iIjJ} die Koeffizienten der symmetrischen Steifigkeitsmatrix[1] sind.

Umfasst der Träger der Funktion Φ_{iI} und Ψ_{iI} das gesamte Gebiet ω, gelingt die Approximation der Lösung nur sehr schlecht. Um auch für komplizierte Geometrien die Lösungen eine leicht berechenbares diskretes Ersatzproblem formulieren zu können, ist man an Ansatz- und Gewichtsfunktionen mit möglichst kleinem Träger interessiert. Ihre Verwendung führen unter anderem auf dünn besetzte Steifigkeitsmatrizen, was den Einsatz effizienter algebraischer Löser erlaubt. *Galjorkin*-Verfahren, die Ansatz- und Gewichtsfunktionen mit kleinen Trägern verwenden, sind die Finite-Volumen-Methode und die im Folgenden beschriebene Finite-Element-Methode.

7.3 Zur Konstruktion des Finite-Element-Raums der *von Kármán*'schen Plattengleichungen

7.3.1 Triangulierung

Analog zu (7.4) führen wir die Finite-Element-Unterräume $\mathcal{V}^E_0$ und $\mathcal{V}^E$ mit $\mathcal{V}^E_0 \subset \mathcal{V}_0$ ein. Wir haben die Finite-Element-Methode bereits als *Bubnow-Galjorkin*-Verfahren charakterisiert, d.h. es gilt $\mathcal{V}^E_0 = \mathcal{V}^{GU}_0 = \mathcal{V}^{GV}_0$. Außerdem bezeichnen wir die FE-Approximation von $\boldsymbol{U} \in \mathcal{V}_0$ mit $\boldsymbol{U}^E$. Entsprechend benennen wir die Testfunktionen aus $\mathcal{V}^E_0$ mit $\boldsymbol{V}^E$.

---

[1] Die Koeffizienten einer solchen Matrix haben im Gegensatz zum Steifigkeits- oder Elastizitätstensor die Einheit einer Federsteifigkeit.

Die universelle Einsetzbarkeit der Finite-Element-Methode beruht im wesentlichen auf drei Eigenschaften:

1. Es wird zunächst nur $\mathcal{V}^E$ konstruiert und in einem zweiten Schritt durch spezielle problemabhängige Anpassungen $\mathcal{V}_0^E$ realisiert.
2. Die Elemente von $\mathcal{V}^E$ haben einen möglichst kleinen Träger.
3. Die Ansatzfunktionen sind einfach konstruierbar.

Die Erfüllung des 1. Punktes ermöglicht eine bequeme Anpassung an verschiedene Randbedingungen, der 2. Punkt erlaubt eine möglichst genaue Approximation bei beliebig komplizierten Berandungen und der dritte Punkt führt auf eine möglichst einfache Realisierung des numerischen Codes.

Damit die Basiselemente von $\mathcal{V}^E$ einen möglichst kleinen Träger haben, wird $\overline{\omega}$ in eine endliche Zahl Z von disjunkten und nicht leeren Teilbereichen $\overline{\omega}^{(I)}$ zerlegt, d.h. die

$$\overline{\omega} = \bigcup_{I=1}^{Z} \overline{\omega}^{(I)} \quad \text{mit} \quad \omega^{(I)} \neq \emptyset \ \ \forall\, I \quad \text{und} \quad \omega^{(I)} \cap \omega^{(J)} = \emptyset \text{ für } I \neq J. \tag{7.9}$$

Außerdem werden solche $\overline{\omega}^{(I)}$ ausgeschlossen, die unendlich spitz zusammenlaufende Ecken haben.

Die einzelnen Teilbereiche $\overline{\omega}^{(I)}$ werden Finite Elemente genannt und eine konkrete Aufteilung von $\bar{\omega}$ in Teilbereiche heißt Vernetzung oder Gitter. Eine Vernetzung, die nur aus Dreieckselementen besteht, wird Triangulierung oder Dreiecksgitter genannt. In allgemeinen sind in der Methode der Finiten Elemente krummlinig berandete Elemente zugelassen. Jedoch ist die Konstruktion von $\mathcal{V}_0^E$ für krummlinig berandete Elemente im allgemeinen aufwändiger als für geradlinig berandete Elemente. Während für polygonal berandete Gebiete eine Vernetzung mit geradlinigen Elementen die natürliche Vorgehensweise ist, kann ein krummlinig berandetes Gebiet ω durch eine endliche Anzahl von geradlinig berandeten Elementen nur näherungsweise erfasst werden.

Da eine Vernetzung mit geradlinigen Dreiecken die Verwendung leistungsfähiger Gittergeneratoren, wie *COG* [98] oder *Triangle* [100] erlaubt, werden wir hier ausschließlich geradlinige Dreieckselemente verwenden. Dies hat zur Folge, wir den Kreisrand $\partial\omega$ und ganz $\bar{\omega}$ nur als endlichdimensionales Polygon nähern können. Wir erhalten

$$\overline{\omega} \approx \overline{\omega^*} = \bigcup_{I=1}^{Z_T} \overline{\omega}^{(I)}. \tag{7.10}$$

Die Abbildung 7.1 zeigt einen Achtelkreis mit zwei unterschiedlich feinen Netzen.

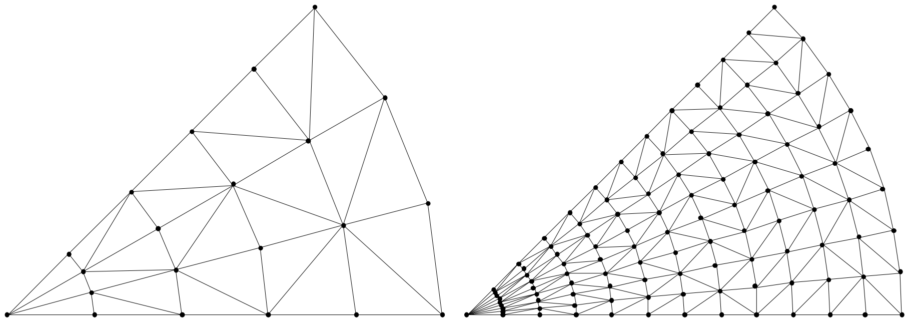

Abbildung 7.1: Einfache Achtelkreisapproximation. Links: 4 Ecken pro Achtelkreis bzw. 24 Ecken pro Kreis. Rechts: 9 Ecken pro Achtelkreis bzw. 64 Ecken pro Kreis.

Wird eine Kreisfläche durch ein regelmäßiges N-Eck genähert, dessen Ecken auf dem zu approximierenden Kreis liegen, können wir den wahren relativen Fehler des approximierten Flächeninhalts durch

$$f_{rel}(N) = \frac{\iint_{\omega} \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 - \iint_{\omega^*} \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2}{\iint_{\omega} \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2} = 1 - \theta \ \sin(1/\theta) \quad \text{mit} \quad \theta = 2\pi/N \tag{7.11}$$

beschreiben. Der Verlauf dieses Fehlers bei wachsendem N wird in Abbildung 7.2 gezeigt. Für eine Vernetzung mit einem Fehler unter 1‰ brauchen wir demnach unabhängig vom Kreisradius mehr als 80 Eckpunkte auf dem Rand des Kreises bzw. mehr als 11 Eckpunkte auf dem Rand eines Achtelkreises.

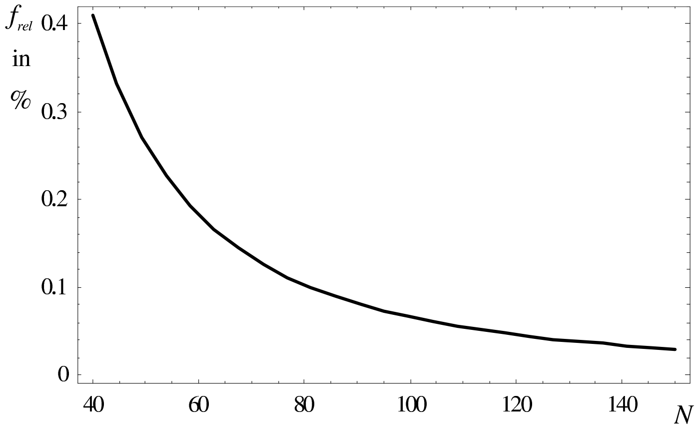

Abbildung 7.2: Wahrer relativer Fehler des Flächeninhalts eines regelmäßigen N-Ecks zum Flächeninhalt seines Außenkreises.

Durch den Übergang auf ein Polygongebiet ändert sich das ursprüngliche

Randwertproblem. Wenn wir von einer polygonal berandeten Platte ausgehen, die auf dem schmalen Plattenrand im 3D-Fall spannungsfrei ist, führt das zugehörige 2D-Plattenproblem auf etwas abgeänderte Randbedingungen. Gemäß den Ausführungen im Anhang B.1.4 muss zusätzlich zum Verschwinden der Ersatzquerkraft auf den Polygonrandkanten noch das Verschwinden der resultieren Eckkraft gefordert werden.

Die Approximation des freien Kreisrandes durch den freien Polygonrand ist aus numerischer Sicht unproblematisch, da die Lösung des Polygonproblems für $N \to \infty$ gegen die Lösung des Kreisproblems konvergiert [6]. Der Kreisrand $\partial\omega$ ist im betrachteten Biegetest jedoch nicht die einzige Kreislinie, auf der Randbedingungen vorgeben werden. Die Stützrandbedingung $U_3 = 0$ wird ebenfalls auf einer Kreislinie vorgegeben. Fordern wir jetzt, dass $U_3 = 0$ statt auf Θ auf dem Polygon Θ^* gelten soll, ergibt sich ein Fehler gegenüber der echten Kreisstützlinie, der für $N \to \infty$ nicht gegen Null geht. Auf diese Tatsache wurde zuerst im Jahre 1952 von dem armenischen Mathematiker *Sapondjan* [95] hingewiesen. Richtig bekannt wurde dieses Problem in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts vor allem durch die zahlreichen Untersuchungen von *Babuška*, wie aus den umfangreichen Literaturlisten in [6] und [5] zu entnehmen ist. Heute spricht man vom *Sapondjan-Babuška*-Plattenparadox, wobei in der Literatur wahlweise auch einer der beiden oder beide Namen weggelassen werden. Im Abschnitt 7.5 zeigen wir, durch welche FE-Randbedingungen wir trotz der polygonalen Approximation erreichen können, dass das Problem für $N \to \infty$ gegen die Lösung einer kreisförmigen Stütze konvergiert und vergleichen dafür im Abschnitt 7.7.1 eine analytische Lösung mit ihrer numerischen Approximation.

Die einfachste und flexibelste Möglichkeit zur Konstruktion von $\mathcal{V}^E$ durch Basiselemente mit kleinen Trägern ist, die Ansatzfunktionen für jedes Element $\overline{\omega}^{(T)}$ einzeln zu generieren. Die zu approximierende Lösung und die Testfunktionen haben im Element $\overline{\omega}^{(T)}$ die Darstellung

$$U_i^{(T)}(X_1, X_2) \;:=\; \sum_{I=1}^{N_{\underline{i}}} G_{iI}^{(T)} \Phi_{\underline{i}I}^{(T)}(X_1, X_2) \quad \text{und} \tag{7.12}$$

$$V_i^{(T)}(X_1, X_2) \;:=\; \sum_{I=1}^{N_{\underline{i}}} Q_{iI}^{(T)} \Phi_{\underline{i}I}^{(T)}(X_1, X_2). \tag{7.13}$$

Dabei werden die Koeffizienten $G_{iI}^{(T)}$ Element-Freiheitsgrade genannt und die Funktionen $\Phi_{iI}^{(T)}$ Element-Formfunktionen. N_i ist die Anzahl der Basiselemente mit denen die Komponenten $U_i^{(T)}$ und $V_i^{(T)}$ im Element dargestellt werden. Der Zusammenhang zu den globalen Freiheitsgraden G_{iI}^E wird über die so genannte Element-Freiheitsgradtabelle $\Omega^{(T)}_{iIJ}$ hergestellt:

$$G^{(T)}_{iI} = \sum_{J=1}^{M_{\underline{i}}} \Omega^{(T)}_{\underline{i}IJ} G^{E}_{iJ}, \qquad Q^{(T)}_{iI} = \sum_{J=1}^{M_{\underline{i}}} \Omega^{(T)}_{\underline{i}IJ} Q^{E}_{iJ}. \tag{7.14}$$

M_i ist die Anzahl der globalen Freiheitsgrade, durch deren Festlegungen auch der Verlauf von U^E_i und V^E_i festliegt. Stellen wir die linke Seite von (7.1) als Flächenintegral der Größe $a_i(\boldsymbol{U}^E(X_1,X_2))V^E_i(X_1,X_2)$ über ω^* dar, wobei ω^* die Polygonapproximation von ω ist, erhalten wir jetzt die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^E(\boldsymbol{U}^E,\, \boldsymbol{V}^E) &= \iint_{\omega^*} a_i\left(\boldsymbol{U}^E(X_1,X_2)\right) V^E_i(X_1,X_2)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \\
&= \sum_{T=1}^{Z} \iint_{\omega^{(T)}} a_i\left(\boldsymbol{U}^E(X_1,X_2)\right) V^E_i(X_1,X_2)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \\
&= \sum_{T=1}^{Z} \iint_{\omega^{(T)}} a_i\left(\boldsymbol{U}^{(T)}(X_1,X_2)\right) V^{(T)}_i(X_1,X_2)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \\
&= \sum_{T=1}^{Z} \iint_{\omega^{(T)}} \hat{a}_i(X_1,X_2,G^{(T)}_{11},...,G^{(T)}_{1N_1},G^{(T)}_{21},...,G^{(T)}_{2N_2},G^{(T)}_{31},...,G^{(T)}_{3N_3}) \\
&\qquad \left(\sum_{I=1}^{N_{\underline{i}}} Q^{(T)}_{iI}\Phi^{(T)}_{\underline{i}I}(X_1,X_2)\right)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \\
&= \sum_{T=1}^{Z}\sum_{I=1}^{N_{\underline{i}}} Q^{(T)}_{iI}A^{(T)}_{iI}(G^{(T)}_{11},...,G^{(T)}_{1N_1},G^{(T)}_{21},...,G^{(T)}_{2N_2},G^{(T)}_{31},...,G^{(T)}_{3N_3}) \\
&= \sum_{I=1}^{M_{\underline{i}}} Q^{E}_{iI}A^{E}_{iI}(G^{E}_{11},...,G^{E}_{1N_1},G^{E}_{21},...,G^{E}_{2N_2},G^{E}_{31},...,G^{E}_{3N_3}),
\end{aligned} \tag{7.15}$$

wobei für kleine lateinische Indizes die *Einstein*'sche Summationskonvention verwendet wurde. Die rechte Seite von (7.1) hat die Darstellung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}^E(\boldsymbol{V}^E) &= \iint_{\omega^*} p(X_1,X_2)V^E_3(X_1,X_2)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \\
&= \sum_{T=1}^{Z} \iint_{\omega^{(T)}} p(X_1,X_2)V^E_3(X_1,X_2)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \\
&= \sum_{T=1}^{Z} \iint_{\omega^{(T)}} p(X_1,X_2)V^{(T)}_3(X_1,X_2)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2
\end{aligned}$$

$$= \sum_{T=1}^{Z} \iint\limits_{\omega^{(T)}} p(X_1, X_2) \left(\sum_{I=1}^{N_3} Q_{3I}^{(T)} \Phi_{3I}^{(T)}(X_1, X_2) \right) \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2$$

$$= \sum_{T=1}^{Z} \sum_{I=1}^{N_3} Q_{3I}^{(T)} B_{3I}^{(T)} = \sum_{T=1}^{Z} \sum_{I=1}^{N_3} \sum_{J=1}^{M_3} \Omega_{3IJ}^{(T)} Q_{3J}^{E} B_{3I}^{(T)} = \sum_{I=1}^{M_3} Q_{3I}^{E} B_{3I}^{E}. \quad (7.16)$$

Damit resultiert für beliebige Q_{iI}^E auch beim Finite-Element-Verfahren ein nichtlineares algebraisches System der Gestalt (7.2).

Charakteristisch für die Finite-Element-Methode ist es, dass zur elementweisen Konstruktion der Ansatzfunktionen nur Polynome und polynomähnliche Funktionen verwendet werden. Der überwiegende Teil der Polynome sind Interpolationspolynome. Die elementweisen Stützstellen der Interpolationspolynome werden Elementknoten genannt.

Um möglichst einfach aufgebaute elementweise Polynome und polynomähnliche Funktionen zur Konstruktion von Ansatzfunktionen mit kleinen Trägern verwenden zu können, werden in der Methode der Finiten Elemente die zulässigen Triangulierungen gemäß (7.9) weiter eingeschränkt. Es wird gefordert:

> Jede Kante eines Dreiecks ist auch Kante eines anderen Dreiecks oder Teil des Randes $\partial\omega$.

Auf diese Weise wird verhindert, dass ein Dreieck über das Innere einer Kante mit mehr als einem Dreieck benachbart ist.

Zur numerischen Approximation des Biegetests verwenden wir hier nur Ansatzfunktionen, die aus Interpolationspolynomen bestehen. Da wir hier nur konforme Elementansätze verwenden, woraus folgt, dass $U_\alpha^E \in \mathcal{H}^1(\omega)$ und $U_3^E \in \mathcal{H}^2(\omega)$ gelten muss, übertragen sich die Forderungen auch auf die Ansatzfunktionen. Die Forderung $U_\alpha^E \in \mathcal{H}^1(\omega)$ impliziert, dass $U_\alpha^E \in \mathcal{C}^0(\bar{\omega})$ und $U_\alpha^E \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega})$ gelten muss[2]. Daraus resultiert, dass die Ansatzfunktionen diese Stetigkeitsforderungen nicht nur im Elementinneren, sondern auch über dem Elementrand hinaus fortsetzbar erfüllen müssen. Nur so können die Ansatzfunktionen einen $\mathcal{C}^0$-stetigen bzw. $\mathcal{C}^1$-stetigen Übergang für U_α^E und V_α^E bzw. U_3^E und V_3^E zum Nachbarelement gewährleisten. In der FE-Literatur werden Elemente, welche die entsprechenden Stetigkeitsforderungen erfüllen, $\mathcal{C}^0$-Elemente und $\mathcal{C}^1$-Elemente genannt.

Das $\mathcal{C}^0$-Element, das wir zur Approximation des *von Kármán*'schen Plattenproblems für die Darstellung von U_α^E und V_α^E benötigen, nennen wir im Weiteren Scheibenelement, und das $\mathcal{C}^1$-Element, das wir für die Darstellung von U_3^E und V_3^E benötigen, nennen wir Plattenelement.

---

[2] Die Räume $\mathcal{C}^0(\bar{\omega})$ und $\mathcal{C}^1(\bar{\omega})$ sind im Anhang C.1 definiert. Für detaillierte Betrachtungen siehe [23].

Zur Konstruktion der Formfunktionen aus Interpolationspolynomen klären wir im folgenden Abschnitt, welche Anforderungen an diese Polynome aus der Erfüllung der geforderten Stetigkeitseigenschaften resultieren.

7.3.2 Interpolationspolynome mit Stetigkeitsanforderungen am Elementrand

Als Interpolationspolynome werden in der FEM üblicherweise *Lagrange*- oder *Hermite*-Polynome verwendet. Während *Lagrange*-Polynome in den Stützstellen mit der zu interpolierenden Funktion nur in den Funktionswerten übereinstimmen, stimmen *Hermite*-Polynome an mindestens einer Stützstelle in einer Ableitung mit der zu interpolierenden Funktion überein. Werden die Interpolationspolynome elementweise angesetzt, ergeben sich aus den Stetigkeitsforderungen zusätzliche Restriktionen an die Interpolationspolynome.

Zur Veranschaulichung betrachten wir ein 1D-Intervall $[0, 2L]$, welches wir in zwei Teilintervalle unterteilen. Jedes dieser Teilintervalle betrachten wir als Finites Element. Die Elementgrenze soll bei L liegen. Wir nehmen nun zunächst eine beliebige Anzahl von Stützstellen in jedem Element an. In jedem Element sind in jeder Stützstelle mindestens ein Funktionswert einer Funktion f oder ein Wert ihrer Ableitungen bekannt, so dass für jedes Element das Interpolationspolynom festliegt. Die aus der Interpolation resultierende Funktion bezeichnen wir mit f^*. Eine $\mathcal{C}_0$-Stetigkeit der Funktion f^* kann über das gesamte Intervall $[0, 2L]$ nur realisiert werden, wenn die Elementgrenzen zugleich Stützstellen, sprich Knoten, sind und in diesen Knoten der Funktionswert von f^* mit f übereinstimmt.

Während $\mathcal{C}_0$-Stetigkeit mit *Lagrange*-Polynomen und *Hermite*-Polynomen zu erreichen ist, gelingt dies zur Realisierung der $\mathcal{C}_1$-Stetigkeit nur mit *Hermite*-Polynomen. Für $\mathcal{C}_1$-Stetigkeit muss an den Elementgrenzen nicht nur der Funktionswert, sondern auch die erste Ableitung der Funktion zur Interpolation vorgegeben werden. Die einfachste $\mathcal{C}_0$-stetige Interpolation ist demnach die lineare Interpolation der Funktionswerte auf den Elementgrenzen. Entsprechend ist die einfachste $\mathcal{C}_1$-stetige Interpolation die kubische *Hermite*-Interpolation zwischen den Funktionswerten und den Werten der ersten Ableitung auf den Elementgrenzen.

Im 2D-Fall lassen sich unter Voraussetzung einer Triangulierung, welche die im vorigen Abschnitt beschrieben Eigenschaften hat, die Stetigkeitsforderung wie folgt erfüllen:

Zur Realisierung der $\mathcal{C}_0$-Stetigkeit über den Rand der Dreieckselemente hinaus, müssen die Funktionswerte in den Ecken vorgegeben werden. Zur Realisierung von $\mathcal{C}_1$-Stetigkeit müssen außerdem in den Ecken noch die ersten beiden Ableitungen vorgeben werden. Dies sind pro Knoten sechs Werte, so dass das Element 18 Freiheitsgrade hat. Das resultierende 2D-Polynom ist 5. Ordnung.

In den Ecken ist ein solches Element sogar überkompatibel, da es wegen der Vorgabe der zweiten Ableitungen in der Umgebung der Ecken sogar $\mathcal{C}_2$-stetig ist. Die Überkompatibilität lässt sich durch Polynomansätze nicht verhindern. Zu ihrer Vermeidung wurden $\mathcal{C}_1$-stetige Elemente entwickelt, die in den Knoten nur nullte und erste Ableitungen zur Interpolation verwenden und außerdem rationale Zusatzterme in den Ansatzfunktionen berücksichtigen. Ein völlig anderer Weg ist die Konstruktion von konvergierenden nichtkonformen Plattenelementen. Für nähere Ausführungen zu beiden Alternativen und zusätzlichen Literaturhinweisen sei hier auf *Knothe* und *Wessels* [65] sowie auf *Ciarlet* [23] verwiesen. Wir verwenden hier trotzdem ein überkompatibeles $\mathcal{C}_1$-stetiges Element und geben dafür folgende Gründe an.

- Als Hauptgrund zur Vermeidung von überkompatiblen Elementen wird in [65] angegeben, dass Lösungen im Falle von Unstetigkeiten in den elastischen Parametern an den Unstetigkeitsstellen nicht $\mathcal{C}_2$-stetig sind. Überkompatible Elemente erzwingen so eine zu hohe Glattheit der Lösung. Dieser Fall tritt im betrachteten Test nicht auf.
- Im hier vorliegendem Fall von konstanten elastischen Parametern erwarten wir mit diesem Element eine schnellere Konvergenz als mit den nichtkonformen oder nicht überkompatiblen Elementen [65], da die Lösung elementweise genauer approximiert wird.
- Dem Autor ist nicht bekannt, dass im Falle von Unstetigkeiten in den elastischen Parametern, überkompatible Elemente nicht gegen die Lösung konvergieren.
- Alle Polynomausdrücke sind exakt integrierbar.

Unter Beachtung dieser vier Punkte verwenden wir als Scheibenelement ebenfalls ein überkompatibeles *Hermite*'sches Element. Es handelt sich hierbei um ein $\mathcal{C}_0$-stetiges Element, welches in den drei Eckknoten nicht nur den Wert der Funktion, sondern auch ihre ersten Ableitungen interpoliert. Damit hat ein solches Element insgesamt 9 Freiheitsgrade.

Auf diese Weise benötigen wir für beide Elemente nur drei Knoten. Die Interpolation von $\boldsymbol{U}^{(T)}$ geschieht mit insgesamt 9+9+18=36 Freiheitsgraden.

Zur Konstruktion der beiden Elemente führen wir im nächsten Abschnitt die Dreieckskoordinaten ein. Sie erlauben Elemente mit verschiedenen Größen und an verschiedenen Orten einheitlich zu beschreiben, wenn sie die gleiche Struktur der Formfunktionen haben. Danach erläutern wir zuerst die Konstruktion des verwendeten $\mathcal{C}^1$-Plattenelements und danach die Konstruktion des $\mathcal{C}^0$-Scheibenelements.

7.3.3 Einheitsdreieck und Dreieckskoordinaten

Wir betrachten jetzt gemäß Abbildung 7.3 ein Dreieck $\omega^{(T)} \subset \omega^*$ aus einer konkreten Triangulierung und bezeichnen die drei Eckknoten mit P_I, P_J und P_K. Es gilt $P_I, P_J, P_K \in \partial\omega^{(T)} \subset \omega^*$ und $P_I \neq P_J$, $P_J \neq P_K$ und $P_K \neq P_I$. Die Koordinaten dieser Knoten bezeichnen wir mit $X_{I\alpha}, X_{J\alpha}$ und $X_{K\alpha}$. Die Indizes I, J und K nennen wir globale Knotennummern.

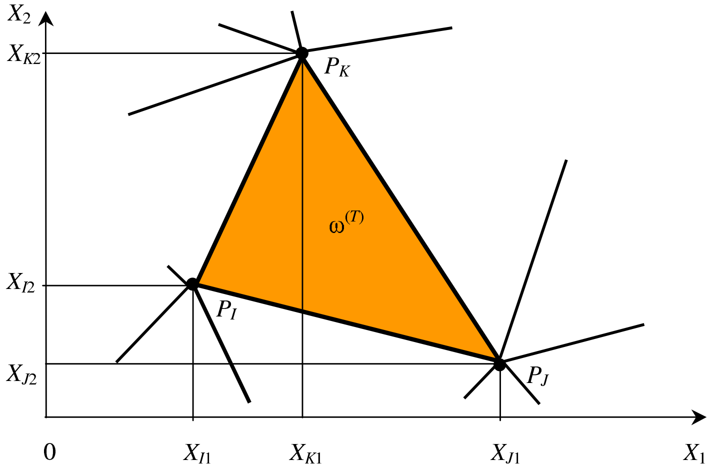

Abbildung 7.3: Globale Knotennummern und -koordinaten des Dreiecks $\omega^{(T)}$ in einer konkreten Triangulierung.

Jetzt führen wir außerdem lokale Element-Knotenindizes $i \in \{1, 2, 3\}$ ein, die über eine Knotenzuordnungstabelle $\Xi_{iI}^{(T)}$ den globalen Knotennummern zugeordnet sind. In gleicher Weise führen wir lokale Element-Koordinaten $X_{i\alpha}^{(T)}$ ein, so dass gilt

$$P_i^{(T)} = \sum_I \Xi_{iI}^{(T)} P_I \quad \text{und} \quad X_{i\alpha}^{(T)} = \sum_I \Xi_{iI}^{(T)} X_{I\alpha}. \tag{7.17}$$

Bezeichnen wir mit $A^{(T)}$ den Flächeninhalt von $\omega^{(T)}$, lässt sich dieser durch

$$A^{(T)} = \begin{vmatrix} 1 & X_{11}^{(T)} & X_{12}^{(T)} \\ 1 & X_{21}^{(T)} & X_{22}^{(T)} \\ 1 & X_{31}^{(T)} & X_{32}^{(T)} \end{vmatrix} \tag{7.18}$$

beschreiben, wobei $|\ |$ hier der Determinantenoperator ist. Führen wir jetzt in analoger Schreibweise die folgenden Hilfsgrößen ein:

$$A_1^{(T)} = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 1 & X_{21}^{(T)} & X_{22}^{(T)} \\ 1 & X_{31}^{(T)} & X_{32}^{(T)} \end{vmatrix}, \quad A_2^{(T)} = \begin{vmatrix} 1 & X_{11}^{(T)} & X_{12}^{(T)} \\ 1 & X_1 & X_2 \\ 1 & X_{31}^{(T)} & X_{32}^{(T)} \end{vmatrix} \tag{7.19}$$

$$\text{und}\quad A_3^{(T)} = \begin{vmatrix} 1 & X_{11}^{(T)} & X_{12}^{(T)} \\ 1 & X_{21}^{(T)} & X_{22}^{(T)} \\ 1 & X_{31}^{(T)} & X_{32}^{(T)} \end{vmatrix},$$

können wir durch

$$\zeta_i = A_i^{(T)}/A^{(T)} \tag{7.20}$$

die Dreieckskoordinaten ζ_i definieren, die auch baryzentrische Koordinaten genannt werden. Sie haben die Eigenschaft

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1. \tag{7.21}$$

Mit den Abkürzungen

$$a_1^{(T)} = \begin{vmatrix} X_{21}^{(T)} & X_{22}^{(T)} \\ X_{31}^{(T)} & X_{32}^{(T)} \end{vmatrix},\ a_2^{(T)} = \begin{vmatrix} X_{31}^{(T)} & X_{32}^{(T)} \\ X_{11}^{(T)} & X_{12}^{(T)} \end{vmatrix},\ a_3^{(T)} = \begin{vmatrix} X_{11}^{(T)} & X_{12}^{(T)} \\ X_{21}^{(T)} & X_{22}^{(T)} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} b_1^{(T)} &= X_{31}^{(T)} - X_{21}^{(T)}, & b_2^{(T)} &= X_{11}^{(T)} - X_{31}^{(T)}, & & b_3^{(T)} = X_{21}^{(T)} - X_{11}^{(T)}, \\ c_1^{(T)} &= X_{32}^{(T)} - X_{22}^{(T)}, & c_2^{(T)} &= X_{12}^{(T)} - X_{32}^{(T)} & \text{und}\quad & c_3^{(T)} = X_{22}^{(T)} - X_{12}^{(T)} \end{aligned} \tag{7.22}$$

erhalten wir die Transformationen

$$\zeta_i = a_i^{(T)} + c_i^{(T)} X_1 + b_i^{(T)} X_2 \quad \text{und} \quad X_\alpha = \zeta_i X_{i\alpha}^{(T)}. \tag{7.23}$$

Die eingeführten Abkürzungen haben die Eigenschaften

$$\begin{gathered} b_1^{(T)} + b_2^{(T)} + b_3^{(T)} = 0, \quad c_1^{(T)} + c_2^{(T)} + c_3^{(T)} = 0 \quad \text{und} \\ \begin{vmatrix} c_2^{(T)} & b_2^{(T)} \\ c_3^{(T)} & b_3^{(T)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_3^{(T)} & b_3^{(T)} \\ c_1^{(T)} & b_1^{(T)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^{(T)} & b_1^{(T)} \\ c_2^{(T)} & b_2^{(T)} \end{vmatrix} = 2A^{(T)}. \end{gathered} \tag{7.24}$$

Damit lassen sich die folgenden Differentiationsregeln für Monome aufstellen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\zeta_1^p \zeta_2^q \zeta_3^r)}{\partial X_1} &= \frac{p c_1 \zeta_1^{p-1} \zeta_2^q \zeta_3^r + q c_2 \zeta_1^p \zeta_2^{q-1} \zeta_3^r + r c_3 \zeta_1^p \zeta_2^q \zeta_3^{r-1}}{2A}, \\ \frac{\partial(\zeta_1^p \zeta_2^q \zeta_3^r)}{\partial X_2} &= \frac{p b_1 \zeta_1^{p-1} \zeta_2^q \zeta_3^r + q b_2 \zeta_1^p \zeta_2^{q-1} \zeta_3^r + r b_3 \zeta_1^p \zeta_2^q \zeta_3^{r-1}}{2A}, \end{aligned} \tag{7.25}$$

wobei wir zur besseren Übersichtlichkeit den Elementindex (T) weggelassen haben. Die Integrationsvorschrift für Monome über die Dreiecksfläche lautet

$$\iint\limits_{\omega^{(T)}} \zeta_1^p\ \zeta_2^q\ \zeta_3^r\ \mathrm{d}X_1\ \mathrm{d}X_2 = \frac{2\ A^{(T)} p!\ q!\ r!}{(p+q+r+1)!}. \tag{7.26}$$

Die Verschiebungen über einem Element haben die Darstellung

$$U_i^{(T)}(X_1, X_2) := U_i^D(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3). \tag{7.27}$$

Insbesondere gilt in den lokalen Eckknoten:

$$U_i^{(T)}(X_{11}, X_{12}) = U_i^D(1, 0, 0),\ U_i^{(T)}(X_{21}, X_{22}) = U_i^D(0, 1, 0)$$
$$\text{und}\quad U_i^{(T)}(X_{31}, X_{32}) = U_i^D(0, 0, 1). \tag{7.28}$$

Die Ansatzfunktionen der beiden hier verwendenden Elemente sind Polynome vom höchsten Grade 5. Vollständige Polynome 5. Grades haben im $\mathbb{R}^2$ eine Monombasis von 21 Basiselementen. Entsprechend haben vollständige Polynome 4. bis 1. Grades Monombasen von 15, 10, 6 bzw. 3 Basiselementen. Ein Monombasiselement eines Polynoms n-ten Grades lässt sich in Dreieckskoordinaten durch $\zeta_1^p\ \zeta_2^q\ \zeta_3^r$ darstellen, wobei jeweils $p + q + r = n$ gilt. Die Anzahl der Basismonome in Dreieckskoordinaten zur Darstellung eines vollständigen Polynoms n-ten Grades stimmt selbstverständlich mit der Anzahl der Monome für eine Darstellung in *Kartesi*'schen Koordinaten überein. Jede später benötigte Monombasis wird in die folgende Vektordarstellung gebracht:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_{[3]} &= (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) := (\xi_{[3]1}, \xi_{[3]2}, \xi_{[3]3}) \\
\boldsymbol{\xi}_{[6]} &= (\zeta_1^2, \zeta_2^2, \zeta_3^2, \zeta_2\zeta_3, \zeta_3\zeta_1, \zeta_1\zeta_2) := (\xi_{[6]1}, \xi_{[6]2}, \xi_{[6]3}, \xi_{[6]4}, \xi_{[6]5}, \xi_{[6]6}) \\
\boldsymbol{\xi}_{[10]} &= (\zeta_1^3, \zeta_2^3, \zeta_3^3, \zeta_1^2\zeta_2, \zeta_2^2\zeta_3, \zeta_3^2\zeta_1, \zeta_2^2\zeta_1, \zeta_3^2\zeta_2, \zeta_1^2\zeta_2, \zeta_1\zeta_2\zeta_3) \\
&:= (\xi_{[10]1}, \xi_{[10]2}, \xi_{[10]3}, \xi_{[10]4}, \xi_{[10]5}, \xi_{[10]6}) \\
\boldsymbol{\xi}_{[15]} &= (\zeta_1^4, \zeta_2^4, \zeta_3^4, \zeta_1^3\zeta_2, \zeta_2^3\zeta_3, \zeta_3^3\zeta_1, \zeta_2^3\zeta_1, \zeta_3^3\zeta_2, \zeta_1^3\zeta_2, \zeta_1^2\zeta_2^2, \zeta_2^2\zeta_3^2, \zeta_3^2\zeta_1^2, \\
&\quad\ \zeta_1^2\zeta_2\zeta_3, \zeta_1\zeta_2^2\zeta_3, \zeta_1\zeta_2\zeta_3^2) \\
&:= (\xi_{[15]1}, \xi_{[15]2}, \xi_{[15]3}, \xi_{[15]4}, \xi_{[15]5}, \xi_{[15]6}, \dots, \xi_{[15]15}) \\
\boldsymbol{\xi}_{[21]} &= (\zeta_1^5, \zeta_2^5, \zeta_3^5, \zeta_1^4\zeta_2, \zeta_2^4\zeta_3, \zeta_3^4\zeta_1, \zeta_2^4\zeta_1, \zeta_3^4\zeta_2, \zeta_1^4\zeta_2, \zeta_1^3\zeta_2^2, \zeta_2^3\zeta_3^2, \zeta_3^3\zeta_1^2, \\
&\quad\ \zeta_1^2\zeta_2^3, \zeta_2^2\zeta_3^3, \zeta_3^2\zeta_1^3, \zeta_1^3\zeta_2\zeta_3, \zeta_1\zeta_2^3\zeta_3, \zeta_1\zeta_2\zeta_3^3, \zeta_1\zeta_2^2\zeta_3^2, \zeta_1^2\zeta_2\zeta_3^2, , \zeta_1^2\zeta_2^2\zeta_3) \\
&:= (\xi_{[21]1}, \xi_{[21]2}, \xi_{[21]3}, \xi_{[21]4}, \xi_{[21]5}, \xi_{[21]6}, \dots, \xi_{[21]21}),
\end{aligned} \tag{7.29}$$

wobei wir die Zahl der jeweiligen Basiselemente zur Unterscheidung in eckige Klammern setzen.

Zu FE-Approximation des *von Kármán*'schen Plattenproblems benötigen wir wir außerdem noch die folgenden Darstellungen der Ableitungen verschiedener Basismonome. Unter Verwendung von (7.25) erhalten wir

$$\frac{\partial \xi_{[21]I}}{\partial X_\alpha} = \sum_{J=1}^{15} H^{(T)}_{[21,15]I\alpha J}\ \xi_{[15]J}, \quad \frac{\partial \xi_{[15]I}}{\partial X_\alpha} = \sum_{J=1}^{10} H^{(T)}_{[15,10]I\alpha J}\ \xi_{[10]J}$$
$$\text{und}\quad \frac{\partial \xi_{[10]I}}{\partial X_\alpha} = \sum_{J=1}^{6} H^{(T)}_{[10,6]I\alpha J}\ \xi_{[6]J} \tag{7.30}$$

sowie

$$\frac{\partial^2 \xi_{[21]I}}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = \sum_{J=1}^{15} H^{(T)}_{[21,15]I\alpha J} \frac{\partial \xi_{[15]J}}{\partial X_\beta} = \sum_{J=1}^{15} H^{(T)}_{[21,15]I\alpha J} \sum_{K=1}^{10} H^{(T)}_{[15,10]J\beta K} \, \xi_{[10]K}$$

$$= \sum_{K=1}^{10} \Upsilon^{(T)}_{[21,10]I\alpha\beta K} \, \xi_{[10]K}. \qquad (7.31)$$

Dabei hängen die Elementmatrizen H und Υ wegen (7.25) nur von den Werten der Element-Knotenkoordinaten ab.

Schließlich benötigen wir noch

$$\left.\frac{\partial f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial n}\right|_{\zeta_k=0} = -\left.\frac{\partial f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial X_1}\right|_{\zeta_k=0} \frac{c^{(T)}_{\underline{k}}}{l^{(T)}_{\underline{k}}} - \left.\frac{\partial f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial X_2}\right|_{\zeta_k=0} \frac{b^{(T)}_{\underline{k}}}{l^{(T)}_{\underline{k}}} \qquad (7.32)$$

mit

$$l^{(T)}_i = \sqrt{b^{(T)}_i b^{(T)}_{\underline{i}} + c^{(T)}_i c^{(T)}_{\underline{i}}}. \qquad (7.33)$$

und

$$\lambda^{(T)}_1 := \frac{1}{2} \left(\frac{\left(l^{(T)}_2\right)^2 - \left(l^{(T)}_3\right)^2}{\left(l^{(T)}_1\right)^2} + 1 \right), \qquad (7.34)$$

wobei wir $\lambda^{(T)}_2$ und $\lambda^{(T)}_3$ entsprechend (7.34) durch zyklische Vertauschung von 1, 2 und 3 erhalten.

Mit diesen Größen können wir nun das Platten- und das Scheibenelement generieren sowie das globale nichtlineare Gleichungssystem für die unbekannten Knotenfreiheitsgrade aufstellen.

7.3.4 Zur Konstruktion des Plattenelements

Ziel ist es, ein C_1-stetiges Plattenelement mit 18 Knotenfreiheitsgraden zu konstruieren. Der Interpolationsansatz der Verschiebung $W = U_3$ lautet in der Gestalt von (7.12)

$$\overset{[18]}{W}(X_1, X_2) = \sum_{I=1}^{18} G^{(T)}_{[18]3;I} \Phi^{(T)}_{[18]I}(X_1, X_2) = \sum_{I=1}^{18} G^{(T)}_{[18]3;I} \Phi^{D}_{[18]I}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

$$= \sum_{I=1}^{18} G^{(T)}_{[18]3;I} \sum_{J=1}^{21} Z^{(T)}_{[18,21]IJ} \xi_{[21]J} \qquad (7.35)$$

mit

$$\begin{pmatrix} G^{(T)}_{[18]3;6(i-1)+1} \\ G^{(T)}_{[18]3;6(i-1)+2} \\ G^{(T)}_{[18]3;6(i-1)+3} \\ G^{(T)}_{[18]3;6(i-1)+4} \\ G^{(T)}_{[18]3;6(i-1)+5} \\ G^{(T)}_{[18]3;6i} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} W(X_1, X_2) \\ \frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial X_1} \\ \frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial X_2} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_1^2} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_2^2} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_1 \partial X_2} \end{pmatrix}\right|_{(X_1,X_2)=(X_{i1},X_{i2})} . \tag{7.36}$$

Ausgangspunkt für die Bestimmung von $Z^{(T)}_{[18,21]IJ}$ ist die $\mathcal{C}_1$-stetige *Hermite*-Interpolation mit dem vollständigem Polynomansatz 5. Grades gemäß Abbildung 7.4.

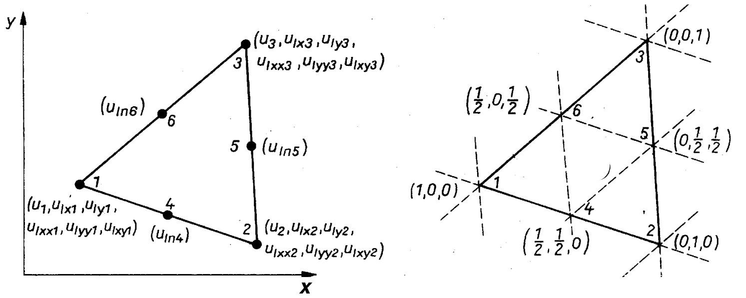

Abbildung 7.4: Knoten und Stützwerte im $\mathcal{C}_1$-quintischen Dreieck nach *Kämmel* und *Franeck* [60]. Links: $x \equiv X_1$ und $y \equiv X_2$. Rechts: Dreieckskoordinaten.

Dieses Element hat 21 linear unabhängige Basisfunktionen, die sich als Linearkombination der Monombasis $\boldsymbol{\xi}_{[21]}$ darstellen lassen, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \overset{[21]}{W}(X_1, X_2) &= \sum_{I=1}^{21} G^{(T)}_{[21]3I} \Phi^{(T)}_{[21]I}(X_1, X_2) = \sum_{I=1}^{21} G^{(T)}_{[21]3I} \Phi^{D}_{[21]I}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \\ &= \sum_{I=1}^{21} G^{(T)}_{[21]3I} \sum_{J=1}^{21} Z^{(T)}_{[21,21]IJ} \xi_{[21]J} \end{aligned} \tag{7.37}$$

mit $G_{[21]3;I} = G_{[18]3;I}$ für $1 \leq I \leq 18$ und

$$\begin{pmatrix} G^{(T)}_{[18]3;19} \\ G^{(T)}_{[18]3;20} \\ G^{(T)}_{[18]3;21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial n}\right|_{(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)} \\ \left.\frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial n}\right|_{(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \\ \left.\frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial n}\right|_{(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})} \end{pmatrix} . \tag{7.38}$$

Die drei zusätzlichen Stützwerte sind demnach die Ableitungen in Richtung der Seitennormalen in den Seitenhalbierenden des Dreiecks. Die Matrix $\boldsymbol{Z}_{[21,21]}$ ist durch 441 Gleichungen bestimmt und zwar in der Weise, dass jeder der 21 Funktionen $\Phi^{(T)}_{[21]I}$ nur einen von Null verschiedenen Stützwert hat. Der von Null verschiedene Wert ist gleich Eins. Dabei wird die Nummerierung so gewählt, dass die Funktion $\Phi^{(T)}_{[21]I}$ nur für $6(i-1)+1 \leq I \leq 6i$ im i-ten Knoten von Null verschiedene Werte hat, wobei für $I = 6(i-1)+1$ nur der Wert selbst von Null verschieden ist und für $I = 6(i-1)+1+\alpha$ nur der Wert der ersten Ableitung in Richtung X_α gleich Eins ist. Für $I = 6(i-1)+4$ ist die 2. Ableitung in Richtung X_1 gleich Eins , für $I = 6(i-1)+5$ ist die 2. Ableitung in Richtung X_2 gleich Eins und für $I = 6i$ ist die gemischte 2. Ableitung gleich Eins. Außerdem ist für $I = 18+i$ die Normalenableitung der dem Punkt $P^{(T)}_i$ gegenüberliegenden Seitenhalbierenden gleich Eins.

Um zu dem 18-Freiheitsgrad-Element zu gelangen, werden die Werte der Normalenableitungen auf den Seitenhalbierenden eliminiert.

Dies lässt sich unter Zuhilfenahme des 15-Freiheitsgrad-Dreieckselements realisieren, mit dem ein Polynom 4. Grades vollständig dargestellt werden kann. Die Stützstellen dieses Element sind die drei Eckknoten, der Knoten im Flächenmittelpunkt $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ und die Seitenhalbierenden. In jedem Knoten sind die Funktionswerte selbst Stützwert. Zusätzlich sind in den Eck- und dem Mittelpunktknoten die ersten Ableitungen Stützwerte und wir schreiben:

$$\overset{[15]}{W}(X_1, X_2) \;=\; \sum_{I=1}^{15} G^{(T)}_{[15]3I} \Phi^{(T)}_{[15]I}(X_1, X_2) \;=\; \sum_{I=1}^{21} G^{(T)}_{[15]3I} \Phi^{D}_{[15]I}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3).$$

Die folgenden 18 Gleichungen sind die Bestimmungsgleichungen für die 18 Unbekannten $G^{(T)}_{[15]I}$ für $1 \leq I \leq 15$ und $G^{(T)}_{[21]18+i}$, deren Darstellung durch $G^{(T)}_{[21]I}$ für $I \leq 18$ gesucht ist:

$$G^{(T)}_{[21]3;19} - \sum_{I=1}^{15} G^{(T)}_{[15]3;I} \Phi^{D}_{[15]I}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = 0$$

$$G^{(T)}_{[21]3;20} - \sum_{I=1}^{15} G^{(T)}_{[15]3;I} \Phi^{D}_{[15]I}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$$

$$G^{(T)}_{[21]3;21} - \sum_{I=1}^{15} G^{(T)}_{[15]3;3I} \Phi^{D}_{[15]I}(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = 0$$

$$G^{(T)}_{[15]3;I} - \sum_{J=1}^{21} \Lambda^{(T)}_{[15,21]IJ} G^{(T)}_{[21]3;J} = 0,$$

wobei $\Lambda^{(T)}_{[15,21]I}$ dadurch festgelegt ist, dass die Stützwerte von $\overset{[15]}{W}$ durch $\overset{[21]}{W}$ ausgedrückt werden. Da wir nun $G^{(T)}_{[21]3;18+i}$ vollständig durch $G^{(T)}_{[21]3;1}$ bis $G^{(T)}_{[21]3;18}$ ausdrücken können, folgt aus (7.37) unmittelbar (7.35).

Die Interpolationsfunktionen in (7.35) haben dann die in [60] angegebene Gestalt:

$$\Phi^D_{[18]1} = \zeta_1^5 + 5\zeta_1^4(\zeta_2+\zeta_3) + 10\zeta_1^3(\zeta_2+\zeta_3)2 + 30\zeta_1^2\zeta_2\zeta_3((\lambda_3^{(T)}\zeta_2 + (1-\lambda_2^{(T)})\zeta_3)^2,$$

$$\begin{aligned}\Phi^D_{[18]2} = {}& 3b_1^{(T)}\zeta_1^2\zeta_3(\zeta_2-\zeta_3) + \zeta_1^3(b_3^{(T)}\zeta_2 - b_2^{(T)}\zeta_3)(\zeta_1+4\zeta_2+4\zeta_3)\\ &+15\zeta_1^2\zeta_2\zeta_3(b_3^{(T)}\lambda_3^{(T)}\zeta_2 - b_2^{(T)}(1-\lambda_2^{(T)})\zeta_3)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^D_{[18]3} = {}& -3c_1^{(T)}\zeta_1^2\zeta_3(\zeta_2-\zeta_3) - \zeta_1^3(c_3^{(T)}\zeta_2 - c_2^{(T)}\zeta_3)(\zeta_1+4\zeta_2+4\zeta_3)\\ &-15\zeta_1^2\zeta_2\zeta_3(c_3^{(T)}\lambda_3^{(T)}\zeta_2 - c_2^{(T)}(1-\lambda_2^{(T)})\zeta_3)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^D_{[18]4} = {}& \zeta_1^3((b_3^{(T)})^2\zeta_2^2 + (b_2^{(T)})^2\zeta_3^2)/2\\ &+\zeta_1^3\zeta_2\zeta_3(b_3^{(T)}b_1^{(T)}\zeta_2 + b_1^{(T)}b_2^{(T)}\zeta_3 - b_2^{(T)}b_3^{(T)}\zeta_1)\\ &+5\zeta_1^2\zeta_2\zeta_3((b_3^{(T)})^2\lambda_3^{(T)}\zeta_2 + (b_2^{(T)})^2(1-\lambda_2^{(T)})\zeta_3)/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^D_{[18]5} = {}& \zeta_1^3((c_3^{(T)})^2\zeta_2^2 + (c_2^{(T)})^2\zeta_3^2)/2\\ &+\zeta_1^3\zeta_2\zeta_3(c_3^{(T)}c_1^{(T)}\zeta_2 + c_1^{(T)}c_2^{(T)}\zeta_3 - c_2^{(T)}c_3^{(T)}\zeta_1)\\ &+5\zeta_1^2\zeta_2\zeta_3((c_3^{(T)})^2\lambda_3^{(T)}\zeta_2 + (c_2^{(T)})^2(1-\lambda_2^{(T)})\zeta_3)/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^D_{[18]6} = {}& b_1^{(T)}c_1^{(T)}\zeta_1^2\zeta_2\zeta_3(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3) + b_2^{(T)}c_2^{(T)}\zeta_1^2\zeta_3(\zeta_2\zeta_3 - \zeta_3\zeta_1 - \zeta_1\zeta_2 - \zeta_2^2)\\ &+b_3^{(T)}c_3^{(T)}\zeta_1^2\zeta_2(\zeta_2\zeta_3 - \zeta_3\zeta_1 - \zeta_1\zeta_2 - \zeta_3^2)\\ &-5\zeta_1^2\zeta_2\zeta_3(b_3^{(T)}c_3^{(T)}\lambda_3^{(T)}\zeta_2 + b_2^{(T)}c_2^{(T)}2(1-\lambda_2^{(T)})\zeta_3).\end{aligned}$$

(7.39)

Die Funktionen $\Phi^D_{[18]7}$ bis $\Phi^D_{[18]18}$ gehen aus $\Phi^D_{[18]1}$ bis $\Phi^D_{[18]6}$ durch zyklische Vertauschung hervor.

Auch hier gilt, dass jede Funktion $\Phi^D_{[18]I}$ nur einen von Null verschiedenen Stützwert in den Knoten hat, während der von Null verschiedene Wert gleich Eins ist. Mit Hilfe von (7.35) und (7.30) können wir nun sämtliche Ableitungen durch die Monombasen $\boldsymbol{\xi}_{[15]}$ bzw. $\boldsymbol{\xi}_{[10]}$ darstellen.

Die beiden hier vorgestellten $\mathcal{C}_1$-stetigen Elemente wurde 1966 erstmalig von *Filippa* [37] vorgestellt. Das 21-Freiheitsgrad-Dreieck ist auch unter den Namen $\mathcal{C}_1$-quintisches Dreieck oder *Argyris*-Dreieck bekannt. Letzter Name geht auf die 1968 erschienene Arbeit von *Argyris*, *Fried* und *Scharf* [3] zurück. Für das hier verwendete 18-Freiheitsgrad-Dreieck werden in der Literatur auch die Namen reduziertes $\mathcal{C}_1$-quintisches Dreieck oder *Bell*-Dreieck verwendet, wobei letzterer Name auf den 1969 erschienenen Artikel von *Bell* [9] zurück geht.

7.3.5 Zur Konstruktion des Scheibenelements

Ziel ist es hier, ein C_0-stetiges Plattenelement mit 9 Knotenfreiheitsgraden zu konstruieren. Der Interpolationsansatz der Verschiebungen U_α lautet in der Gestalt von (7.12)

$$\overset{[9]}{U}_\alpha(X_1, X_2) = \sum_{I=1}^{9} G^{(T)}_{[9]\alpha;I} \Phi^{(T)}_{[9]I}(X_1, X_2) = \sum_{I=1}^{9} G^{(T)}_{[9]\alpha;I} \Phi^{D}_{[9]I}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$
$$= \sum_{I=1}^{9} G^{(T)}_{[9]\alpha;I} \sum_{J=1}^{10} Z^{(T)}_{[9,10]IJ} \xi_{[10]J} \tag{7.40}$$

mit

$$\begin{pmatrix} G^{(T)}_{[9]\alpha;3(i-1)+1} \\ G^{(T)}_{[9]\alpha;3(i-1)+2} \\ G^{(T)}_{[9]\alpha;3(i-1)+3} \end{pmatrix} = \left. \begin{pmatrix} U_\alpha(X_1, X_2) \\ \frac{\partial U_\alpha(X_1,X_2)}{\partial X_1} \\ \frac{\partial U_\alpha(X_1,X_2)}{\partial X_2} \end{pmatrix} \right|_{(X_1,X_2)=(X_{i1},X_{i2})} . \tag{7.41}$$

Ausgangspunkt für die Bestimmung von $Z^{(T)}_{[9,10]IJ}$ ist das in Abbildung 7.5 gezeigte *Hermite*-Dreieck, welches aus einer vollständigen Polynombasis dritten Grades besteht.

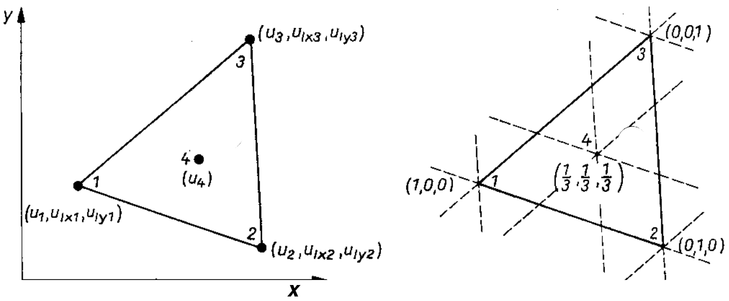

Abbildung 7.5: Knoten und Stützwerte im $\mathcal{C}_0$-kubischen Dreieck nach *Kämmel* und *Franeck* [60]. Links: $x \equiv X_1$ und $y \equiv X_2$. Rechts: Dreieckskoordinaten.

Die Vorgehensweise ist die Gleiche wie beim Plattenelement. Die Eliminierung des Stützwertes im Flächenmittelpunkt von $\overset{[10]}{U}_\alpha(X_1, X_2)$ erfolgt unter Zuhilfenahme des vollständig quadratischen *Lagrange*-Elements, welches Stützstellen in den Ecken und auf den Seitenhalbierenden hat. Wir können für beide Werte von α jeweils 7 Bestimmungsgleichungen für die jeweils 7 Unbekannten $G^{(T)}_{[10]\alpha;10}$ und $G^{(T)}_{[6]\alpha;1}$ bis $G^{(T)}_{[6]\alpha;6}$ angeben, so dass die Ausdrücke vollständig durch $G^{(T)}_{[10]\alpha;1}$ bis $G^{(T)}_{[10]\alpha;9}$ darstellbar sind. Die ausführliche Rechnung ist in [60] abgedruckt.

Die Interpolationsfunktionen in (7.40) haben dann die Gestalt:

$$\begin{aligned}
\Phi^D_{[9]1} &= = \zeta_1^3 + 3\zeta_1^2(\zeta_2+\zeta_3) + 2\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \\
\Phi^D_{[9]2} &= \zeta_1^3(b_3^{(T)}\zeta_2 - b_2^{(T)}\zeta_3) + \zeta_1\zeta_2\zeta_3(b_3^{(T)} - b_2^{(T)})/2 \\
\Phi^D_{[9]3} &= -\zeta_1^3(c_3^{(T)}\zeta_2 - c_2^{(T)}\zeta_3) - \zeta_1\zeta_2\zeta_3(c_3^{(T)} - c_2^{(T)})/2.
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Auch hier gehen die Funktionen $\Phi^D_{[9]4}$ bis $\Phi^D_{[9]9}$ aus $\Phi^D_{[9]1}$ bis $\Phi^D_{[9]3}$ durch zyklische Vertauschung hervor. In der Literatur wird dieses Dreieck auch als *Zienkiewicz*-Dreieck nach [8] oder als reduziertes kubisches *Hermite*-Dreieck bezeichnet.

Damit können wir jetzt das globale nichtlineare System berechnen, welches für N Knoten unter Berücksichtigung von (7.14) die Lösungen $G^E_{[3N]\alpha;I}$ für $1 \le I \le 3N$ und $G^E_{[6N]3;I}$ für $1 \le I \le 6N$ hat.

7.4 Formulierung des diskretisierten nichtlinearen Problems ohne Verschiebungsrandbedingungen

An dieser Stelle verlassen wir wieder die in (7.1) eingeführte Operatorschreibweise und schreiben zuerst (B.4) und dann (B.6) ausführlich unter Verwendung der Elementansatzfunktionen (7.40) und (7.35) sowie der Element-Freiheitsgradtabelle gemäß (7.14) auf.

7.4.1 Die diskretisierten Scheibengleichungen

Wir entwickeln (B.4) unter Verwendung von (7.40), (7.35) und (7.14):

$$\begin{aligned}
0 &= \iint\limits_{\omega^*} N^E_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial V^E_\alpha(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\,\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \\
&= \sum_T \iint\limits_{\omega^{(T)}} N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial V^{(T)}_\alpha(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\,\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \\
&= \sum_T \sum_{I=1}^{9} \iint\limits_{\omega^{(T)}} N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial \Phi^{(T)}_{[9]I}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\,\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\; Q^{(T)}_{[9]\alpha;I} \\
&= \sum_{A=1}^{3N}\sum_T \sum_{I=1}^{9} \iint\limits_{\omega^{(T)}} N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial \Phi^{(T)}_{[9]I}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\,\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\; \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA} Q^E_{\alpha A}.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die $6N$ nichtlinearen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{T}\sum_{I=1}^{9}\iint\limits_{\omega^{(T)}} N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial\Phi^{(T)}_{[9]I}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\ \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\ \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\\
&= \sum_{T}\sum_{J=1}^{10}\sum_{I=1}^{9}\iint\limits_{\omega^{(T)}} N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial\xi^{(T)}_{[10]J}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\ \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\\
&\qquad Z^{(T)}_{[9,10]IJ}\Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\\
&= \sum_{T}\sum_{J=1}^{10}\sum_{I=1}^{9}\sum_{K=1}^{6}\iint\limits_{\omega^{(T)}} N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\xi_{[6]K}\ \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\\
&\qquad H^{(T)}_{[10,6]J\beta K}\ Z^{(T)}_{[9,10]IJ}\Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\\
&= \sum_{T}\sum_{I=1}^{9}\sum_{K=1}^{6}\iint\limits_{\omega^{(T)}} N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\xi_{[6]K}\ \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\\
&\qquad B^{(T)}_{[9,6]I\beta K}\Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\\
&= \sum_{T}\sum_{I,J=1}^{9}\sum_{K,L=1}^{6} G^{(T)}_{[9]\gamma;J}B^{(T)}_{[9,6]J\kappa L}hc_{\alpha\beta\gamma\kappa}\iint\limits_{\omega^{(T)}}\xi_{[6]L}\xi_{[6]K}\ \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\\
&\qquad B^{(T)}_{[9,6]I\beta K}\Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\\
&\quad+\sum_{T}\sum_{I=1}^{9}\sum_{P,Q=1}^{18}\sum_{K=1}^{6}\sum_{R,S=1}^{15} G^{(T)}_{[18]3;P}B^{(T)}_{[18,15]P\kappa R}G^{(T)}_{[18]\gamma;Q}B^{(T)}_{[18,15]Q\kappa S}\frac{h}{2}c_{\alpha\beta\gamma\kappa}\\
&\qquad\iint\limits_{\omega^{(T)}}\xi_{[15]R}\xi_{[15]S}\xi_{[6]K}\ \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\ B^{(T)}_{[9,6]I\beta K}\Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\\
&= \sum_{T}\sum_{I,J=1}^{9}\sum_{K,L=1}^{6} G^{(T)}_{[9]\gamma;J}B^{(T)}_{[9,6]J\kappa L}hc_{\alpha\beta\gamma\kappa}I^{(T)}_{[6;6]LK}\ B^{(T)}_{[9,6]I\beta K}\Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\\
&\quad+\sum_{T}\sum_{I=1}^{9}\sum_{P,Q=1}^{18}\sum_{K=1}^{6}\sum_{R,S=1}^{15} G^{(T)}_{[18]3;P}B^{(T)}_{[18,15]P\kappa R}G^{(T)}_{[18]3;Q}B^{(T)}_{[18,15]Q\gamma S}\frac{h}{2}c_{\alpha\beta\gamma\kappa}\\
&\qquad I^{(T)}_{[15;15;6]RSK}\ B^{(T)}_{[9,6]I\beta K}\Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\\
&= \sum_{T}\sum_{I=1}^{9}\left(\sum_{J=1}^{9} G^{(T)}_{[9]\gamma;J}K^{(T)}_{[9;9]\gamma J\alpha I}\ \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\sum_{P,Q=1}^{18} G^{(T)}_{[18]3;P}G^{(T)}_{[18]3;Q}D^{(T)}_{[18;18;9]PQ\alpha I}\ \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA}\right).
\end{aligned}
\tag{7.43}
$$

Dabei haben wir die Matrixabkürzung $\boldsymbol{B}{:=}\boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{H}$ verwendet und die Matrix der Integrale über die Monombasen mit $\boldsymbol{I}$ abgekürzt. Die Größen $K^{(T)}_{[9;9]\gamma J\alpha I}$ sind die Komponenten der linearen Element-Steifigkeitsmatrix des Scheibenproblems.

7.4.2 Die diskretisierten Plattengleichungen

Wir entwickeln (B.6) unter Verwendung von (7.40), (7.35) und (7.14):

$$\begin{aligned}
0 &= \iint\limits_{\omega^*} \Bigg(N^E_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial W^E(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\frac{\partial V^E_3(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha} \\
&\qquad - M^E_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial^2 V^E_3(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \\
&\qquad - p^E(X_1,X_2)V^E_3(X_1,X_2)\Bigg)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 \\
&= \sum_T \sum_P^{18} \iint\limits_{\omega^{(T)}} \Bigg(N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial W^{(T)}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\frac{\partial \Phi_{[18]P}(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha} \\
&\qquad - M^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial^2 \Phi_{[18]P}(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \\
&\qquad - p^{(T)}(X_1,X_2)\Phi_{[18]P}(X_1,X_2)\Bigg)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 Q^{(T)}_{[18]3;P} \\
&= \sum_B^{6N} \sum_T \sum_P^{18} \iint\limits_{\omega^{(T)}} \Bigg(N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial W^{(T)}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\frac{\partial \Phi_{[18]P}(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha} \\
&\qquad - M^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial^2 \Phi_{[18]P}(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \\
&\qquad - p^{(T)}(X_1,X_2)\Phi_{[18]P}(X_1,X_2)\Bigg)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} Q^E_{3;B}.
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Daraus erhalten wir die $6N$ nichtlinearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_T \sum_P^{18} \iint\limits_{\omega^{(T)}} \Bigg(N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial W^{(T)}(X_1,X_2)}{\partial X_\beta}\frac{\partial \Phi_{[18]P}(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha} \\
&\qquad - M^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1,X_2)\frac{\partial^2 \Phi_{[18]P}(X_1,X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \\
&\qquad - p^{(T)}(X_1,X_2)\Phi_{[18]P}(X_1,X_2)\Bigg)\mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB}.
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Die weitere Entwicklung dieser Gleichungen führt auf

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{T} \sum_{P}^{18} \sum_{G}^{21} \iint_{\omega^{(T)}} \Bigg(& N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \frac{\partial W^{(T)}(X_1, X_2)}{\partial X_\beta} \frac{\partial \xi_{[21]G}(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha} \\
& - M^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \frac{\partial^2 \xi_{[21]G}(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \\
& - p^{(T)}(X_1, X_2) \xi_{[21]G}(X_1, X_2) \Bigg) \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \; Z^{(T)}_{[18,21]PG} \; \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
= \sum_{T} \sum_{P,Q}^{18} \sum_{R,S}^{15} \iint_{\omega^{(T)}} & N^{(T)}_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \xi_{[15]S} \xi_{[15]R} \; \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \\
& B^{(T)}_{[18,15]Q\beta S} G^{(T)}_{[18]3;Q} \; B^{(T)}_{[18,15]P\alpha R} \; \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
+ \sum_{T} \sum_{P,Q}^{18} \sum_{G,H}^{21} \sum_{E,F}^{10} & G^{(T)}_{[18]3;Q} Z^{(T)}_{[18,21]QH} \Upsilon^{(T)}_{[21,10]\gamma H \kappa E} \frac{h^2}{12} c_{\alpha\beta\gamma\kappa} \\
& \iint_{\omega^{(T)}} \xi_{[10]E} \xi_{[10]F} \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \; Z^{(T)}_{[18,21]PG} \Upsilon^{(T)}_{[21,10]\alpha G \beta F} \; \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
& - \sum_{T} \sum_{P}^{18} P^{(T)}_{[18]P} \; \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
= \sum_{T} \sum_{P,Q}^{18} \sum_{R,S}^{15} \sum_{J}^{9} \sum_{K}^{6} & B^{(T)}_{[9,6]J\gamma K} G^{(T)}_{[9]\kappa;J} \; h c_{\alpha\beta\gamma\kappa} \\
& \iint_{\omega^{(T)}} \xi_{[15]S} \xi_{[15]R} \xi_{[6]K} \; \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \\
& B^{(T)}_{[18,15]Q\beta S} G^{(T)}_{[18]3;Q} \; B^{(T)}_{[18,15]P\alpha R} \; \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
+ \sum_{T} \sum_{P,Q,O,V}^{18} \sum_{R,S,Y,Z}^{15} & B^{(T)}_{[18,15]O\gamma Y} G^{(T)}_{[18]3;O} \; B^{(T)}_{[18,15]V\kappa Z} G^{(T)}_{[18]3;V} \frac{h}{2} c_{\alpha\beta\gamma\kappa} \\
& \iint_{\omega^{(T)}} \xi_{[15]S} \xi_{[15]R} \xi_{[15]Y} \xi_{[15]Z} \; \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \\
& B^{(T)}_{[18,15]Q\beta S} G^{(T)}_{[18]3;Q} \; B^{(T)}_{[18,15]P\alpha R} \; \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
+ \sum_{T} \sum_{P,Q}^{18} \sum_{E,F}^{10} & G^{(T)}_{[18]3;Q} \Gamma^{(T)}_{[18,10]\gamma Q \kappa E} \frac{h^2}{12} c_{\alpha\beta\gamma\kappa} I_{[10,10]EF} \; \Gamma^{(T)}_{[18,10]\alpha P \beta F} \\
& \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
& - \sum_{T} \sum_{P}^{18} P^{(T)}_{[18]P} \; \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{T}\sum_{P,Q}^{18}\sum_{R,S}^{15}\sum_{J}^{9}\sum_{K}^{6} B^{(T)}_{[9,6]J\kappa K} G^{(T)}_{[9]\gamma;J}\ h c_{\alpha\beta\gamma\kappa} I^{(T)}_{[15,15,6]SRK} \\
&\qquad B^{(T)}_{[18,15]Q\beta S} G^{(T)}_{[18]3;Q}\ B^{(T)}_{[18,15]P\alpha R}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
&+\sum_{T}\sum_{P,Q,O,V}^{18}\sum_{R,S,Y,Z}^{15} B^{(T)}_{[18,15]O\gamma Y} G^{(T)}_{[18]3;O}\ B^{(T)}_{[18,15]V\kappa Z} G^{(T)}_{[18]3;V} \frac{h}{2} c_{\alpha\beta\gamma\kappa} \\
&\quad I^{(T)}_{[15,15,15,15]SRYZ}\ B^{(T)}_{[18,15]Q\beta S} G^{(T)}_{[18]3;Q}\ B^{(T)}_{[18,15]P\alpha R}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
&+\sum_{T}\sum_{P,Q}^{18} G^{(T)}_{[18]3;Q} K^{(T)}_{[18,18]QP}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} - \sum_{T}\sum_{P}^{18} P^{(T)}_{[18]P}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
= &\sum_{T}\sum_{P,Q}^{18}\sum_{J}^{9}\ G^{(T)}_{[18]3;Q} D^{(T)}_{[18,18,9]QP\kappa J}\ G^{(T)}_{[9]\kappa;J}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
&+\sum_{T}\sum_{P,Q,O,V}^{18}\ G^{(T)}_{[18]3;O}\ G^{(T)}_{[18]3;V} \frac{1}{2} D^{(T)}_{[18,18,18,18]QPOV}\ G^{(T)}_{[18]3;Q}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} \\
&+\sum_{T}\sum_{P,Q}^{18} G^{(T)}_{[18]3;Q} K^{(T)}_{[18,18]QP}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB} - \sum_{T}\sum_{P}^{18} P^{(T)}_{[18]P}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB}
\end{aligned} \tag{7.46}$$

Neben den bereits für das Scheibenproblem verwendeten Abkürzungen benutzten wir hier zusätzlich $\boldsymbol{\Gamma}{:=}\boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{\Upsilon}$. Die Größen $K^{(T)}_{[18;18]QP}$ sind die Komponenten der linearen Element-Steifigkeitsmatrix der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie. Die Größen $P^{(T)}_{[18]Q}$ werden generalisierte Element-Knotenlasten genannt. Ihr Wert kann nur numerisch berechnet werden. Wir schreiben $\boldsymbol{P}{:=}\boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{L}$ und berechnen die Komponenten von $\boldsymbol{L}$ durch die folgende Quadraturformel:

$$\begin{aligned}
L^{(T)}_{[21]G} &= \iint_{\omega^{(T)}} p^{(T)}(X_1, X_2)\xi_{[21]G}(X_1, X_2)\ \mathrm{d}X_1\ \mathrm{d}X_2 \\
&= 2A^{(T)} \iint_{\omega_0} p^{(T)}(X_1(\zeta_2,\zeta_3), X_2(\zeta_2,\zeta_3))\xi_{[21]G}(\zeta_2,\zeta_3)\ \mathrm{d}\zeta_2\ \mathrm{d}\zeta_3 \\
&\approx \sum_{I=1}^{7} 2A^{(T)} g_I p^{(T)}(X_1(\zeta_{2,I},\zeta_{3,I}), X_2(\zeta_{2,I},\zeta_{3,I}))\xi_{[21]G}(\zeta_{2,I},\zeta_{3,I}).
\end{aligned} \tag{7.47}$$

ω_0 ist das Einheitsdreieck, was in den kartesischen Koordinaten (ζ_2, ζ_3) die Ecken (0,0), (0,1) und (1,0) hat. Die Werte der Gewichte g_I und die Koordinaten der Integrationspunkte sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst.

I	$\zeta_{2,I}$	$\zeta_{2,I}$	g_I
1	$1/3$	$1/3$	$9/80$
2	$(6-\sqrt{15})/21$	$(6-\sqrt{15})/21$	$(155-\sqrt{15})/2400$
3	$(9+2\sqrt{15})/21$	$(6-\sqrt{15})/21$	$(155-\sqrt{15})/2400$
4	$(6-\sqrt{15})/21$	$(9+2\sqrt{15})/21$	$(155-\sqrt{15})/2400$
5	$(6+\sqrt{15})/21$	$(9-2\sqrt{15})/21$	$(155+\sqrt{15})/2400$
6	$(6+\sqrt{15})/21$	$(6+\sqrt{15})/21$	$(155+\sqrt{15})/2400$
7	$(9-2\sqrt{15})/21$	$(6+\sqrt{15})/21$	$(155+\sqrt{15})/2400$

Tabelle 7.1: Stützstellen und Gewichte zur exakten numerischen Integration von Polynomen 5. Ordnung über dem Einheitsdreieck.

Auf diese Weise wird jedes Polynom 5. Grades exakt interpoliert, was hier der exakten Erfassung einer konstanten Flächenlast p entspricht, da $\xi_{[21]G}$ ein Polynom 5. Grades ist. Eine derartige Erweiterung der *Gauß*'schen Quadraturformeln auf Dreieckselemente wurde erstmalig von *Hammer*, *Marlow* und *Stroud* in [52] sowie von *Filippa* in [37] vorgestellt.

Eine Vernetzung der Kontaktfläche, in der $\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{0}$ gilt, ist in Abbildung 7.6 auf Seite 147 dargestellt.

Die Gleichungen (7.43) und (7.46) bilden zusammen mit den Verschiebungsrandbedingungen das vollständige System zur Bestimmung der FE-Lösung $G^E_{[3N]\alpha;A}$ und $G^E_{[6N]3;B}$, wenn N die Zahl der Knoten ist. Deshalb formulieren wir im nächsten Abschnitt die Verschiebungsrandbedingungen und geben eine konsistente Stützrandbedingung an, bei der das bereits erwähnte Plattenparadox nicht auftritt.

7.5 Verschiebungsrandbedingungen — das Plattenparadox der frei drehbar gestützten Platte

Die drei Starrkörperfesseln gemäß (5.48) lassen sich sehr einfach als Knotenrandbedingungen realisieren. Dazu muss ω so vernetzt werden, dass die Fesselpunkte in einem Knoten liegen. Wenn wir das Problem als Vollkreis rechnen, erweist es sich als günstig, den Fesselknoten unabhängig von der Feinheit des Netzes feste Knotennummern zu geben. Wir haben hier den Knoten im Plattenmittelpunkt mit P^E_1 bezeichnet, weil wir uns hauptsächlich für die Werte in diesem Knoten interessieren. Da aus Symmetriegründen dort keine Horizontalverschiebungen vorliegen, formulieren wir in Abänderung von

(5.48)

$$G^E_{[3N]\alpha;1} = 0, \quad \text{was } U_\alpha(0,0) = 0 \text{ entspricht.} \tag{7.48}$$

Damit ist der Körper vollständig gegen horizontale Starrkörpertranslation gefesselt, so dass wir im Gegensatz zur ursprünglichen Formulierung des Randwertproblems nur noch einen weiteren Fesselpunkt benötigen, um ihn gegen horizontale Starrkörperrotation zu fesseln. Wir geben diesem zweiten Knoten die globale Knotennummer 2. Seine Koordinaten sollen bei $(R_A, 0)$ liegen. Als Knotenrandbedingung formulieren wir

$$G^E_{[3N]2;4} = 0, \quad \text{was } U_2(R_A, 0) = 0 \text{ entspricht,} \tag{7.49}$$

an. Wir fassen die drei Bedingungen durch

$$\sum_{B=1}^{3N} S_{[3N,3N]\alpha A\beta B} G^E_{[3N]\beta B} = 0 \tag{7.50}$$

mit

$$S_{[3N,3N]\alpha A\beta B} = \begin{cases} 1 \quad \text{für} & \left\{ \begin{array}{lcl} (\alpha A\beta B) & = & (1;1;1;1) \\ (\alpha A\beta B) & = & (2;1;2;1) \\ (\alpha A\beta B) & = & (2;4;2;4) \end{array} \right. \\ & \\ 0 \quad \text{für} & \text{alle anderen Indexkombinationen} \end{cases} \tag{7.51}$$

zusammen. In dieser Form kann die Randbedingung in der im nächsten Abschnitt beschriebenen Weise mit den nichtlinearen FE-diskretisierten Gleichgewichtsbedingungen zusammen geführt werden[3]. Von 6 N Gleichungen (7.50) sind nur 3 nichttrivial.

Die Stützrandbedingung lautet gemäß (5.52) $W = 0$ für $(X_1, X_2) \in \Theta$. Dies impliziert auch, dass sämtliche tangentiale Ableitungen von W auf Θ verschwinden. Wählen wir eine Triangulierung so, dass möglichst viele Knoten auf Θ liegen, generieren die Elementkanten ein Polygon mit dem Rand Θ^*.

Wenn wir nun fordern, dass $W(X_1, X_2) = 0$ für $(X_1, X_2) \in \Theta^*$ gelten soll, wobei Θ^* insgesamt M Ecken hat, lässt sich für dieses Ersatzproblem eine Lösung W^* berechnen. Als Plattenparadox[4] wird bezeichnet, dass W^* für $M \to \infty$ nicht gegen W konvergiert [95, 6, 5]. Demzufolge kann auch

---

[3] Wenn wir die Symmetriebedingungen ausnutzen, wie sie im Anhang B.3.1 beschrieben sind, und nur mit einem Achtelkreis rechnen, müssen entsprechend der dort vorgegebenen Symmetrierandbedingungen für mehr als zwei Knoten Horizontalverschiebungen vorgegeben werden.

[4] Das Phänomen wird gemäß der Ausführungen auf Seite 125 auch als *Sapondjan-Babuška*-Plattenparadox bezeichnet.

eine FE-Approximation W^{E*} für immer feinere Triangulierungen nur gegen W^*, nicht aber gegen W, konvergieren. In [6] wird berichtet, dass die Fehler beim *Kirchhoff*'schen Plattenproblem einer am Rand gestützten Kreisplatte für die maximale Durchbiegung bei 40% liegen.

Wir geben nachfolgend an, wie die Randbedingungen formuliert werden müssen, damit dieses Phänomen nicht auftritt, und geben eine anschauliche Begründung des Phänomens durch Vergleich der verbleibenden FE-Freiheitsgrade für verschieden formulierte FE-Randbedingungen an.

Zur knotenweisen Formulierung der Randbedingungen betrachten wir jetzt einen Knoten P^E_J auf Θ, mit den Koordinaten $X_{P\alpha}$. Seine Freiheitsgrade, die zur Generierung von W^E benötigt werden, fassen wir zu dem Knotenvektor $\boldsymbol{g}^E_{[6]J}$ zusammen und es soll gelten

$$\boldsymbol{g}^E_{[6]J} := \begin{pmatrix} G^E_{[6N]3;6(J-1)+1} \\ G^E_{[6N]3;6(J-1)+2} \\ G^E_{[6N]3;6(J-1)+3} \\ G^E_{[6N]3;6(J-1)+4} \\ G^E_{[6N]3;6(J-1)+5} \\ G^E_{[6N]3;6J} \end{pmatrix} = \left. \begin{pmatrix} W(X_1,X_2) \\ \frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial X_1} \\ \frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial X_2} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_1^2} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_2^2} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial X_1 \partial X_2} \end{pmatrix} \right|_{(X_1,X_2)=(X_{J1},X_{J2})} .$$

Führen wir jetzt ein lokales Koordinatensystem ein, dessen Ursprung gemäß Abbildung 7.7 im Knoten liegt, dessen eine Koordinate s im Knoten tangential an Θ liegt und dessen andere Koordinate n im Knoten normal auf Θ steht, können wir einen Randknotenvektor $\boldsymbol{g}^R_{[6]J}$ einführen, für den gilt

$$\boldsymbol{g}^R_{[6]J} := \begin{pmatrix} G^R_{[6N]3;6(J-1)+1} \\ G^R_{[6N]3;6(J-1)+2} \\ G^R_{[6N]3;6(J-1)+3} \\ G^R_{[6N]3;6(J-1)+4} \\ G^R_{[6N]3;6(J-1)+5} \\ G^R_{[6N]3;6J} \end{pmatrix} := \left. \begin{pmatrix} W(X_1,X_2) \\ \frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial n} \\ \frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial n^2} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial n \partial s} \end{pmatrix} \right|_{(X_1,X_2)=(X_{J1},X_{J2})} .$$

Dabei schreiben wir formal $G^R_{[6N]3;6(J-1)+K}$ statt $G^R_{[6M]3;6(J-1)+K}$, falls es genau M Randknoten gibt, um den Schreibaufwand durch die dann zusätzlich einzuführenden Transformationen, nicht unnötig zu erhöhen.

Die zu $W = 0$ für $(X_1, X_2) \in \Theta$ konsistente Bedingung an den Randknotenvektor lautet

$$\begin{pmatrix} G^R_{[6N]3;6(J-1)+1} \\ G^R_{[6N]3;6(J-1)+3} \\ G^R_{[6N]3;6(J-1)+5} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} W(X_1,X_2) \\ \frac{\partial W(X_1,X_2)}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 W(X_1,X_2)}{\partial s^2} \end{pmatrix}\right|_{(X_1,X_2)=(X_{J1},X_{J2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.52}$$

Die Komponenten des Randknotenvektors, lassen sich durch folgende Transformation in die Elemente des Knotenvektors überführen:

$$\boldsymbol{g}^R_{[6]J} = \boldsymbol{t}^R_{[6,6]J}\boldsymbol{g}^E_{[6]J} \quad \text{bzw.}$$

$$G^R_{[6N]3;6(J-1)+K} = \sum_{L=1}^{6} T^R_{[6N,6N]6(J-1)+K;6(J-1)+L} G^E_{[6N]3;6(J-1)+L}, \tag{7.53}$$

wobei wir auch hier aus Gründen des Schreibaufwandes $T^R_{[6N,6N]P;Q}$ statt $T^R_{[6M,6N]P;Q}$ schreiben. Es gilt

$$T^R_{[6N,6N]6(J-1)+K;6(J-1)+L} = t^R_{[6]J;KL}\ \delta_{IJ} \tag{7.54}$$

mit

$$\boldsymbol{t}^R_{[6,6]J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma^R_J) & -\sin(\gamma^R_J) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\gamma^R_J) & \cos(\gamma^R_J) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\gamma^R_J) & \sin^2(\gamma^R_J) & -2\cos(\gamma^R_J)\sin(\gamma^R_J) \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2(\gamma^R_J) & \cos^2(\gamma^R_J) & 2\cos(\gamma^R_J)\sin(\gamma^R_J) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\gamma^R_J)\sin(\gamma^R_J) & -\cos(\gamma^R_J)\sin(\gamma^R_J) & \cos^2(\gamma^R_J)-\sin^2(\gamma^R_J) \end{pmatrix} \tag{7.55}$$

für $2 < J < M+3$ und $\boldsymbol{t}^R_{[6,6]J;KL} = \delta_{KL}$ für $J < 3$ oder $J > M+2$. Dabei ist γ^R_J gemäß Abbildung 7.7 der Winkel zwischen X_1 und n in P^E_J.

Wir erkennen, dass ein Knoten bei Erfüllung der Bedingung (7.52) nur noch 3 unabhängige Freiheitsgrade bezüglich W hat, d.h. 9 Freiheitsgrade bezüglich W und U_α, die den FE-diskretisierten Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen.

Betrachten wir nun die Situation $W = 0$ für $(X_1, X_2) \in \Theta^*$ und bezeichnen die beiden mit P^E_J verbundenen Elementkanten, die auf Θ^* liegen, entsprechend Abbildung 7.7 mit $(+)$ und $(-)$.

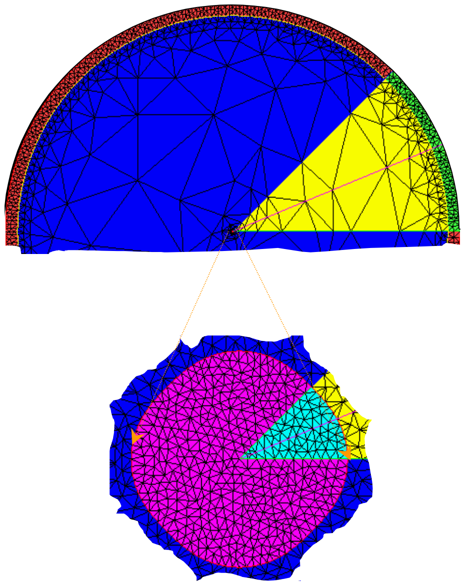

Abbildung 7.6: Vollkreisvernetzung für das 2D-Plattenproblem des Waferbiegetests mit besonders markiertem Auswertungsbereich. Oben: Obere Hälfte der Vollkreisvernetzung. Unten: Netz der Kontaktfläche bei 350-facher Vergrößerung des oberen Bildes.

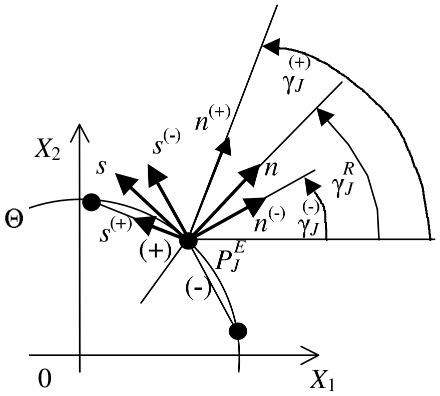

Abbildung 7.7: Lokale Koordinatensysteme. Ohne Index: Entlang des Stützkreises Θ. Mit Index: Entlang des Polygons Θ^* sind $(-)$ und $(+)$ die jeweiligen Randkantenindizes.

Für jede Elementkante können wir nun knotenweise Randknotenvektoren einführen. Im Knoten P^E_J gilt damit

$$\begin{pmatrix} G^{(-)}_{[6N]3;6(J-1)+1} \\ G^{(-)}_{[6N]3;6(J-1)+3} \\ G^{(-)}_{[6N]3;6(J-1)+5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} G^{(+)}_{[6N]3;6(J-1)+1} \\ G^{(+)}_{[6N]3;6(J-1)+3} \\ G^{(+)}_{[6N]3;6(J-1)+5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog zu $\boldsymbol{t}^R_{[6,6]J}$ definieren wir $\boldsymbol{t}^{(-)}_{[6,6]J}$ und $\boldsymbol{t}^{(+)}_{[6,6]J}$. Da jedoch $\gamma^{(+)}_I \neq \gamma^{(-)}_I$ gilt, folgen mit

$$\boldsymbol{g}^{(-)}_{[6]J} = \boldsymbol{t}^{(-)}_{[6,6]J}\boldsymbol{g}^E_{[6]J} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{g}^{(+)}_{[6]J} = \boldsymbol{t}^{(+)}_{[6,6]J}\boldsymbol{g}^E_{[6]J}$$

aus den obigen Kantenrandbedingungen insgesamt 5 unabhängige Bedingungen. Im Gegensatz zum Originalproblem hat der Knoten P^E_J bezüglich W^E nur noch einen Freiheitsgrad. Damit ist das Verschiebungsfeld W^{*E} viel mehr eingeschränkt, als durch das ursprüngliche Problem vorgegeben. Da insbesondere der Gradient in den Knoten komplett verschwindet, erhalten wir viel kleinere Durchbiegungen. Dies ändert sich auch für immer feiner werdende Netze nicht, die gemäß (7.9) aus Elementen bestehen, deren Inneres nicht leer ist.

Wir bringen jetzt die Bedingungen (7.52) auf eine ähnliche Form wie (7.50):

$$\sum_{B=1}^{6N} S^R_{[6N,6N]AB}G^R_{[3N]3;B} = 0. \tag{7.56}$$

Wenn wir Θ mit insgesamt M Knoten abtasten und die Knoten von 3 bis $M+2$ durchnummerieren, hat $S^R_{[6N,6N]AB}$ die Gestalt

$$S_{[6N,6N]3;6(I-1)+K;6(J+1)+L} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad I = J,\ 2 < I < M+3, K = L, \\ & \qquad\qquad L \text{ ungerade}, \\ 0 & \text{für} \quad \text{alle anderen Indexkombinationen.} \end{cases} \tag{7.57}$$

Um (7.56), wie nächsten Abschnitt gezeigt, mit den FE-diskretisierten Gleichgewichtsbedingungen in Beziehung zu bringen, führen wir jetzt die Matrix $S^E_{[6N,6N]AB}$ ein, die unter Verwendung von (7.54) durch die folgende Transformation definiert ist:

$$S^E_{[6N,6N]CD} = \sum_{A,B=1}^{6N} T^R_{[6N,6N]AC}S^R_{[6N,6N]AB}T^R_{[6N,6N]BD}. \tag{7.58}$$

Multiplizieren wir (7.58) von links mit der Transponierten der Matrix

$\boldsymbol{T}^R_{[6N,6N]}$ ergibt sich

$$\sum_{A,B=1}^{6N} T^R_{[6N,6N]AC} S^R_{[6N,6N]AB} G^R_{[6N]3;B} = \sum_{D=1}^{6N} S^E_{[6N,6N]CD} G^E_{[6N]3;D} = 0. \quad (7.59)$$

Von diesen $6N$ Gleichung sind bei M Knoten auf Θ genau $3M$ nichttrivial. Sie bilden zusammen mit den 3 nichttrivialen Gleichungen aus (7.50) die $3(M+1)$ Knotenverschiebungsrandbedingungen der hier vorgestellten FE-Diskretisierung des *von Kármán*'schen Plattenproblems.

7.6 Das vollständige *Newton*-Schema des Gesamtproblems

Um abschließend das vollständige algebraische Gesamtproblem aufzustellen, für das dann das zugehörige *Newton*-Schema berechnet wird, sei hier noch einmal daran erinnert, dass die beiden resultierenden nichtlinearen Gleichungen (7.43) und (7.46) nicht für $\boldsymbol{U}^E$, $\boldsymbol{V}^E \in \mathcal{V}_0^E$, sondern für $\boldsymbol{U}^E$, $\boldsymbol{V}^E \in \mathcal{V}^E$ aufgestellt wurden. Dabei haben wir im Abschnitt 7.3.1 den Raum $\mathcal{V}^E \subset \mathcal{V}$ als endlichdimensionalen Unterraum von $\mathcal{V}$ definiert, wobei wir mit $\mathcal{V}$ gemäß (7.3) den Raum der Funktionen beschreiben, die alle notwendigen Differenzierbarkeits- und Integrierbarkeitseigenschaften der schwache Formulierung erfüllen. $\mathcal{V}_0^E \subset \mathcal{V}^E \cap \mathcal{V}_0$ hingegen ist als endlichdimensionaler Unterraum von $\mathcal{V}_0$ gemäß (7.2) definiert, in dem neben den Anforderungen von $\mathcal{V}^E$ auch noch die Verschiebungsrandbedingungen erfüllt sind.

Insbesondere folgt, wie im Weiteren ausgeführt, aus $\boldsymbol{V}^E \in \mathcal{V}_0^E$, dass $3(M+1)$ der $12N$ Gleichungen von (7.43) und (7.46) nicht zur Verfügung stehen. Dabei haben wir wie im letzten Abschnitt angenommen, dass das betrachtete Netz aus insgesamt N Knoten besteht, von denen M auf der Kurve Θ liegen.

Bei Verwendung der gleichen Knotennummerierung wie im letzten Abschnitt, gelten für $\boldsymbol{V}^E \in \mathcal{V}_0^E$ analog zu den Knotenverschiebungsrandbedingungen (7.48) und (7.49) die Bedingungen $Q^E_{[3N]\alpha;1} = 0$ und $Q^E_{[3N]2;4} = 0$. Damit gilt die Gleichung (7.43)

$$\sum_T \sum_{I=1}^{9} \left(\sum_{J=1}^{9} G^{(T)}_{[9]\beta;J} K^{(T)}_{[9;9]\beta J\alpha I} \; \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{P,Q=1}^{18} G^{(T)}_{[18]3;P} G^{(T)}_{[18]3;Q} D^{(T)}_{[18;18;9]PQ\alpha I} \; \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha}IA} \right) = 0$$

nicht für $A = 1$ und nicht für das Indexpaar $(\alpha, A) = (2, 4)$, da die Gleichungen aus der diskretisierten schwachen Formulierung für den Fall gewonnen wurden, dass $Q^E_{[3N]\alpha;A} = 0$ beliebige Werte annehmen können. Die drei fehlenden Gleichungen sind gerade die drei Verschiebungsrandbedingungen (7.48) und (7.49).

Für $\boldsymbol{V}^E \in \mathcal{V}_0^E$ gelten analog zu den diskretisierten Stützrandbedingungen (7.58) die Bedingungen $Q^R_{[6N]3;A;A} = 0$ mit $A = 6(I-1)+2(K-1)+1$ für $2 < I < M+3$ und $1 \leq K \leq 3$. Da dies eine Formulierung in Randknotengrößen ist, extrahieren wir aus der diskretisierten schwachen Formulierung (7.44) unter Verwendung der Transformation (7.54) statt der Gleichungen (7.46) die transformierten Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum_{B}^{6N}\sum_{T}\sum_{P}^{18}\Bigg(&\sum_{Q}^{18}\sum_{J}^{9}\; G^{(T)}_{[18]3;Q} D^{(T)}_{[18,18,9]QP\beta J}\; G^{(T)}_{[9]\beta;J}\\ &\qquad+\frac{1}{2}\sum_{Q,O,V}^{18}\; G^{(T)}_{[18]3;O}\; G^{(T)}_{[18]3;V} D^{(T)}_{[18,18,18,18]QPOV}\; G^{(T)}_{[18]3;Q}\\ &\qquad\qquad+\sum_{Q}^{18} G^{(T)}_{[18]3;Q} K^{(T)}_{[18,18]QP} - P^{(T)}_{[18]P}\Bigg)\; \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PB}(\boldsymbol{T}^R)^{-1}_{[6N,6N]BD} = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten nicht für $D = 6(I-1) + 2(K-1) + 1$, falls $2 < I < M+3$ und $1 \leq K \leq 3$ gilt, da für diesen Wert von D in der schwachen Formulierung $Q^R_{[6N]3;D} = 0$ gilt. Stattdessen gelten die $3M$ diskretisierten Stützrandbedingungen $G^R_{[6N]3;D} = \sum_{C=1}^{6N} T^R_{[6N,6N]3;DC} G^E_{[6N]3;C} = 0$.

Hatte das ursprüngliche Teilsystem (7.46) die Gestalt $f_B(\boldsymbol{G}^E_{[6N]3}) = 0$, haben wir jetzt ein System der Gestalt

$$\sum_{B=1}^{6N} f^*_B(\boldsymbol{G}^E_{[6N]3)})\; (\boldsymbol{T}^R)^{-1}_{[6N,6N]BD} = 0,$$

was äquivalent ist zum modifizierten System $f^*_B(\boldsymbol{G}^E_{[6N]3}) = 0$. Dabei unterscheiden sich beide Systeme dadurch, dass die Lösungen des ursprünglichen Systems die diskretisierten Verschiebungsrandbedingungen im allgemeinen nicht erfüllen, während die Lösungen des modifizierten Systems die Randbedingungen erfüllen.

Aus programmiertechnischer Sicht lässt sich eine solche Vorgehensweise nur sehr aufwändig realisieren. Deshalb werden hier die Randbedingungen unter Verwendung der so genannten Penalty-Technik berücksichtigt. Für detaillierte Ausführung zu dieser Vorgehensweise sei hier auf *Zienkiewicz* [116] und die dort aufgeführte weitere Literatur verwiesen.

Bei der Penalty-Methode multiplizieren wir die Gleichungen der Verschiebungsrandbedingungen in der Gestalt von (7.50) und (7.59) mit einer geeignet großen Straf-Funktion c, so dass wir

$$c\sum_{B=1}^{3N} S_{[3N,3N]\alpha A\beta B}G^{E}_{[3N]\beta B}=0 \quad \text{und} \quad c\sum_{D=1}^{6N} S^{E}_{[6N,6N]CD}G^{E}_{[6N]3;D}=0 \tag{7.60}$$

erhalten. Die linke Gleichung von (7.60) addieren wir zur ursprünglichen Scheibengleichung (7.43) und die rechte Gleichung von (7.60) zur ursprünglichen Plattengleichung (7.46).

Eine anschauliche Interpretation dieser Vorgehensweise ist die folgende: Wir betrachten die ursprünglichen Verschiebungsrandbedingungen als knotenweise starre Fesseln. Die starren Fesseln werden jetzt durch elastische Fesseln hoher Steifigkeit ersetzt. Dabei muss der Wert der Federsteifigkeit so hoch sein, dass er viel größer ist als die Werte der diskretisierten Steifigkeiten des elastischen Plattenmaterials.

Das *Newton*-Schema des Gesamtsystems lautet

$$\begin{pmatrix} K^{E}_{[3N,3N]\alpha A\beta B}+cS^{E}_{[3N,3N]\alpha A\beta B} & K^{E(\mathcal{K})}_{[3N,6N]\alpha AD} \\ K^{E(\mathcal{K})}_{[3N,6N]\beta BC} & K^{E(\mathcal{K})}_{[6N,6N]CD}+cS^{E}_{[6N,6N]CD} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \Delta G^{E(\mathcal{K}+1)}_{[3N]\beta B} \\ \Delta G^{E(\mathcal{K}+1)}_{[6N]3;D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F^{E(\mathcal{K})}_{[3N]\alpha A}-cS^{E}_{[3N,3N]\alpha A\beta B}G^{E(\mathcal{K})}_{[3N]\beta B} \\ P^{E}_{[6N]C}-F^{E(\mathcal{K})}_{[6N]C}-cS^{E}_{[6N,6N]CD}G^{E(\mathcal{K})}_{[6N]3;D} \end{pmatrix}, \tag{7.61}$$

wobei wir speziell hier die Summationskonvention nicht nur für griechische Indizes von 1 bis 2 verwendet haben, sondern zusätzlich auch für die Großbuchstaben A und B von 1 bis $3N$ und für die Großbuchstaben C und D von 1 bis $6N$. Der kalligraphische Buchstabe $\mathcal{K}$ sei hier der Iterationsindex des *Newton*-Verfahrens. Dabei wurden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\Delta G^{E(\mathcal{K}+1)}_{[3N]\beta B} := G^{E(\mathcal{K}+1)}_{[3N]\beta B} - G^{E(\mathcal{K})}_{[3N]\beta B}, \quad \Delta G^{E(\mathcal{K}+1)}_{[6N]3;D} := G^{E(\mathcal{K}+1)}_{[6N]3;D} - G^{E(\mathcal{K})}_{[6N]3;D},$$

$$P^{E}_{[6N]C} = \sum_{T} \sum_{P}^{18} P^{(T)}_{[18]P}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PC},$$

$$F^{E(\mathcal{K})}_{[6N]C} = \sum_{T} \sum_{P,Q}^{18} \Bigg(K^{(T)}_{[18,18]QP} G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;Q} + \sum_{J}^{9}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;Q} D^{(T)}_{[18,18,9]QP\beta J}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[9]\beta;J}$$
$$+\frac{1}{2} \sum_{O,V}^{18}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;O}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;V} D^{(T)}_{[18,18,18,18]QPOV}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;Q} \Bigg)\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PC}\ ,$$

$$F^{E(\mathcal{K})}_{[3N]\alpha A} = \sum_{T} \sum_{I=1}^{9} \Bigg(\sum_{J=1}^{9} G^{(T)(\mathcal{K})}_{[9]\beta;J}\ K^{(T)}_{[9;9]\beta J\alpha I}\ \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha} IA}$$
$$+\ \frac{1}{2} \sum_{P,Q=1}^{18} G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;P}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;Q}\ D^{(T)}_{[18;18;9]PQ\alpha I}\ \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha} IA} \Bigg),$$

$$K^{E}_{[3N,3N]\alpha A\beta B} = \sum_{T} \sum_{I,J=1}^{9} \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\alpha} IA} K^{(T)}_{[9;9]\alpha I\beta J}\ \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\beta} JB},$$

$$K^{E(\mathcal{K})}_{[3N,6N]\beta BC} = \sum_{T} \sum_{P,Q}^{18} \sum_{J}^{9}\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PC}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;Q} D^{(T)}_{[18,18,9]QP\beta J}\ \Omega^{(T)}_{[9;3N]\underline{\beta};JB},$$

$$K^{E(\mathcal{K})}_{[6N,6N]CD} = \sum_{T} \sum_{P,Q}^{18} \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;QD}\ \Bigg(K^{(T)}_{[18,18]QP} + \sum_{J}^{9}\ D^{(T)}_{[18,18,9]QP\beta J}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[9]\beta;J}$$
$$+\frac{3}{2} \sum_{O,V}^{18}\ D^{(T)}_{[18,18,18,18]QPOV}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;O}\ G^{(T)(\mathcal{K})}_{[18]3;V} \Bigg)\ \Omega^{(T)}_{[18;6N]3;PC}\ .$$

Das System (7.61), einschließlich der vorgestellten Elemente, wurde vom Autor in die *WIAS*-Toolbox *pdelib* [47] implementiert, so dass jetzt die Spannungsberechnung, und der experimentelle Vergleich erfolgen kann. Bevor wir die eigentlichen Berechnungen zum Biegetest im nächsten Abschnitt grafisch oder tabellarisch vorstellen, vergleichen wir noch einige numerische Ergebnisse mit analytischen Lösungen der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie.

7.7 Numerische Ergebnisse

7.7.1 *Kirchhoff*-Test zum Plattenparadox

Die erste numerische Untersuchung befasst sich mit der Genauigkeit des 18-Freiheitsgrad-Plattenelements in Verbindung mit den vorgeschlagenen FE-Randbedingungen. Dazu vergleichen wir in Abbildung 7.8 die analytische Lösung des betrachteten Biegeversuchs bei isotroper Materialannahme, Verwendung der linearen *Kirchhoff*-Theorie und der Lastaufbringung in Form einer Punktlast.

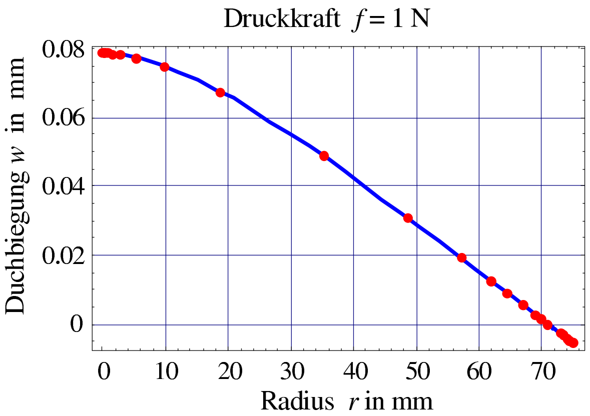

Abbildung 7.8: Verschiebungsverlauf bei isotroper *Voigt*-Mittelung mit den in Tabelle A.4 angegebenen isotropen Konstanten für $f = 1$ N. Blaue Linie: analytische Lösung. Rote Punkte: FE-Lösung in den Knoten.

Die Platte wird unter einer Kraft von 1 N gebogen. Als isotropes Materialgesetz wurde zunächst die 3D-Mittelung der kubisch anisotropen Daten nach *Voigt* gemäß Tabelle A.4 auf Seite 199 gewählt. Die analytische Lösung ist im Anhang (B.19) angegeben. Wir erkennen in Abbildung 7.8, dass die Werte der Knotenverschiebungen genau auf der Linie der analytischen Lösung liegen. Der Fehler liegt bei etwa 1‰. Das heißt, das Plattenparadox tritt nicht auf. Für den analytischen Wert im Mittelpunkt erhalten wir mit den hier angegebenen Zahlenwerten $W_{max} = 0,078533$ mm, für die FE-Rechnung $W_{max} = 0,078561$ mm. Für die numerische Lösung wurde mit einem FE-Netz des Vollkreises gerechnet, das aus ca. 1700 Knoten besteht. Dabei ist anzumerken, dass die hohe Knotenzahl nur der für spätere Rechnungen benötigten genauen Darstellung der Kontaktfläche geschuldet ist.

Wenn wir das gleiche Netz für eine Rechnung benutzen, die das Polygon als Stützrand verwendet, so dass in den Knoten keine Durchbiegungsgradienten auftreten können, liegt die maximale Durchbiegung bei 0,0413 mm, was einem relativen Fehler von 47% entspricht.

	kubisch	3D-*Voigt*	3D-*Eisenbg.*	3D-*Reuss*	3D-*Hill*
W in mm	0,09660	0,07853	0,08056	0,08284	0, 08284
Fehler in %	0	18,7	16,6	14,2	14,2
	(7.62)	2D-*Voigt*	2D-*Eisenbg.*	2D-*Reuss*	2D-*Hill*
W in mm	0,09659	0,07878	0, 08167	0,08462	0,08161
Fehler in %	0,008	18,4	15,5	12,3	15,5

Tabelle 7.2: Maximale Durchbiegungen nach der linearen Theorie für einen Waferdurchmesser von 150 mm, Stützradius 142 mm, Druckkraft 1 N. Isotrope Näherung nach *Voigt*, *Eisenberg*, *Reuss* und *Hill* für GaAs, berechnet aus den *Voigt*'schen Konstanten gemäß (3.1). Die eigene Näherung wurde aus Formel (7.62) berechnet.

7.7.2 Vergleich der isotropen Mittelungsformeln bezüglich der maximalen Durchbiegung

Da das Problem geometrisch rotationssymmetrisch ist, sind wir an einer geeigneten isotropen Approximation interessiert. Deshalb vergleichen wir die maximale Durchbiegung der kubisch anisotropen FE-Kirchhoff-Lösung mit den acht gemäß der Tabellen A.4 und B.1 zur Verfügung stehenden Mittelungsformeln. Das Resultat ist in Tabelle 7.2 zusammengefasst.

Wir erhalten, dass alle Mittelungsformeln zur Berechnung der Durchbiegung im Grunde unbrauchbare Ergebnisse liefern, da sie alle Fehler zwischen 12 und 19 Prozent erzeugen, wobei alle Mittelungen zu steif sind. Außerdem fällt auf, dass bis auf die *Hill*-Mittelung die 2D-Mittelungsformeln das kubische Verhalten besser nähern als die 3D-Mittelungen. Schließlich erkennen wir, dass das 2D-*Reuss*-Mittel, wie bei der isotropen Mittelung der Kontaktfläche im Kapitel 6, die besten Resultate liefert.

Konstruieren wir jetzt eine isotrope Mittelung, die der Bedingung (A.14) genügt und einen minimalen Fehler aufweist, erhalten wir

$$E^{DI} = 91,76 \text{ GPa} \quad \text{und} \quad \nu^{DI} = 0,2975. \tag{7.62}$$

Berechnen wir mit diesen Konstanten die Kontaktfläche der *Hertz*'schen Pressung, ergibt sich die in Abbildung 7.9 gezeigte Kurve.

Im Vergleich zu den Abbildungen 6.2 und 6.3 ist erkennbar, dass die Kontaktfläche besser genähert wird als durch die theoretisch abgeleiteten isotropen Mittel. Die Kontaktfläche ist hier etwas größer als im anisotropen Fall. Der entsprechende Wert für I gemäß Tabelle 6.3 lautet $I = 3.69599\, 10^7 \text{Pa}^{-2/3}$.

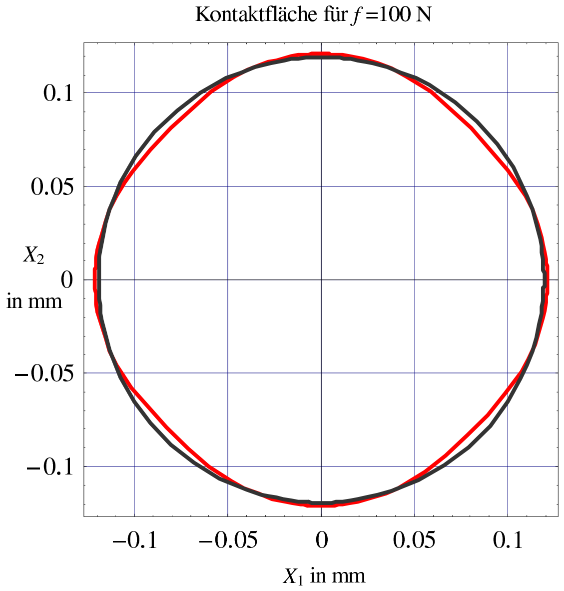

Abbildung 7.9: Kontaktfläche zwischen einem $\langle 100 \rangle$-orientierten GaAs-Halbraum und einer Stahlkugel mit dem Radius R_K bei einer Druckkraft $f = 100$ N für rein elastisches Materialverhalten. Rot: Druckfläche in der (100)-Ebene. Die Kreisfläche resultiert aus der isotropen Näherungen gemäß Formel (7.62).

7.7.3 Nichtlineare anisotrope Rechnung im Vergleich zum Experiment

Die einzigen vorliegenden experimentellen Daten sind die maximalen Durchbiegewerte in Abhängigkeit von der Kraft f. In Abbildung 7.10 erkennen wir, dass die experimentellen Werte sehr gut mit den numerischen Daten übereinstimmen. Wir erkennen jedoch an den berechneten Durchbiegungen auch, dass sich die numerisch berechnete Modellplatte leicht steifer als die Platte im Experiment verhält, sofern Messfehler auszuschließen sind. Die Abweichungen zum Fit liegen bei maximal 4%. Die Werte der berechneten Daten sind in Tabelle 7.3 angegeben.

Anhand dieser Experimente konnte sofort die im Abschnitt 4.3.4 gestellte Modellierungsfrage geklärt werden, ob es tatsächlich zum Abgleiten der Platte auf dem Stützrand kommt. Abbildung 7.11 zeigt die Gleitlösung im Vergleich zur Haftlösung, die resultiert, wenn der Wafer frei drehbar horizontal auf dem Stützrand haften würde. Die Annahme der Randbedingung Haften widerspricht dem experimentellen Befund. Außerdem wird in Abbildung 7.11 noch einmal die völlige Unzulänglichkeit der linearen Theorie für den hier betrachteten Lastbereich gezeigt, für die es gar nicht möglich ist, zwischen Haften und Gleiten zu unterscheiden.

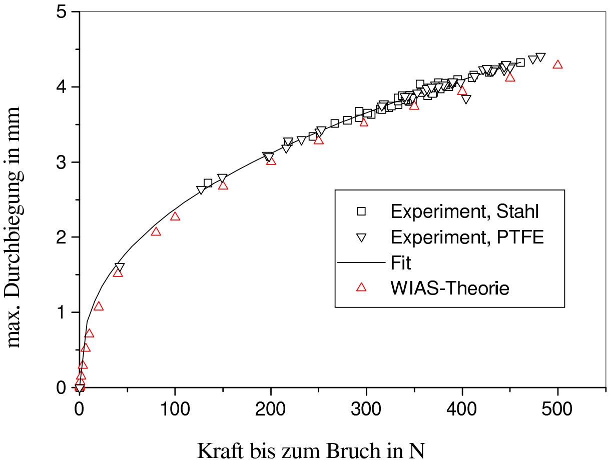

Abbildung 7.10: Vergleich der maximalen Durchbiegungen in Theorie und Experiment für einen Waferdurchmesser von 150 mm nach [35]. Die Experimente wurden zum einen Teil mit Stahldruckkugeln zum anderen Teil mit Teflondruckkugeln durchgeführt.

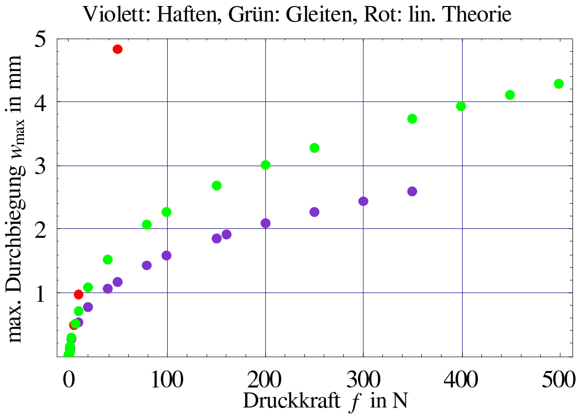

Abbildung 7.11: Vergleich der maximalen Durchbiegung für die beiden Kontaktbedingungen reibungsfreies Gleiten (mittlere Punktkurve) und Haften (unter Punktkurve). Die roten Punkte resultieren aus der *Kirchhoff*-Lösung (obere Punktgerade)

Schließlich sei hier noch bemerkt, dass es auf diese Weise möglich war, anhand der berechneten Daten einen schwer wiegenden systematischen Messfehler in der Lastdurchbiegungskurve für den Wafer mit 100 mm Durchmesser aufzudecken.

7.7.4 Spannungsverläufe mit anisotropen Effekten für Wafer mit 150 mm Durchmesser

Im Folgenden sind die Verläufe der Radialspannung σ_{rr}, der Torsions-Schubspannung $\sigma_{r\varphi}$ und der Tangentialspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ beispielhaft für die Kraft $f = 100$ N für die drei Winkel $\varphi = 0°, 22.5°, 45°$ darstellt. Die Definition des Winkels entspricht der von Abbildung 6.1. Die Tangential- und Radialspannungen steigen zur Mitte hin sehr steil an. Ihre anisotropen Anteile werden durch die Abstände der verschiedenen Kurven sichtbar. Die anisotropen Abweichungen sind vernachlässigbar klein. Betrachten wir die Radialspannung in der Umgebung des Plattenmittelpunktes, so können wir in Abbildung 7.14 erkennen, dass der Spannungsverlauf in der Nähe des Kontaktradius 0,113 mm < r < 0,122 mm einen Wendepunkt besitzt und von dort aus immer flacher auf sein Maximum ansteigt. Die winkelabhängigen Werte des Kontaktradius sind in Tabelle 6.1 auf Seite 111 angegeben.

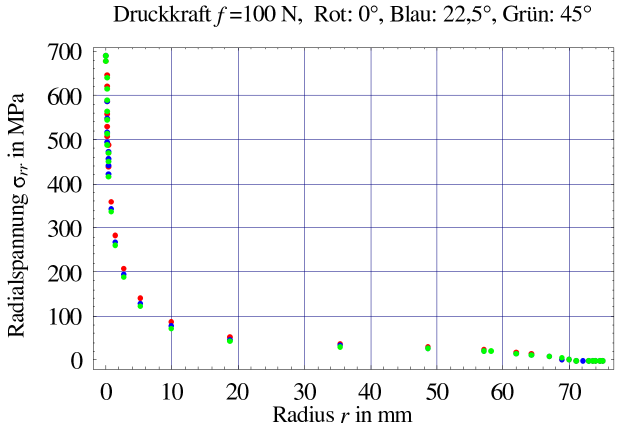

Abbildung 7.12: Radialspannungen auf der Seite $X_3 = h/2$ für verschiedene Orientierungswinkel, aufgetragen über den gesamten Waferradius bei einer Druckkraft von $f = 100$ N.

Die Torsions-Schubspannungen $\sigma_{r\varphi}$ sind rein anisotroper Natur, da sie im isotropen Fall identisch Null sind. In diesem Sinne verhält sich die Torsions-Schubspannung auf der $\langle 100 \rangle$-Achse , d.h. bei $\varphi = 0°$, wie im isotropen Fall. Die Werte der maximalen Torsions-Schubspannungen erreichen höchstens 4% Prozent der größten Werte der Radial- und Tangentialspannung und bauen sich am Rand der Kontaktfläche zu lokalen Maxima auf.

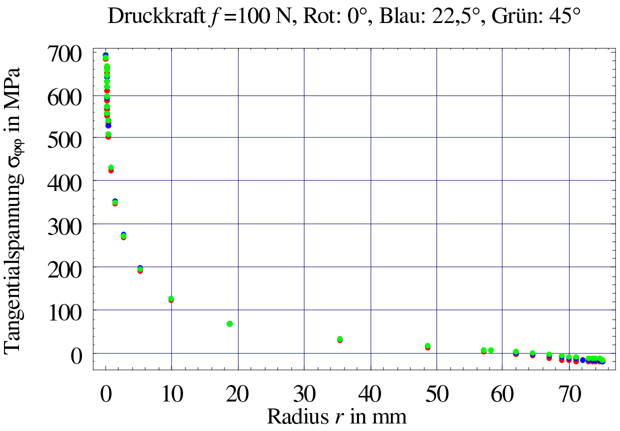

Abbildung 7.13: Tangentialspannungen auf der Seite $X_3 = h/2$ für verschiedene Orientierungswinkel, aufgetragen über den gesamten Waferradius bei einer Druckkraft von $f = 100$ N.

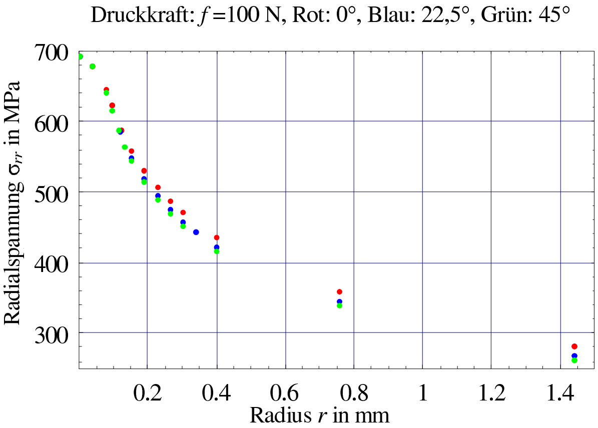

Abbildung 7.14: Radialspannungen auf der Seite $X_3 = h/2$ für verschiedene Orientierungswinkel, aufgetragen bis zu einem Radius, der etwa dem zehnfachen des Kontaktradius entspricht, bei einer Druckkraft von $f = 100$ N.

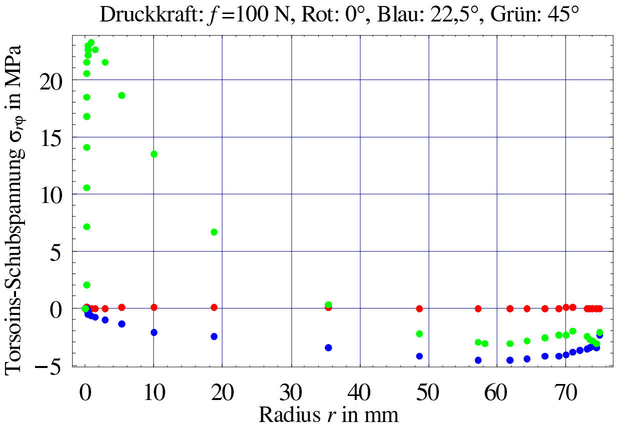

Abbildung 7.15: Torsions-Schubspannungen auf der Seite $X_3 = h/2$ für verschiedene Orientierungswinkel, aufgetragen über den gesamten Waferradius bei einer Druckkraft von $f = 100$ N.

Die vollständigen Berechnungen über dem gesamten Lastbereich von 50 N bis 450 N wurden auftragsgemäß für die Firma *FCM* erstellt und gingen in deren Eigentum über. Sie zeigen immer einen ähnlichen Verlauf, wie die hier für die Druckkraft 100 N dargestellten Kurven, so dass auf ihre Präsentation hier verzichtet werden kann.

7.7.5 Beurteilung der Maximalspannungen im Lichte der Plattentheorie

Während wir die Güte der hier vorgestellten Verschiebungsberechnungen durch direkten Vergleich mit dem Experiment beurteilen können, haben wir ein solches Werkzeug zur Beurteilung der berechneten Spannungen nicht. Wir erinnern daran, dass die verwendete Plattentheorie eigentlich nur das Verhalten der führenden Terme asymptotisch entwickelter Verschiebungen exakt beschreiben. Es stellt sich daher die Frage, ob das Problem in ausreichender Genauigkeit nur durch seine führenden Terme beschrieben werden kann. Ist dies der Fall, müssen alle Annahmen, die für die klassische Herleitung im Abschnitt 5.3.1 gemacht wurden, zutreffen.

Die Bedingungen an die Verschiebungen $|u_\alpha| \ll |u_3| \ll R_I$ sind für alle Rechnungen in ausreichendem Maße erfüllt. Dagegen sind die Bedingungen $|\sigma_{33}| \ll |\sigma_{3\alpha}| \ll \|\sigma_{\alpha\beta}\|$ nur für Bereiche erfüllt, in denen $X_1^2 + X_2^2 > (\rho h)^2$ gilt. Im hier vorliegenden Fall erwies sich $\rho = 5$ als brauchbarer Wert. Für $X_1^2 + X_2^2 < (\rho h)^2$ ist die Bedingung nur für $X_3 = h/2$ und in den unmittelbar darüberliegenden Schichten erfüllt. Die größte Verletzung dieser Bedingung liegt im Punkt $(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, -h/2)$ vor. Die entsprechenden Werte sind in Tabelle 7.3 aufgelistet. Die Spannung σ_{r3} ist dort Null.

Wir erkennen, dass in diesem Punkt die Voraussetzungen zur Gültigkeit

f in N	$w(0,0,X_3)$ in mm	$\sigma_{rr}(0,0,\frac{h}{2})$ in MPa	$\sigma_{rr}(0,0,-\frac{h}{2})$ in MPa	$\sigma_{33}(0,0,-\frac{h}{2})$ in MPa
50	1,670	383,3	-328,6	-2719
100	2,584	691,6	-580,5	-3426
150	2,668	972,5	-805,6	-3921
200	2,994	1237	-1014	-4316
250	3,269	1488	-1209	-4649
300	3,510	1729	-1395	-4940
350	3,725	1962	-1572	-5201
400	3,920	2188	-1742	-5438
450	4,100	2406	-1904	-5655

Tabelle 7.3: Maximalspannungen und -verschiebungen in Abhängigkeit von der Druckkraft f bei $(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, \pm h/2)$. Für jedes f gilt $\sigma_{33}(0, 0, \frac{h}{2}) = \sigma_{r3}(0, 0, \pm\frac{h}{2}) = 0$.

der Plattentheorie verletzt sind. Damit sind die dort berechneten Spannungswerte in einem viel größerem Maße fehlerbehaftet als die Spannungswerte in den Gebieten, in denen die Beziehung nicht verletzt ist. Dass die Spannungen nur in dem eng begrenzten Bereich einen größeren Fehler aufweisen, lässt sich wegen der Kleinheit der Kontaktfläche, deren Durchmesser in der Größenordnung der Plattendicke liegt, mit dem Prinzip von *Saint-Venant* begründen. Außerdem erkennen wir, dass die Verletzung für kleinere Kräfte größer ist als für größere Kräfte, da die Kontaktfläche überproportional mit der Druckkraft wächst.

Um die tatsächlichen Spannungen zu ermitteln, müsste jetzt das so genannte Kernstück der Platte[5] nach einer 3D-Theorie berechnet werden. Als Kernstück einer Platte unter einer lokal begrenzten Last wollen wir einen zylindrischen Ausschnitt der Platte über der gesamten Dicke verstehen, an dessen Radius wir zwei Forderungen stellen. (1.) Er muss groß genug sein, so dass an seinem Rand die von der lokal begrenzten Flächenlast herrührenden Fehler entsprechend dem Prinzip von *Saint-Venant* bereits abgeklungen sind, so dass dort die Plattentheorie gilt. (2.) Der Radius sollte nicht so groß sein, dass der so beschriebene Kernzylinder selbst wieder eine dünne Platte ist, so dass wir wieder numerische Probleme mit der Genauigkeit bekommen, die typischerweise bei 3D-Berechnungen von dünnen, auf Biegung beanspruchten, Strukturen auftreten.

Die Berechnung des Kernzylinders kann in drei Schritten erfolgen. (*i*) Berechnung des Gesamtproblems mit der *von Kármán*'schen Plattentheorie. (*ii*) Auswertung der berechneten Spannungen bzw. Schnittgrößen auf der Mantelfläche des Kernzylinders. (*iii*) Berechnung des 3D-Problems für

---

[5] Diese Bezeichnung wird z.B. von *Föppl* in [42] gewählt.

den Kernzylinder mit den aus der 2D-Plattentheorie gewonnenen Randspannungen. (*iv*) Vergleich der nach beiden Theorien berechneten Verschiebungs- und Spannungswerte im Punkt $(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, h/2)$.

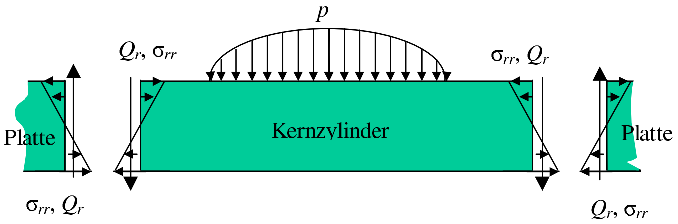

Abbildung 7.16: Kernzylinder der Platte unter der lokal begrenzten Last p mit den Randspannungen aus der 2D-Plattentheorie. Die axiale Schubspannung σ_{rz} in der Mantelfläche ist als resultierende Querkraft Q_r dargestellt.

Unterliegt der Kernzylinder für sich auch wieder moderaten Durchbiegungen, d.h. liegen die mit der Plattentheorie berechneten Durchbiegungen, gemessen vom Rand der Kernzylinders, in der Größenordnung der Plattendicke, muss auch für den 3D-Fall nach der nichtlinearen Theorie gerechnet werden. Zur Lösung dieses Problems bietet sich letztlich wieder die Methode der Finiten Elemente an.

Sind die Durchbiegungen im Kernzylinder hingegen klein gegenüber der Plattendicke, bietet sich die Verwendung der linearen Theorie an. Da für kubische Materialsymmetrie im Allgemeinen keine analytischen Lösungen zur Verfügung stehen, muss auch dieses Problem letztlich numerisch gelöst werden.

Haben wir jedoch ein brauchbares isotropes Ersatzmodell zur Hand, können auch analytische Lösungen verwenden. Als Werkzeug stehen uns hier die Lösungsansätze von *Papkowitsch* [88] und *Neuber* [79] zur Verfügung. Eine spezielle Variante der linearen 3D-Theorie ist die Theorie dicker Platten, deren wesentliche Grundzüge schon 1925 von *Nádai* in [77] vorgestellt wurden.

Im nächsten Kapitel stellen wir diese Theorie vor und rechnen einfache Testbeispiele, um die hier berechnete Maximalspannung an Hand dieser Theorie beurteilen zu können.

Um festzustellen, ob der Kernzylinder in guter Näherung mit der linearen Elastizitätstheorie berechnet werden kann, tragen wir die Durchbiegungsdifferenz $w(r, 0, X_3) - w(0, 0, X_3) = W(r, 0) - W(0, 0)$ für $f = 100$ N und $f = 450$ N im Intervall $0 \leq r \leq 5h$ auf und vergleichen sie mit h und $h^2/(2R_I) \ll h$. Wir erkennen in Abbildung 7.17, dass im Kernzylinder tatsächlich $|W(X_1, 0) - W(0, 0)| \ll h$ erfüllt ist, was für die Verwendung der linearen Theorie spricht.

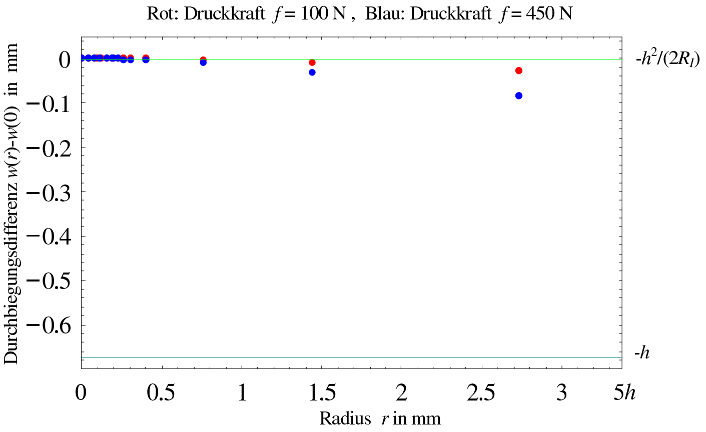

Abbildung 7.17: Durchbiegungsdifferenz $w(r) - w(0)$ im Kernzylinder der Platte für die Druckkräfte $f = 100$ N (rot) und $f = 450$ N (blau). Für $|w(r) - w(0)| \approx \frac{h}{2R_I}$ liegen kleine Durchbiegungen vor, für $|w(r) - w(0)| \approx h$ würden moderate Durchbiegungen vorliegen.

Kapitel 8

Analytische Lösungen für isotrope dicke Kreisplatten kleiner Durchbiegung

8.1 Die Biegung des Kernzylinders als isotropes rotationssymmetrisches 3D-Problem

Im letzten Abschnitt des Kapitels 7 ergab sich, dass eine genaue Untersuchung der Verhältnisse unter der Druckkugel nötig ist. Dies resultiert daraus, dass in der Umgebung des Kontaktbereiches die mit Hilfe der Plattentheorie berechneten Spannungen den Annahmen für die Gültigkeit der Plattentheorie widersprechen.

In diesem Kapitel betrachten wir das Kernzylinderproblem als ein lineares rotationssymmetrisches Biegeproblem einer dicken isotropen Kreisplatte. Wir sprechen von Kreisplatten, wenn die Zylinderhöhe kleiner als der Zylinderdurchmesser ist, so dass der Mantel des Zylinders gegenüber den Zylinderdeckflächen als schmal bezeichnet werden kann. Die lineare Theorie der dicken Platte unterscheidet sich von der vollständigen linearen 3D-Theorie dadurch, dass die gesuchten Lösungen am schmalen Plattenrand die Randbedingungen nur statisch äquivalent erfüllen müssen. Diese Vorgehensweise ist bereits aus der 2D-Theorie dünner Platten bekannt und wird auch in der 2D-Theorie moderat dicker Platten angewandt.

Einige spezielle Randwertprobleme können mit der Theorie der dicken Platte auch exakt gelöst werden. Im hier vorliegenden Fall wird das Problem in verschiedene Teilprobleme zerlegt, die exakt lösbar sind. In ihrer Superposition erfüllen die Teillösungen die Randbedingungen des ursprünglichen Problems auf den breiten Plattenrändern exakt und auf den schmalen nur statisch äquivalent.

Die Lösung des Problems der dicken Platte erfolgt mit Hilfe von Verschiebungsansätzen, die aus harmonischen Funktionen bestehen. Diese Ansätze wurden von *Papkowitsch* 1932 [88] und *Neuber* 1934 [79] voneinander unabhängig gefundenen. Da diese Ansätze unabhängig von den konkreten Randbedingungen sehr allgemein formuliert werden, ist es mit ihrer Hilfe möglich, zahlreiche 3D-Randwertaufgaben analytisch zu lösen. Diverse Beispiele hierfür lassen sich z.B. in *Neuber* [80], *Lurje* [72] oder *Vocke* [109] finden. Die Theorie dicker Platten verwendet nur ein Teil dieser Ansätze, indem der andere Teil der Ansätze Null gesetzt wird. Das Fehlen dieser Ansätze führt auf etwas weniger komplexe Rechnungen, um den bereits erwähnten Preis, beliebige Randbedingungen auf dem schmalen Plattenrand nur statisch äquivalent erfüllen zu können.

Wir leiten im nächsten Abschnitt die Verschiebungsansätze von *Papkowitsch* und *Neuber* in *Kartesi*'schen Koordinaten her und übertragen sie im übernächsten Abschnitt auf den rotationssymmetrischen Fall in Zylinderkoordinaten, um einen Teil der so gefundenen Ansätze zur Lösung des Problems für dicke Platten zu benutzen. In der Darstellung folgen wir hierbei den Büchern von *Neuber* [80], *Lurje* [72], *Vocke* [109] und *Nádai* [77].

Danach stellen wir einige wichtige Klassen harmonischer Lösungen vor, mit denen sich die oben genannten Teilaufgaben exakt lösen lassen. Schließlich geben wir den vollständigen Lösungsweg an, wie aus den mittels FEM errechneten Schnittgrößen das Kernzylinderproblem als 3D-Problem einer dicken Platte gelöst werden kann. Mit dieser Lösung können dann die gesuchten maximalen Zugspannungen angegeben werden.

Um den Umfang dieser Arbeit nicht noch weiter zu erhöhen, verzichten wir auf die zahlenmäßige Auswertung der Schnittgrößen des Kernzylinders für die aus der FE-Rechnung am Ende des Kapitels 7 berechneten Daten. Stattdessen nehmen wir eine Parameterstudie für das Problem einer am Außenrand R_A frei drehbar gestützten isotropen Kreisplatte vor. Wir halten die Druckkraft f konstant und nehmen eine kreisförmige Kontaktfläche an, in derem Inneren eine konstante Druckspannung p vorliegt. Der veränderliche Parameter ist der Lastradius R_C, für den sich dann bei kleinen Werten hohe Druckspannungen p und bei größeren Werten kleinere Druckspannungen p ergeben. Für $h \ll 2R_C \leq 2R_A$ erhalten wir auf diese Weise ein Problem, für das die Bedingungen $|\sigma_{33}| \ll |\sigma_{3\alpha}| \ll \|\sigma_{\alpha\beta}\|$ bis auf den Stützrand erfüllt sind, so dass die Resultate der 3D-Theorie praktisch nicht von den Resultaten einer 2D-Theorie für dünne Platten unterscheidbar sind. Wir betrachten hier jedoch die Situation $R_C \ll R_A$ und $h \ll 2R_A$, wobei wir für die Lastradien R_C diejenigen Kontaktradien verwenden, die sich für den Lastbereich des Biegetests nach der *Hertz*'schen Theorie gemäß Kapitel 6 ergeben. Außerdem betrachten wir das Problem für die im Abschnitt 3.4 angegebenen Zahlenwerte der Dickenverhältnisse beider Wafer.

Da das Kernzylinderproblem bei kleinen Lastradien und unveränderlicher Plattengeometrie auch bei so kleinen Werten von f auftritt, die nur kleine Durchbiegungen w zur Folge haben, können wir die Wirkung von lokal begrenzen Lasten auch wie folgt studieren. Wir begrenzen f so, dass nur kleine Durchbiegungen resultieren und berechnen die gesamte Platte, und nicht nur den Kernzylinder, nach der linearen *Kirchhoff*-Theorie und nach der linearen 3D–Theorie für dicke Platten. Die Verwendung der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie hat den Vorteil, dass wir für das oben beschriebene Randwertproblem jeweils analytische Lösungen vergleichen können.

Als wichtigstes Resultat ergibt sich, dass die Beträge der Radialspannungen mit der 2D–Theorie für $r = 0$ bei $X_3 = h/2$ zu hoch und bei $X_3 = -h/2$ zu niedrig berechnet werden. Für den Wafer mit 150 mm Durchmesser erhalten wir für Lastradien, die aus einer Kugelpressung mit der Druckkraft von $f = 450$ bis 500 N resultieren, um 4% zu hohe Radialspannungen. Für Lastradien, die aus einer Druckkraft von 50 N resultieren, liegen die Abweichungen bei 20%. Für $R_C \to 0$ ergibt sich nach der 3D–Theorie bei $r = 0$ und $X_3 = h/2$ im Gegensatz zur 2D–Theorie ein endlicher Grenzwert, der praktisch immer dann verwendet werden kann, wenn $2R_C \ll h$ gilt. Eine umfangreiche Literaturliste zu dieser Problematik wird in dem Buch von *Łukasiewicz* [71] angegeben.

8.2 Der 3D-Verschiebungsansatz nach *Papkowitsch-Neuber*

8.2.1 Formulierung in kartesischen Koordinaten

Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen sind die Grundgleichungen der linearisierten isotropen Elastizitätstheorie. Dies sind die linearisierte quasistatische Impulsbilanz (A.37), das *Hooke*'sche Gesetz (A.35) und die Definition der linearen Verzerrung (A.34) als symmetrischer Anteil des Verschiebungsgradienten. Wir lassen in diesem Kapitel den Linearisierungsindex L weg. Trotzdem sei noch einmal bemerkt, dass wir diese Gleichungen gewonnen haben, indem wir das ursprünglich nichtlineare Problem um die Bezugsplatzierung linearisiert haben. Deshalb ist $\boldsymbol{\sigma}$ hier als linearisierte 2. *Piola-Kirchhoff*-Spannung aufzufassen.

Als isotrope elastische Konstanten verwenden wir den Schubmodul μ und die Querkontraktionszahl ν. In diesen Größen hat (A.35) die Darstellung

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\,\nu}\; e\, \delta_{ij} \right) \quad \text{mit} \quad e := \varepsilon_{kk}. \tag{8.1}$$

Setzen wir diese Gleichung in die linearisierte Impulsbilanz (A.37) ein, erhalten wir die drei alternativen Darstellungen

$$2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial X_i} \right) = 0, \tag{8.2}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial X_i} \right) = 0 \quad \text{und} \tag{8.3}$$

$$\left((\alpha-1)\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial X_k \partial X_k}+\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}\right)u_i = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha := 2(1-\nu). \tag{8.4}$$

Die Divergenz von (8.3) führt für $\nu \neq 1$ und $\nu \neq 0,5$ sowie $\mu \neq 0$ auf

$$\frac{\partial^2 e}{\partial X_i \partial X_i} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta e = 0, \tag{8.5}$$

wobei Δ der *Laplace*-Operator ist.

Funktionen $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\Delta g = 0$ gilt, werden harmonische Funktionen genannt.

Für die Verschiebungen wählen wir nun den allgemeinen Ansatz

$$2\ \mu\ u_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_i} + 2\ \alpha\ \Phi_i \quad \text{mit} \tag{8.6}$$

$$\Delta \Phi_i = 0. \tag{8.7}$$

Die Funktion Ψ muss so gewählt werden, dass die Bedingungen (8.3) bzw. (8.4) identisch erfüllt werden. Die harmonischen Funktionen Φ_i sind zunächst beliebig. Ihre konkrete Gestalt wird später durch jeweiligen Randbedingungen festgelegt.

Zur Bestimmung von Ψ gehen wir wie folgt vor. Wir bilden vom Ansatz (8.6) die Divergenz und anschließend den Gradienten. Damit erhalten wir

$$2\mu\frac{\partial e}{\partial X_i} = \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial X_i} + 2\alpha\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial X_i \partial X_j}. \tag{8.8}$$

Setzen wir (8.8) und (8.6) in (8.3) ein, ergibt sich

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial X_j} - \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial X_j} + \frac{\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial X_i \partial X_j}\right) = 0,$$

was nach Multiplikation mit $1-2\nu$ auf die Form

$$\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(2\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_i} - \Delta \Psi\right) = 0 \tag{8.9}$$

gebracht werden kann. Dies sind drei Gleichungen, die Ψ mit den drei harmonischen Funktionen Φ_i verknüpfen. Für bekannte Funktionen Φ_i bildet (8.9) ein inhomogenes Differentialgleichungssystem mit der Funktion Ψ als Unbekannte. Jede spezielle Lösung der Gleichung

$$\Delta \Psi = 2\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_i} + \kappa \quad \text{mit} \quad \kappa = \mathit{konstant}$$

erfüllt das System (8.9) und damit auch (8.3) oder (8.4). Um zu dem Verschiebungsansatz von *Papkowitsch* und *Neuber* zu gelangen, setzen wir $\kappa = 0$ und suchen spezielle Lösungen Ψ_{sp} von

$$\Delta\Psi = 2\frac{\partial\Phi_i}{\partial X_i}. \tag{8.10}$$

Diese können wir mit dem speziellen Ansatz

$$\Psi_{sp}(X_1, X_2, X_3) = g_i(X_1, X_2, X_3)\ \Phi_i(X_1, X_2, X_3) \tag{8.11}$$

finden. Dazu nehmen wir zunächst nur an, dass die drei Funktionen $g_i(X_1, X_2, X_3)$ hinreichend oft differenzierbar sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_{sp} = \Delta g_i\Phi_i + 2\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\frac{\partial\Phi_i}{\partial X_j} + g_i\Delta\Phi_i \\ = \Delta g_i\Phi_i + \frac{2}{3}\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\frac{\partial\Phi_j}{\partial X_j} + 2\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial g_k}{\partial X_k}\delta_{ij}\right).\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich dieser Gleichung mit der rechten Seite von (8.10) liefert die drei Gleichungen

$$\Delta g_i = 0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial X_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial g_k}{\partial X_k}\delta_{ij} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{2}{3}\frac{\partial g_k}{\partial X_k} = 2.$$

Setzen wir die letzte dieser drei Gleichungen in die mittlere ein, erhalten wir $\frac{\partial g_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}$, woraus sofort $g_i(X_1, X_2, X_3) = X_i$ folgt. Damit lautet (8.11)

$$\Psi_{sp}(X_1, X_2, X_3) = X_i\ \Phi_i(X_1, X_2, X_3). \tag{8.12}$$

Nach dem Einsetzen von (8.12) in den Verschiebungsansatz (8.6) sehen wir, dass die drei unbekannten Verschiebungen jetzt durch die drei harmonischen Funktionen Φ_i ausgedrückt werden. *Neuber* bezeichnet in [79] und [80] den Ansatz deshalb auch als Dreifunktionenansatz. Zur endgültigen Form des Verschiebungsansatzes von *Papkowitsch* und *Neuber* gelangen wir, wenn wir zur speziellen Lösung von (8.10) die homogene Lösung $\Psi_{hom} := \Phi_0$ addieren:

$$\begin{aligned}\Psi(X_1, X_2, X_3) := \Phi_0(X_1, X_2, X_3) + X_i\ \Phi_i(X_1, X_2, X_3) \\ \text{mit} \quad \Delta\Phi_0 = \Delta\Phi_i = 0,\end{aligned} \tag{8.13}$$

so dass wir schließlich

$$2\ \mu\ u_i = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial X_i} - \frac{\partial(\Phi_j X_j)}{\partial X_i} + 4(1 - v)\Phi_i \tag{8.14}$$

erhalten.

8.2.2 Übergang zum rotationssymmetrischen Fall in Zylinderkoordinaten, dicke Kreiszylinderplatten und -stäbe

Zur Lösung des rotationssymmetrischen Kreiszylinderproblems gehen wir auf Zylinderkoordinaten über. Wir definieren r und φ gemäß (B.14). Außerdem definieren wir

$$z := X_3. \tag{8.15}$$

Die Zylinderkoordinaten r, φ und z sind demnach hier Koordinaten der Bezugsplatzierung. Die Verschiebungen sind wie folgt verknüpft:

$$\begin{array}{rcl} u_r &=& u_1\cos(\varphi)+u_2\sin(\varphi), \\ u_\varphi &=& u_2\cos(\varphi)-u_1\sin(\varphi) \\ w &=& u_3. \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rcl} u_1 &=& u_r\cos(\varphi)-u_\varphi\sin(\varphi), \\ u_2 &=& u_\varphi\cos(\varphi)+u_r\sin(\varphi), \\ && \end{array} \tag{8.16}$$

In gleicher Weise transformieren wir jetzt die Funktionen Φ_i:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_r &=& \Phi_1\cos(\varphi)+\Phi_2\sin(\varphi), \\ \Phi_\varphi &=& \Phi_2\cos(\varphi)-\Phi_1\sin(\varphi) \\ \Phi_z &=& \Phi_3. \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rcl} \Phi_1 &=& \Phi_r\cos(\varphi)-\Phi_\varphi\sin(\varphi), \\ \Phi_2 &=& \Phi_\varphi\cos(\varphi)+\Phi_r\sin(\varphi), \\ && \end{array} \tag{8.17}$$

Im Gegensatz zu Φ_z sind jetzt Φ_φ und Φ_r keine harmonischen Funktionen mehr.

Mit diesen Größen können wir nun die Darstellung der Verzerrungen, der Spannungen, des *Hooke*'schen Gesetzes und der Verschiebungsansätze in Zylinderkoordinaten berechnen. Darauf wollen wir hier verzichten und gleich zum rotationssymmetrischen Fall übergehen. In diesem Fall sind alle Größen von φ unabhängig. Da wir uns hier nicht für rotationssymmetrische Schubtorsion interessieren, betrachten wir hier nur solche Fälle, für die außerdem

$$u_\varphi(r,z)=0 \tag{8.18}$$

gilt. Damit können wir jetzt den Index an der Verschiebung u_r weglassen und wir definieren

$$u(r,z) := u_r(r,z). \tag{8.19}$$

Die linearen rotationssymmetrischen Verzerrungen lauten jetzt in Zylinderkoordinaten

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r}, \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{u}{r}, \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \varepsilon_{r\varphi}=\varepsilon_{z\varphi}=0 \tag{8.20}$$

$$\text{und} \quad e=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{zz}, \tag{8.21}$$

das *Hooke*'sche Gesetz lautet

$$\sigma_{rr} = 2\,\mu\left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right),\ \sigma_{\varphi\varphi} = 2\,\mu\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right),$$
$$\sigma_{zz} = 2\mu\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right),\ \sigma_{rz} = 2\,\mu\,\varepsilon_{rz} \quad \text{und} \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = 0. \tag{8.22}$$

Als Impulsbilanz verbleiben die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \tag{8.23}$$

Desweiteren erhalten wir statt (8.13)

$$\Psi(r,z) = \Phi_0(r,z) + \Phi_r(r,z)r + \Phi_z(r,z)z \tag{8.24}$$

sowie statt (8.14) die Verschiebungsansätze

$$2\,\mu\,u(r,z) \;=\; -\frac{\partial\,\Phi_0(r,z)}{\partial r} - \frac{\partial\left(r\Phi_r(r,z) + z\Phi_z(r,z)\right)}{\partial r} + 2\,\alpha\,\Phi_r(r,z)$$
$$\text{und} \tag{8.25}$$
$$2\,\mu\,w(r,z) \;=\; -\frac{\partial\,\Phi_0(r,z)}{\partial z} - \frac{\partial\left(r\Phi_r(r,z) + z\Phi_z(r,z)\right)}{\partial z} + 2\,\alpha\,\Phi_z(r,z). \tag{8.26}$$

Insbesondere gilt jetzt

$$\Delta\Phi_r = \Phi_r/r^2, \tag{8.27}$$

wobei der *Laplace*-Operator nun die Darstellung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8.28}$$

hat.

Es gibt unendlich viele harmonische Funktionen und auch unendlich viele Funktionen, die der Gleichung (8.27) genügen. Die Aufgabe bei einem konkreten Randwertproblem besteht nun darin, diejenigen Linearkombinationen dieser Lösungen zu finden, für die Φ_0, Φ_r und Φ_z die gegebenen Randbedingungen erfüllen. Wir werden deshalb im nächsten Abschnitt zwei wichtige Klassen von Lösungen der *Laplace*-Gleichung vorstellen, die wir zur Lösung unseres Plattenproblem benötigen.

Die Beschaffung von geeigneten Funktionen Φ_0, Φ_r und Φ_z ist im Allgemeinen sehr aufwändig. Detaillierte Lösungswege hierzu können z.B. bei *Lurje* studiert werden. Zu weiteren Vereinfachungen können wir gelangen, wenn wir den speziellen Geometrieverhältnissen der betrachteten Kreiszylinder Rechnung tragen. Gilt nämlich $\frac{h}{2R_A} \gtrapprox 5$, liegt ein so genannter dicker Kreiszylinderstab vor, gilt hingegen $\frac{h}{2R_A} \lessapprox \frac{1}{5}$, liegt eine so genannte dicke Kreisplatte vor. Wobei der Wert 5 eher den Charakter eines technischen Orientierungswertes hat, der zur Abgrenzung von dünnen oder moderat dicken Platten dienen soll. Wir haben dünne Platte bisher nur durch $\frac{h}{2R_A} \ll 1$ charakterisiert und für diesen Fall empfohlen, eine schubstarre 2D-Plattentheorie zu verwenden. Für moderat dicke Platten wird meist eine schubweiche 2D-Plattentheorie verwendet.

Die Theorie dicker Platten vereinfacht das ursprüngliche 3D-Problem insoweit, dass die Lösungsansätze die Randbedingungen auf der Mantelfläche nicht mehr exakt erfüllen müssen, sondern nur noch statisch äquivalent. Dieses Vorgehen kann wie die Randbedingungen bei den 2D-Plattentheorien mit dem Prinzip von *Saint-Venant* begründet werden. Bei der Theorie für dicke Kreiszylinderstäbe brauchen hingegen die Randbedingungen auf den Zylinderdeckflächen nur statisch äquivalent erfüllt werden.

Der Geometrie des Kernzylinders entsprechend, wollen wir das hier betrachtete Biegeproblem als Problem einer dicken Platte betrachten. Die Vereinfachung besteht nun darin, dass in (8.24) bis (8.26)

$$\Phi_r = 0 \tag{8.29}$$

gesetzt wird, so dass

$$\Psi(r,z) = \Phi_0(r,z) + z\ \Phi_z(r,z), \tag{8.30}$$

$$\begin{aligned}
2\ \mu\ u(r,z) &= -\frac{\partial\ \Phi_0(r,z)}{\partial r} - z\frac{\partial \Phi_z}{\partial r} \quad \text{und} && (8.31)\\
2\ \mu\ w(r,z) &= -\frac{\partial\ \Phi_0(r,z)}{\partial z} - \frac{\partial\left(z\Phi_z(r,z)\right)}{\partial z} + 2\ \alpha\ \Phi_z(r,z) \\
&= -\frac{\partial \Phi_0(r,z)}{\partial z} - z\frac{\partial \Phi_z(r,z)}{\partial z} + (3-4v)\Phi_z(r,z) && (8.32)
\end{aligned}$$

verbleibt. Der gesamte Ansatz besteht jetzt nur noch aus harmonischen Funktionen. Wir erhalten weiter

$$2\mu\ e(r,z) = 2(1-2\nu)\frac{\partial \Phi_z(r,z)}{\partial z} \tag{8.33}$$

sowie

$$\sigma_{rr}(r,z) = -\frac{\partial^2 \Phi_0(r,z)}{\partial r^2} - z\frac{\partial^2 \Phi_z(r,z)}{\partial r^2} + 2\nu\frac{\partial \Phi_z(r,z)}{\partial z} \tag{8.34}$$

$$\sigma_{zz}(r,z) = -\frac{\partial^2 \Phi_0(r,z)}{\partial z^2} - z\frac{\partial^2 \Phi_z(r,z)}{\partial z^2} + 2(1-\nu)\frac{\partial \Phi_z(r,z)}{\partial z} \tag{8.35}$$

und

$$\sigma_{rz}(r,z) = -\frac{\partial^2 \Phi_0(r,z)}{\partial r \partial z} - z\frac{\partial^2 \Phi_z(r,z)}{\partial r \partial z} + (1-2\nu)\frac{\partial \Phi_z(r,z)}{\partial r}. \tag{8.36}$$

Wie wir in den nächsten Abschnitten sehen werden, können mit diesem Ansatz die drei folgenden Probleme I, II und III gelöst werden. Die Probleme II und III stellen vollständig formulierte Randwertprobleme dar, die mit dem Ansatz exakt gelöst werden können. Im Problem I wird nur eine Randbedingung auf dem Mantelrand formuliert. Die sich einstellende Radialspannung auf dem Mantelrand kann dann durch Superposition mit den Lösungen II und III statisch äquivalent kompensiert werden. Durch geeignete Linearkombination der Lösungen I bis III ist es dann letztlich möglich, das Randwertproblem des Kernzylinders oder das einer am Rand frei drehbar gestützten Platte in der Weise zu lösen, dass die Randbedingungen auf den Stirnflächen exakt und auf der Mantelfläche statisch äquivalent erfüllt werden:

Problem I: ***Inhomogene Biegung bei Verhinderung der Vertikalverschiebung der Mantelfläche***

$$w^{(\mathrm{I})}(R_B, z) = 0, \tag{8.37}$$

$$\sigma_{rz}^{(\mathrm{I})}(r, \pm\frac{h}{2}) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(\mathrm{I})}(r, \frac{h}{2}) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(\mathrm{I})}(r, -\frac{h}{2}) = -p(r). \tag{8.38}$$

Problem II: ***Homogener radialer Zug***

$$\sigma_{rz}^{(\mathrm{II})}(R_B, z) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(\mathrm{II})}(R_B, z) = \sigma_0^{(\mathrm{II})} h \quad \text{mit} \quad \sigma_0^{(\mathrm{II})} = konstant, \tag{8.39}$$

$$\sigma_{rz}^{(\mathrm{II})}(r, \pm\frac{h}{2}) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(\mathrm{II})}(r, \pm\frac{h}{2}) = 0. \tag{8.40}$$

Problem III: ***Homogene radiale Biegung***

$$\sigma_{rz}^{(\mathrm{III})}(R_B, z) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(\mathrm{III})}(R_B, z) = \sigma_1^{(\mathrm{III})} \frac{2z}{h} \quad \text{mit} \quad \sigma_1^{(\mathrm{III})} = konstant, \tag{8.41}$$

$$\sigma_{rz}^{(\mathrm{III})}(r, \pm\frac{h}{2}) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(\mathrm{III})}(r, \pm\frac{h}{2}) = 0. \tag{8.42}$$

Da in vertikaler Richtung für die Probleme II und III nur Spannungsrandbedingungen gegeben sind, muss in einem Punkt noch ein Verschiebungswert als Starrkörperfessel vorgegeben werden, um die vertikale Lage der Platte im Raum festzulegen. Wir fordern für beide Probleme zusätzlich, dass die Durchbiegung w auf dem Mantel im Mittel Null ist:

$$\int_{-h/2}^{h/2} w^{(II)}(R_B, z)\mathrm{d}z = \int_{-h/2}^{h/2} w^{(III)}(R_B, z)\mathrm{d}z = 0. \tag{8.43}$$

8.3 Zwei wichtige Klassen rotationssymmetrischer Lösungen der *Laplace*-Gleichung in Zylinderkoordinaten

Da die Funktionen Φ_0 und Φ_z der *Laplace*-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ in Zylinderkoordinaten im rotationssymmetrischen Fall genügen, lassen sich die Ansätze für Φ_0 und Φ_z aus Linearkombinationen der verschiedenen Lösungen der *Laplace*-Gleichung konstruieren. Wir untersuchen hier die Klasse der Polynomlösungen und die Klasse der Lösungen, die sich durch einen Separationsansatz konstruieren lassen, da wir mit ihrer Hilfe die Lösungen der Probleme I bis III finden wollen.

8.3.1 Polynomlösungen

Die Gleichung $\Delta\Phi_{(n)} = 0$ ist erfüllt, wenn gilt

$$\Phi_{(n)} = \varrho^n P_n(\vartheta) \quad \text{mit} \quad \varrho = \sqrt{z^2 + r^2} \quad \text{und} \quad \vartheta = z/\varrho, \tag{8.44}$$

wobei $P_n(\vartheta)$ das *Legendre*'sche Polynom n-ter Ordnung ist. Das *Legendre*'sche Polynom n-ter Ordnung ist definiert durch

$$P_n(\vartheta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\vartheta^n} \left(\vartheta^2 - 1\right)^n . \tag{8.45}$$

Für $n = 0, 1, ..., 4$ erhalten wir

$$\begin{gathered} \Phi_{(0)}(r,z) = 1, \quad \Phi_{(1)}(r,z) = z, \quad \Phi_{(2)}(r,z) = z^2 - x^2/2, \\ \Phi_{(3)}(r,z) = z^3 - 3z\, r^2/2 \quad \text{und} \quad \Phi_{(4)}(r,z) = z^4 - 3z^2 r^2 + 3r^4/8. \end{gathered} \tag{8.46}$$

Mit Hilfe der Polynomlösungen lassen die Probleme II und III vom Ende des Abschnitts 8.2.2 exakt lösen.

Problem II

Harmonische Ansätze:

$$\Phi_0^{(\mathrm{II})}(r,z) = C_{0(2)}^{(\mathrm{II})} \Phi_{(2)}(r,z) = C_{0(2)}^{(\mathrm{II})} (z^2 - r^2/2) \quad \text{und} \tag{8.47}$$

$$\Phi_z(r,z) = C_{z(0)}^{(\mathrm{II})} \Phi_{(0)}(r,z) + C_{z(1)}^{(\mathrm{II})} \Phi_{(1)}(r,z) = C_{z(0)}^{(\mathrm{II})} + C_{z(1)}^{(\mathrm{II})} z. \tag{8.48}$$

Auswertung der Randbedingungen:

$$C_{0(2)}^{(\mathrm{II})} = \frac{1-\nu}{1+\nu} \sigma_0^{(\mathrm{II})}, \quad C_{z(0)}^{(\mathrm{II})} = 0 \quad \text{und} \quad C_{z(1)}^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{1+\nu} \sigma_0^{(\mathrm{II})}. \tag{8.49}$$

Lösung:

$$u^{(\mathrm{II})}(r,z) = \frac{1-\nu}{1+\nu}\,\frac{\sigma_0^{(\mathrm{II})}}{2\;\mu}\;r \quad \text{und} \quad w^{(II)}(r,z) = -\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\sigma_0^{(\mathrm{II})}}{\mu}z \tag{8.50}$$

Spannungen:

$$\sigma_{rz}^{(\mathrm{II})}(r,z) = \sigma_{zz}^{(\mathrm{II})}(r,z) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{rr}^{(\mathrm{II})}(r,z) = \sigma_{\varphi\varphi}^{(\mathrm{II})}(r,z) = \sigma_0^{(\mathrm{II})}. \tag{8.51}$$

Problem III

Harmonische Ansätze:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(\mathrm{III})}(r,z) &= C_{0(1)}^{(\mathrm{III})}\Phi_{(1)}(r,z) + C_{0(3)}^{(\mathrm{III})}\Phi_{(3)}(r,z) \\ &= C_{0(1)}^{(\mathrm{III})}z + C_{0(3)}^{(\mathrm{III})}(z^2 - 3r^2/2)z \quad \text{und} \end{aligned} \tag{8.52}$$

$$\Phi_z^{(\mathrm{III})}(r,z) = C_{z(2)}^{(\mathrm{III})}\Phi_{(2)}(r,z) = C_{z(2)}^{(\mathrm{III})}(z^2 - r^2/2). \tag{8.53}$$

Auswertung der Randbedingungen:

$$\begin{aligned} C_{0(1)}^{(\mathrm{III})} = -\frac{\nu h^2 + 2(1-\nu)R_B^2}{2h(1+\nu)}\,\sigma_1^{(\mathrm{III})}, \quad C_{0(3)}^{(\mathrm{III})} &= \frac{3}{h}\frac{1-2\nu}{1+\nu}\sigma_1^{(\mathrm{III})} \\ \text{und} \quad C_{z(1)}^{(\mathrm{III})} &= \frac{1}{1+\nu}\frac{\sigma_1^{(\mathrm{III})}}{h}. \end{aligned} \tag{8.54}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} u^{(\mathrm{III})}(r,z) &= \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\sigma_1^{(\mathrm{III})}}{\mu}\frac{z}{h}r \quad \text{und} \\ w^{(III)}(r,z) &= \frac{\sigma_1^{(III)}}{12\mu(1+\nu)}\Big(6(1-\nu)(R_B^2 - r^2) + \nu(h^2 - 12z^2)\Big). \end{aligned} \tag{8.55}$$

Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^{(III)}(r,z) &= \sigma_{zz}^{(III)}(r,z) = 0 \\ \text{und} \qquad \sigma_{rr}^{(III)}(r,z) &= \sigma_{\varphi\varphi}^{(III)}(r,z) = \sigma_1^{(\mathrm{III})}\frac{2z}{h}. \end{aligned} \tag{8.56}$$

8.3.2 Lösung durch Separationsansätze

Mit dem Ansatz $\Phi(r,z) = R(r)Z(z)$ erhalten wir aus der *Laplace*-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ unter Verwendung des Δ-Operators gemäß (8.28)

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}R + \frac{Z}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + Z\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist separabel:

$$\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{1}{rR}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} = \widetilde{\lambda}^2. \tag{8.57}$$

Speziell für $\widetilde{\lambda} = 0$ erhalten wir $Z(z) = A + Bz$ und $R(r) = C + D\ \ln(r/R_B)$. Da wir hier nur Vollkreiszylinder betrachten, muss $D = 0$ gelten. Die verbleibende Lösung $\Phi(r,z) = A_0 + B_0 z$ ist bereits in (8.46) enthalten.

Für $\widetilde{\lambda} \neq 0$ erhalten wir $Z(z) = A\ \cosh(\widetilde{\lambda} z) + B\ \sinh(\widetilde{\lambda} z)$ und $R(r) = C\ \mathrm{J}_0(\widetilde{\lambda} z) + D\ \mathrm{Y}_0(\widetilde{\lambda} z)$. Wobei J_0 die *Bessel*funktion erster Art 0-ter Ordnung und Y_0 die *Bessel*funktion zweiter Art 0-ter Ordnung ist. Y wird auch *Weber*funktion oder *Neumann*funktion genannt. Wegen des Vollkreiszylinders muss wieder $D = 0$ gelten. Die verbleibende Lösung lautet mit $\widetilde{\lambda} = 2\lambda/h$

$$\Phi(r,z) = \big(A\cosh(2z\lambda/h) + B\sinh(2z\lambda/h)\big)\,\mathrm{J}_0(2r\lambda/h). \tag{8.58}$$

Mit diesen harmonischen Funktionen kann das Problem I exakt gelöst werden. Zu den Rechenregeln mit *Bessel*funktionen verweisen wir auf die ausführlichen Darstellungen im Lehrbuch von *Sieber* und *Sebastian* [101] bzw. auf die im Anhang C.2 angegebenen Formeln.

Problem I

Harmonische Ansätze:

$$\begin{aligned}
\Phi_0^{(\mathrm{I})}(r,z) &= \left(\tilde{A}_0\cosh\left(\frac{2\lambda z}{h}\right) + \tilde{B}_0\sinh(\left(\frac{2\lambda z}{h}\right)\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{2\lambda r}{h}\right) \\
&= \left(A_0\cosh\left(\frac{2\lambda z}{h}\right) + B_0\sinh(\left(\frac{2\lambda z}{h}\right)\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{2\lambda r}{h}\right)\frac{h}{2} \\
&\text{und} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (8.59) \\
\Phi_z^{(\mathrm{I})}(r,z) &= \left(A_z\cosh\left(\frac{2\lambda z}{h}\right) + B_z\sinh(\left(\frac{2\lambda z}{h}\right)\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{2\lambda r}{h}\right).
\end{aligned}$$

Darstellung der Durchbiegung in Ansatzfunktionen gemäß (8.32):

$$\begin{aligned}
2\mu\ w^{(I)}(r,z) = -\lambda&\left(A_0\sinh(\lambda\frac{2z}{h}) + B_0\cosh(\lambda\frac{2z}{h})\right)\mathrm{J}_0(\lambda\frac{2r}{h}) \\
-\lambda\frac{2z}{h}&\left(A_z\sinh(\lambda\frac{2z}{h}) + B_z\cosh(\lambda\frac{2z}{h})\right)\mathrm{J}_0(\lambda\frac{2r}{h}) \\
+(3-4\nu)&\left(A_z\cosh(\lambda\frac{2z}{h}) + B_z\sinh(\lambda\frac{2z}{h})\right)\mathrm{J}_0(\lambda\frac{2r}{h}).
\end{aligned} \tag{8.60}$$

Auswertung der Verschiebungsrandbedingung (8.37) *auf dem Mantel*:

$$\begin{aligned}0 = -\lambda &\left(A_0 \sinh(\lambda\frac{2z}{h}) + B_0 \cosh(\lambda\frac{2z}{h})\right) \mathrm{J}_0(\lambda\frac{2R_B}{h}) \\ &- \lambda\frac{2z}{h}\left(A_z \sinh(\lambda\frac{2z}{h}) + B_z \cosh(\lambda\frac{2z}{h})\right) \mathrm{J}_0(\lambda\frac{2R_B}{h}) \\ &+ (3-4\nu)\left(A_z \cosh(\lambda\frac{2z}{h}) + B_z \sinh(\lambda\frac{2z}{h})\right) \mathrm{J}_0(\lambda\frac{2R_B}{h}) \qquad (8.61)\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat für $\lambda \neq 0$ nichttriviale Lösungen, falls

$$2\lambda R_B/h = k_{0i} \quad \text{mit} \quad \mathrm{J}_0(k_{0i}) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1,2,3,4,\ldots \qquad (8.62)$$

gilt. Damit geht (8.59) in die folgende Reihendarstellung über:

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(\mathrm{I})}(r,z) &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(A_{0i}\cosh(k_{0i}\frac{z}{R_B}) + B_{0i}\sinh(k_{0i}\frac{z}{R_B})\right)\mathrm{J}_0(k_{0i}\frac{r}{R_B})\frac{h}{2} \\ &\text{und} \qquad (8.63) \\ \Phi_z^{(\mathrm{I})}(r,z) &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(A_{zi}\cosh(k_{0i}\frac{z}{R_B}) + B_{zi}\sinh(k_{0i}\frac{z}{R_B})\right)\mathrm{J}_0(k_{0i}\frac{r}{R_B}).\end{aligned}$$

Die Schubspannung $\sigma_{rz}^{(I)}$ hat jetzt die Gestalt

$$\begin{aligned}&\sigma_{rz}^{(\mathrm{I})}(r,z) = \\ &\frac{1}{R_B}\sum_{i=1}^{\infty}\left(k_{0i}^2\left(A_{0i}\sinh(k_{0i}\frac{z}{R_B}) + B_{0i}\cosh(k_{0i}\frac{z}{R_B})\right)\mathrm{J}_1(k_{0i}\frac{r}{R_B})\frac{h}{2R_B}\right. \\ &\qquad + k_{0i}^2\left(A_{zi}\sinh(k_{0i}\frac{z}{R_B}) + B_{zi}\cosh(k_{0i}\frac{z}{R_B})\right)\mathrm{J}_1(k_{0i}\frac{r}{R_B})\frac{z}{R_B} \\ &\left.-(1-2\nu)k_{0i}\left(A_{zi}\cosh(k_{0i}\frac{z}{R_B}) + B_{zi}\sinh(k_{0i}\frac{z}{R_B})\right)\mathrm{J}_1(k_{0i}\frac{r}{R_B})\right). \qquad (8.64)\end{aligned}$$

Auswertung der Schubspannungsrandbedingungen $(8.38)_1$ *auf den Stirnflächen*:

$$\begin{aligned}B_{0i} &= A_{zi}\left(\frac{2R_B(1-2\nu)}{k_{0i}h} - \tanh(k_{0i}\frac{h}{2R_B})\right) \\ &\text{und} \qquad (8.65) \\ A_{0i} &= B_{zi}\left(\frac{2R_B(1-2\nu)}{k_{0i}h} - \coth(k_{0i}\frac{h}{2R_B})\right).\end{aligned}$$

Die Axialspannung $\sigma_{zz}^{(I)}$ hat jetzt die Gestalt

$$\sigma_{zz}^{(I)}(r,z) = \frac{1}{R_B}\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{J}_0(k_{0i}\frac{r}{R_B})k_{0i}$$
$$\left(\left(\left(1 + k_{0i}\frac{h}{2R_B}\coth(k_{0i}\frac{z}{2R_B})\right) B_{zi} - k_{0i}A_{zi}\right)\cosh(k_{0i}\frac{z}{R_B})\right.$$
$$\left. + \left(\left(1 + k_{0i}\frac{h}{2R_B}\tanh(k_{0i}\frac{z}{2R_B})\right) A_{zi} - k_{0i}B_{zi}\right)\sinh(k_{0i}\frac{z}{R_B})\right). \quad (8.66)$$

Auswertung der Axialspannungsrandbedingung $(8.38)_2$ *auf der unteren Deckfläche*:

$$A_{zi} = \frac{\frac{k_{0i}h}{2R_B} + \frac{1}{2}\sinh\left(\frac{k_{0i}h}{R_B}\right)}{\frac{k_{0i}h}{2R_B} - \frac{1}{2}\sinh\left(\frac{k_{0i}h}{R_B}\right)}\coth\left(\frac{k_{0i}h}{2R_B}\right) B_{zi}. \quad (8.67)$$

Für die Axialspannung $\sigma_{zz}^{(I)}$ auf der oberen Deckfläche erhalten wir nun

$$\sigma_{zz}^{(I)}(r,-\frac{h}{2}) = \frac{1}{R_B}\sum_{i=1}^{\infty} B_{zi}\ \mathrm{J}_0(k_{0i}\frac{r}{R_B})k_{0i}\frac{\frac{h}{R_B}k_{0i} + \sinh(k_{0i}\frac{h}{R_B})}{\sinh(k_{0i}\frac{h}{2R_B})}. \quad (8.68)$$

Auswertung der Axialspannungsrandbedingung $(8.38)_3$ *auf der oberen Deckfläche*:

Die Bestimmungsgleichung zur letzten verbleibenden Unbekannten lautet

$$-p(r) = \frac{1}{R_B}\sum_{i=1}^{\infty} B_{zi}\ \mathrm{J}_0(k_{0i}\frac{r}{R_B})k_{0i}\frac{\frac{h}{R_B}k_{0i} + \sinh(k_{0i}\frac{h}{R_B})}{\sinh(k_{0i}\frac{h}{2R_B})}. \quad (8.69)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten B_{zi} nutzen wir die Orthogonalitätsrelation (C.7) für *Bessel*funktionen aus. Multiplizieren wir (8.69) mit $rJ_0(k_{0j}\frac{r}{R_B})$, substituieren $\frac{r}{R_B}$ durch x und integrieren über x von 0 bis 1, folgt

$$\int_0^1 -R_B p(xR_B)x\mathrm{J}_0(k_{0i}x)\mathrm{d}x = k_{0i}\frac{\frac{h}{R_B}k_{0i} + \sinh(k_{0i}\frac{h}{R_B})}{\sinh(k_{0i}\frac{h}{2R_B})}B_{zi}\int_0^1 x\mathrm{J}_0^2(k_{0i}x)\mathrm{d}x$$
$$= k_{0i}\frac{\frac{h}{R_B}k_{0i} + \sinh(k_{0i}\frac{h}{R_B})}{2\sinh(k_{0i}\frac{h}{2R_B})}\mathrm{J}_1^2(k_{0i})B_{zi}.$$

Wir erhalten

$$B_{zi} = -\frac{\sinh\left(\frac{k_{0i}h}{2R_B}\right)}{\frac{k_{0i}h}{2R_B} + \frac{1}{2}\sinh\left(\frac{k_{0i}h}{R_B}\right)} \frac{R_B \int\limits_0^1 p(xR_B)\ x\ \mathrm{J}_0(k_{0i}x)\ \mathrm{d}x}{\mathrm{J}_1^2(k_{0i})k_{0i}}. \tag{8.70}$$

Existiert das Integral in Formel (8.70), konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von (8.69) für alle $r \in [0, R_B]$ gegen $p(r)$, wenn $p(r)$ stetig ist. Allgemein gilt für stückweise stetige Funktionen $p(r)$ und $\omega > 0$

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_0^1 p(x\ R_B)x\mathrm{J}_0(k_{0i}x)\mathrm{d}x \frac{\mathrm{J}_0(k_{0i}\frac{r}{R_B})}{\mathrm{J}_1^2(k_{0i})} \\ = \lim_{\omega\to 0+} \frac{p\left((r+\omega)R_B\right) + p\left((r-\omega)R_B\right)}{2}. \end{aligned} \tag{8.71}$$

Damit ist das Problem I vollständig gelöst. Auf der Mantelfläche können jetzt $\sigma_{rr}^{(\mathrm{I})}(R_B, z)$ und die resultierenden Schnittgrößen berechnet werden. Die Lösung von Problem I kann durch Lösungen von Problem II und III derart überlagert werden, dass die daraus resultierenden Schnittgrößen vorgeschriebene Werte annehmen. Die Durchbiegung w ist dann dort entsprechend (8.43) nur noch im Mittel Null.

Wir können nun die vollständige Berechnungsvorschrift für die maximale Zugspannung im Kernzylinder bei bekannten Schnittlasten, die z.B. aus einer FE-Rechnung folgen, angeben.

8.4 Vorschlag zur Lösung des isotropen Kernzylinderproblems aus den Schnittlasten einer Finite-Element-Plattenlösung

Im folgenden geben wir zusammenfassend noch einmal die Reihenfolge der einzelnen Teilschritte an, wie wir von der FE-Plattenlösung zur maximalen Zugspannung gelangen.

1. Berechne das anisotrope nichtlineare Biegeproblem für lokale begrenzte Lasten mit der Finite-Element-Methode.

2. Finde ein brauchbares isotropes Ersatzmodell, dass auf die gleiche maximale Durchbiegung wie das anisotrope Modell führt.

3. Berechne die Spannungen G_{rr}^P und G_{rz}^P für $X_3 = -h/4$ aus der FE-Lösung und suche einen kleinsten Kernzylinderradius $r = R_B$, für den $|G_{rz}^P(R_B, -h/4)| \ll |G_{rr}^P(R_B, -h/4)|$ erfüllt ist. Lässt sich ein solcher Radius nicht finden, ist die gesamte Plattenlösung unbrauchbar. In

diesem Falle liegt offenbar keine dünne Platte vor, so dass die gesamte Platte als nichtlineares 3D-Problem behandelt werden muss. Lässt sich ein solcher Radius finden, kann der nächsten Schritt ausgeführt werden.

4. Überprüfe, ob für den gefundenen Wert R_B die Durchbiegungsdifferenz der Bedingung $|w^P(R_B) - w^P(0)| \ll h$ genügt. Falls die Bedingung nicht erfüllt ist, muss das Kernzylinderproblem als nichtlineares 3D-Problem behandelt werden. Ist die Bedingung erfüllt, ist die Verwendung einer linearen Theorie sinnvoll, so dass zum nächsten Schritt übergangen werden kann.

5. Berechne $M_{rr}^P(R_B)$ und $N_{rr}^P(R_B)$ aus der FE-Lösung.

6. Berechne das Problem I für den aus der FE-Rechnung ermittelten Wert R_B und berechne ausreichend viele Koeffizienten B_{zi} mit der Vorschrift (8.70) durch numerische Integration für den Spannungsverlauf von p, der sich aus der isotropen Formel für die *Hertz*'sche Pressung ergibt.

7. Berechne $M_{rr}^{(I)}(R_B)$ und $N_{rr}^{(I)}(R_B)$ aus der Lösung des vorherigen Schrittes.

8. Löse das Problem II für $N_{rr}^{(II)}(R_B) = -N_{rr}^{(I)}(R_B)$ und das Problem III für $M_{rr}^{(III)}(R_B) = -M_{rr}^{(I)}(R_B)$.

9. Addiere die Lösung vom vorherigen Schritt zur bereits gefundenen Lösung vom Problem I.

10. Löse das Problem II für $N_{rr}^{(II)}(R_B) = N_{rr}^P(R_B)$ und das Problem III für $M_{rr}^{(III)}(R_B) = M_{rr}^P(R_B)$.

11. Addiere zur Lösung des Schrittes 9 die Lösung des vorherigen Schrittes.

12. Berechne aus dem vorherigen Schritt $w^{(3D)}(0, h/2)$ und $\sigma_{rr}^{(3D)}(0, h/2)$ und vergleiche die Werte mit $w^P(0) - w^P(R_B)$ und $\sigma_{rr}^P(0, h/2)$.

Um die Funktionsweise der Methode zu demonstrieren, verwenden wir, wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels angekündigt, nicht die FE-Daten aus dem Kapitel 7, sondern vergleichen die Resultate einer *Kirchhoff*-Lösung für eine frei drehbar gestützten Platte unter konstanter, lokal begrenzter Last mit der 3D-Lösung für dicke Platten. Dies entspricht einem Kernzylinder von $R_B = R_A$ in einem Biegetest für den $R_I = R_A$ gilt, d.h bei dem der Stützring ohne Ausdehnung ist.

8.5 Die 3D-Lösung einer frei drehbar gestützten Platte unter konstanter, lokal begrenzter Last nach der Theorie für dicke Platten

8.5.1 Randbedingungen

Die exakt erfüllbaren Randbedingungen auf den Stirnflächen des Zylinders lauten analog zur Situation in Problem I:

$$\sigma_{rz}(r, \pm\frac{h}{2}) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \frac{h}{2}) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, -\frac{h}{2}) = -p(r), \tag{8.72}$$

die jetzt durch

$$p(r) = \begin{cases} p_C > 0 & \text{für} \quad r < R_C \\ 0 & \text{für} \quad r \geqslant R_C \end{cases} \quad \text{mit} \quad p_C = \frac{f}{\pi R_C^2} \tag{8.73}$$

konkretisiert werden.
Die nur statisch äquivalent erfüllbaren Randbedingungen auf der Mantelfläche lauten

$$w(R_A, z) = w_0(z) \quad \text{und} \quad \sigma_{rr}(R_A, z) = \sigma_0(z) \tag{8.74}$$

$$\text{mit} \quad \int\limits_{-h/2}^{h/2} w_0(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_0(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \text{und} \quad \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_0(z)z\mathrm{d}z = 0. \tag{8.75}$$

Die entsprechende Formulierung dieser Randbedingung für die 2D-Plattentheorie lautet

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} w_0(z)\mathrm{d}z = W(R_A)h = 0, \quad \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr}(R_A, z)\mathrm{d}z = N_{rr}(R_A) = 0 \quad \text{und}$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr}(R_A, z)z\mathrm{d}z = M_{rr}(R_A) = 0. \tag{8.76}$$

Wir bezeichnen die Bedingungen (8.75) als die statisch äquivalente Form der strengen Randbedingungen

$$w_0(z) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_0(z) = 0. \tag{8.77}$$

8.5.2 Teillösung aus dem Problem I

Die gesuchte Teillösung erfüllt die strengen Randbedingungen (8.72) und $(8.77)_1$ exakt. Wir erhalten für B_{zi} nach (8.70)

$$B_{zi} = -\frac{2\sinh\left(\frac{k_{0i}h}{2R_A}\right)}{\frac{k_{0i}h}{R_A} + \sinh\left(\frac{k_{0i}h}{R_A}\right)} \frac{\mathrm{J}_1(k_{0i}R_C/R_A)}{\mathrm{J}_1^2(k_{0i})k_{0i}^2} R_C p_C \tag{8.78}$$

und aus (8.68)

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(\mathrm{I})}(r,-h/2) &= -2\frac{R_C}{R_A} p_C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_1(k_{0i}R_C/R_A)}{\mathrm{J}_1^2(k_{0i})k_{0i}} \mathrm{J}_0(k_{0i}r/R_A) \\ &= -\mathrm{H}(\frac{r}{R_A}, \frac{R_C}{R_A})\ p_C \end{aligned} \tag{8.79}$$

mit

$$\mathrm{H}(t,s) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{H}_N(t,s) == \begin{cases} 1, & \text{für} \quad 0 < t < s < 1 \\ 1/2, & \text{für} \quad 0 < t = s < 1 \\ 0, & \text{für} \quad 0 \leqslant s < t \leqslant 1 \end{cases} \tag{8.80}$$

und

$$\mathrm{H}_N(t,s) = 2s \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{J}_1(k_{i0}s)\mathrm{J}_0(k_{i0}t)}{k_{i0}\mathrm{J}_1^2(k_{i0})}. \tag{8.81}$$

Anmerkung

> Bei einer Approximation von $\mathrm{H}(t,s)$ durch $\mathrm{H}_N(t,s)$ tritt für jedes $N < \infty$ das *Gibbs*-Phänomen auf, siehe Abbildung 8.1. Dies ist durch folgenden Eigenschaften charakterisiert: Ist $t_N < s$ die zur Sprungstelle $t_s = s$ am nächsten liegende positive Extremstelle der Abweichung $\mathrm{H}_N(t) - \mathrm{H}(t)$, d.h. es gilt $\mathrm{H}_N(t_N) - \mathrm{H}(t_N) > 0$, $d(\mathrm{H}_N(t) - \mathrm{H}(t))/dt = 0$ für $t = t_N$ und $d^2(\mathrm{H}_N(t) - H(t))/dt^2 < 0$, gibt es eine positive Zahl $0 < \gamma < \infty$, so dass $\lim_{N\to\infty} \big(\mathrm{H}_N(t_N) - \mathrm{H}(t_N)\big) = \gamma > 0$ gilt.

Mit B_{zi} können wir nun auch A_{zi}, B_{0i} und A_{zi} gemäß (8.67) und (8.65) berechnen, so dass wir für die Radialspannung bei $z = h/2$

$$\sigma_{rr}^{(\mathrm{I})}(r,h/2) = -4p_0R_Ch \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_1(k_{0i}R_C/R_A)\sinh^2(k_{0i}h/R_A)}{k_{0i}^2\mathrm{J}_1^2(k_{0i})\left(h^2k_{0i}^2 - R_A^2\sinh^2(k_{0i}h/R_A)\right)} \left(k_{0i}\mathrm{J}_0(k_{0i}r/R_A) - (1-\nu)\frac{R_A}{r}\mathrm{J}_1(k_{0i}r/R_A)\right). \tag{8.82}$$

erhalten.

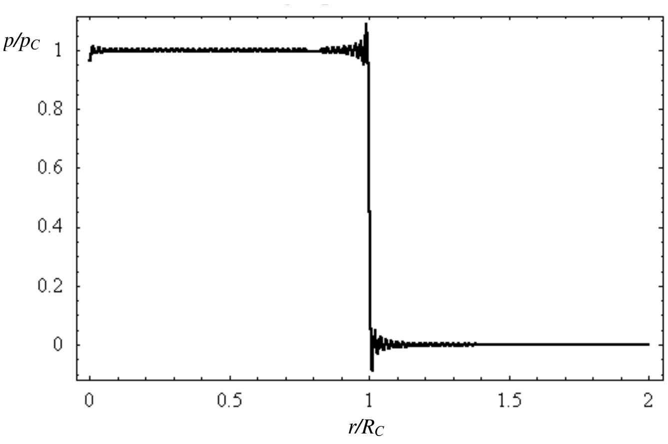

Abbildung 8.1: *Gibbs*-Phänomen bei der Approximation des Sprunges von p bei R_C für einen stückweise konstanten Verlauf von p auf der oberen Deckfläche durch *Bessel*reihen mit 1000 Gliedern.

Für die untere Deckfläche folgt

$$\sigma_{rr}^{(\mathrm{I})}(r,h/2) = -4p_0 R_C h \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_1(k_{0i}R_C/R_A)\sinh^2(k_{0i}h/R_A)}{k_{0i}^2 \mathrm{J}_1^2(k_{0i})\left(h^2k_{0i}^2 - R_A^2\sinh^2(k_{0i}h/R_A)\right)} \left(k_{0i}\mathrm{J}_0(k_{0i}r/R_A) - (1-\nu)\frac{R_A}{r}\mathrm{J}_1(k_{0i}r/R_A)\right). \quad (8.83)$$

Bei der Untersuchung dünner Platten unter lokal begrenzter Last sind zwei Grenzfälle von Bedeutung. Der eine Grenzfall ergibt sich beim Übergang von der Flächenlast zur Punktlast. Ein weiterer Grenzfall ergibt sich beim Übergang auf die unendlich dünne Platte. Für den Übergang zur Punktlast drücken wir p_C über (8.73) durch die Druckkraft f auf einer Kreisfläche mit dem Radius R_C aus und bilden den Limes für $R_C \to 0$. Bei einer Punktlast wächst die Axialspannung σ_{zz} und Radialspannung auf der oberen Deckfläche, d.h. in der Ebene $z = -h/2$, im Nullpunkt $r = 0$ unbeschränkt auf eine unendlich hohe Druckspannung an. Dieses Verhalten zeigt sich auch nach der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie. Unser Interesse gilt jedoch der Radialspannung auf der unteren Deckfläche, d.h. in der Ebene $z = h/2$. Dort gilt überall $\sigma_{zz}(r,h/2) = 0$. Für die Radialspannung auf der unteren Deckfläche ergibt sich aus (8.83)

$$\lim_{R_C\to 0}\sigma_{rr}^{(\mathrm{I})}(r,h/2) = -\frac{2fh}{\pi R_A^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_{0i}\mathrm{J}_0(k_{0i}r/R_A) - (1-\nu)R_A/r\mathrm{J}_1(k_{0i}r/R_A)}{\mathrm{J}_1^2(k_{0i})\left(h^2k_{0i}^2/R_A^2 - (\sinh(k_{0i}h/R_A))^2\right)}\sinh\left(\frac{k_{0i}h}{R_A}\right). \quad (8.84)$$

Die Spannungswerte bleiben auf der gesamten unteren Deckfläche beschränkt. Speziell für $r = 0$ gilt

$$\begin{aligned}&\lim_{R_C \to 0} \sigma_{rr}^{(\mathrm{I})}(0, h/2)\\ &\quad = -\frac{fh(1+\nu)}{\pi R_A^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{0i} \sinh(k_{0i}h/R_A)}{\mathrm{J}_1^2(k_{0i}) \Big((\sinh(k_{0i}h/R_A))^2 - h^2 k_{0i}^2 / R_A^2 \Big)}. \end{aligned} \tag{8.85}$$

Dies stellt einen wesentlichen Unterschied zur *Kirchhoff*'schen Plattentheorie dar, wo wir auf der unteren Stirnseite bei $r = 0$ eine unendlich hohe Zugspannung haben. Daraus ergibt sich, dass wir bei einer Spannungsberechnung mit Hilfe der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie, für lokal begrenzte Lasten mit sehr kleinen Lastradien R_C diesen Grenzwert beliebig überschreiten können. Demnach gibt es einen kleinsten Radius R_{Kmin} mit $R_{Kmin} > R_C$ für den gilt für alle $r \geq R_{Kmin}$ in ausreichender Genauigkeit die Beziehung $\sigma_{rr}^{3D}(r, h/2) \approx \sigma_{rr}^{K}(r, h/2)$ gilt, wobei $\sigma_{rr}^{K}(r)$ die nach der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie berechnete Radialspannung ist. Andererseits gibt es einen größten Lastradius R_{Cmax} mit $R_{Cmax} < h$ für den gilt bei $R_C < R_{Cmax}$ für alle r in ausreichender Genauigkeit die Beziehung $\sigma_{rr}^{3D}(r) \approx \lim\limits_{R_C \to 0} \sigma_{rr}^{3D}(r)$, so dass wir für Radien $r < r_{Kmin}$ die Radialspannungen, statt mit der genauen vom Lastradius abhängigen Formel (8.83) mit der vom Lastradius unabhängigen Grenzwertformel (8.85) berechnen können.

Auf den Nachweis, dass für $h \to 0$ aus den 3D-Lösung tatsächlich die *Kirchhoff*-Lösungen folgen, sei hier verzichtet. Wichtig für die Berechnung dieses Grenzübergangs ist lediglich, dass vor dem Grenzübergang die gleichen Skalierungsvorschriften wie in Abschnitt 5.4.2 vorgenommen werden, was hier auf $f = h^4 f^*$ führt, wobei f^* unabhängig von h angenommen wird. Nach dem Grenzübergang muss dann wieder reskaliert werden.

8.5.3 Teillösungen aus Problem II und III

Zur Kompensation der mittleren Radialspannungen auf der Mantelfläche addieren wir zur Teillösung aus Problem I eine Lösung von Problem II, für die

$$\sigma_{rr}^{(\mathrm{II})}(R_A, z) = -\frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr}^{(\mathrm{I})}(R_A, z) \mathrm{d}z \tag{8.86}$$

gilt. Für die aus der Teillösung von Problem I resultierende Radialspannung folgt

$$\sigma_{rr}^{(\mathrm{II})}(R_A, z) = -4\nu p_C \frac{R_C}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_1(k_{0i} R_A / R_C)}{\mathrm{J}_1(k_{0i}) k_{0i}^3} \frac{1 - \cosh(k_{0i}h/R_A)}{k_{0i}h/R_A + \sinh(k_{0i}h/R_A)}. \tag{8.87}$$

In gleicher Weise bestimmen wir uns die Teillösung von Problem III. Für sie muss gelten

$$\sigma_{rr}^{(\mathrm{III})}(R_A, z) = -12\frac{z}{h^3}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr}^{(\mathrm{I})}(R_A, z) z \mathrm{d}z \tag{8.88}$$

Wir erhalten damit unter Verwendung der Teillösung des Problems I

$$\sigma_{rr}^{(\mathrm{III})}(R_A, z) = 24 p_C \frac{R_C}{h^3} z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_1(k_{0i} R_A / R_C)}{\mathrm{J}_1(k_{0i}) k_{0i}^4} \frac{(1+2\nu) R_A \sinh(k_{0i} h/R_A) - k_{0i} h (1 + \nu(1 + \cosh(k_{0i} h/R_A))}{k_{0i} h/R_A - \sinh(k_{0i} h/R_A)}. \tag{8.89}$$

Die Superposition aller drei Teillösungen erfüllt jetzt alle Randbedingungen im Sinne der Theorie für dicke Platten.

8.5.4 2D-3D-Vergleich unter Verwendung von Material- und Geometriedaten aus dem GaAs-Biegetest

Wir untersuchen das Plattenproblem für die folgenden Daten:

Querkontraktionszahl : $\nu = 0,244$
dimensionslose Dicke : $h^* = h/(2R_A)$
dimensionsloser Lastradius : $\eta = R_C/R_A$

Platte 1: $h_1^* = 0,0045$ kleiner Lastradius : $\eta_K = 0,0004$
Platte 2: $h_1^* = 0,0065$ großer Lastradius : $\eta_G = 0,0027$.

Die Abweichungen in den Durchbiegungen unterscheiden sich nur unwesentlich dadurch, wie groß der Lastradius ist und nach welcher Theorie gerechnet wurde. Deshalb vergleichen wir hier stellvertretend für die übrigen Werte nur die Verschiebungen im Mittelpunkt auf der unteren Deckfläche. Zur besseren Vergleichbarkeit führen wir die dimensionslose Kraft f^s und die lastbezogenen dimensionslosen Durchbiegungen w^L und W^L ein, wobei w^L die Größe aus der 3D-Theorie und W^L die entsprechende Größe aus der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie ist:

$$f^s = \frac{f}{\mu\ R_A^2\ h^{*4}}, \quad w^L = \frac{w}{h f^s}, \quad W^L = \frac{W}{h f^s}. \tag{8.90}$$

Wir erhalten

$$W^L(0) = \frac{3(1-\nu)}{512\pi}\left(-5\eta^2 + 8 + 4\eta^2 \ln(\eta)\ + 2\left(2 - \eta^2\right)\frac{1-\nu}{1+\nu}\right) \tag{8.91}$$

und

$$\lim_{\eta \to 0} W^L(0) = \frac{3}{128\pi}\frac{1-\nu}{1+\nu}(3-\nu). \tag{8.92}$$

Stellen wir die Gesamtlösung jeweils als Summe der drei Teillösungen dar, ergeben sich die Werte in den folgenden Tabellen:

$w^L(0, \frac{h^*}{2})$	h_1^*	h_1^*
η_G	0,014711	0,014711
η_K	0,014711	0,014711
0	0,014711	0,014711

$W^L(0)$	h_1^*	h_1^*
η_G	0,014708	0,014708
η_K	0,014708	0,014708
0	0,014708	0,014708

Tabelle 8.8: Maximale Durchbiegung des Gesamtproblems. Links: 3D-Lösung. Rechts: 2D-Lösung.

$w^{(\mathrm{I})}(0, \frac{h^*}{2})$	h_1^*	h_1^*
η_G	0,011284	0,011284
η_K	0,011284	0,011284
0	0,011284	0,011284

$W^{(\mathrm{I})}(0)$	h_1^*	h_1^*
η_G	0,011280	0,011280
η_K	0,011280	0,011280
0	0,011280	0,011280

Tabelle 8.9: Maximale Durchbiegung von Teilproblem I. Links: 3D-Lösung. Rechts: 2D-Lösung.

$w^{(\mathrm{II})}(0, \frac{h^*}{2})$	h_1^*	h_1^*
η_G	$7,81\ 10^{-13}$	$3,40\ 10^{-12}$
η_K	$7,81\ 10^{-13}$	$3,40\ 10^{-12}$
0	$7,81\ 10^{-13}$	$3,4010^{-12}$

$W^{(\mathrm{II})}(0)$	h_1^*	h_1^*
η_G	0,0	0,0
η_K	0,0	0,0
0	0,0	0,0

Tabelle 8.10: Maximale Durchbiegung von Teilproblem II. Links: 3D-Lösung. Rechts: 2D-Lösung.

$w^{(\mathrm{III})}(0, \frac{h^*}{2})$	h_1^*	h_1^*
η_G	$0,003427$	$0,003427$
η_K	$0,003427$	$0,003427$
0	$0,003427$	$0,003427$

$W^{(\mathrm{III})}(0)$	h_1^*	h_1^*
η_G	0,003428	0,003428
η_K	0,003428	0,003428
0	0,003428	0,003428

Tabelle 8.11: Maximale Durchbiegung von Teilproblem III. Links: 3D-Lösung. Rechts: 2D-Lösung.

Als nächstes dokumentieren wir, dass es hier sehr gut gerechtfertigt ist, statisch äquivalente Randbedingungen zu verwenden. Ist σ_{rr}^K die Radialspannung nach der *Kirchhoff*'schen Theorie, definieren wir die dimensionslose Größe $\sigma_{rr}^{KL} = \sigma_{rr}^K/(\mu f^s h^{*2})$. Die entsprechende Größe in der 3D-Theorie wird wie folgt definiert: $\sigma_{rr}^L = \sigma_{rr}/(\mu f^s h^{*2})$.

Ein Blick auf die Größenordnung der in Abbildung 8.2 dargestellte Restspannung, zeigt mit Blick auf die entlang des Radius auf der unteren Deckfläche aufgetragene Radialspannung in Abbildung 8.3, dass die nicht kompensierte Restspannung tatsächlich vernachlässigbar ist.

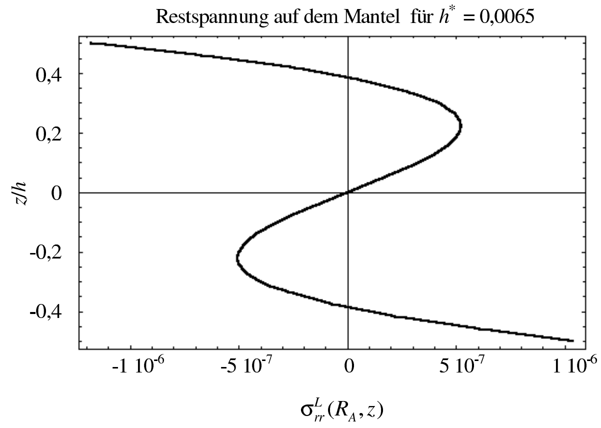

Abbildung 8.2: Dimensionslose Darstellung der radialen Restspannung auf der Mantelfläche nach statisch äquivalenter Kompensation der mittleren Spannungen und Momente.

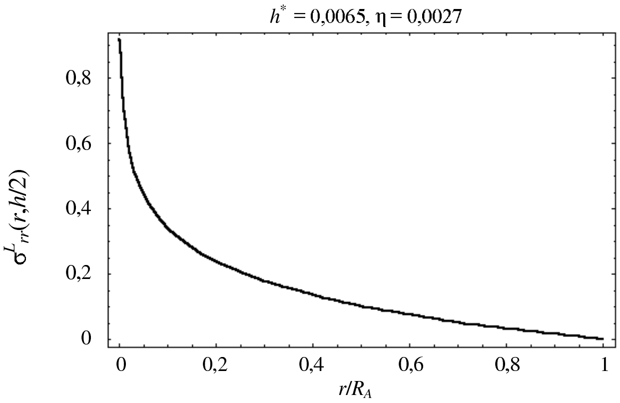

Abbildung 8.3: Dimensionslose Darstellung der Radialspannung auf der unteren Deckfläche, d.h. für $z = h/2$.

Die Spannungen σ_{rr} und σ_{zz} sind auf der oberen Deckfläche bei $r = R_C$ unstetig. Die Größe $\sigma^L_{rr}(r, -h/2)$ macht einen Sprung um den Betrag $(h^* \ \eta)^2 f^s$. Die *Kirchhoff*-Lösung weist einen solchen Sprung nicht auf. Dem Buch von *Lukasiewicz* [71] entnehmen wir, dass bei Rechnungen nach der linearen schubweichen 2D-Plattentheorie auch ein solcher Sprung zu verzeichnen ist.

Der Spannungsverlauf nach der 3D-Theorie und nach der *Kirchhoff*-Theorie ist Abbildung 8.4 dargestellt. Wir erkennen, dass die Spannungsverläufe nach der *Kirchhoff*-Theorie für $r > 2h$ kaum von der 3D-Lösung unterscheidbar sind, und dass die *Kirchhoff*-Theorie bei $r = 0$ für die Radialspannung um 40% zu niedrige Werte liefert. Zu Vergleichszwecken enthält Abbildung 8.4 außerdem den Verlauf der für beide Probleme gleich vorgegebenen Axialspannung an der oberen Stirnfläche, dargestellt durch $\sigma^L_{zz}(r, -h/2) = \frac{\sigma_{zz}(r, -h/2)}{4 f^s h^2}$.

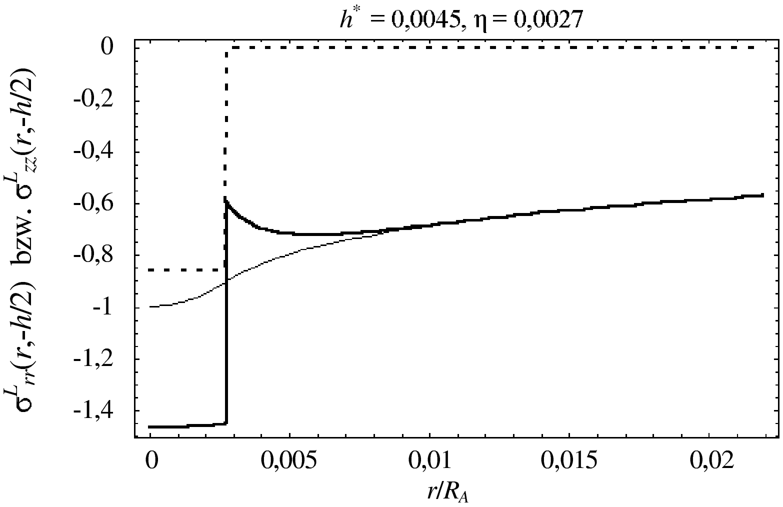

Abbildung 8.4: Dimensionslose skalierte Darstellung der Spannungen auf der oberen Deckfläche, d.h. für $z = -h/2$. Fett durchgezogen: σ^L_{rr} nach der 3D-Theorie, dünn durchgezogen: σ^L_{rr} nach der *Kirchhoff* -Theorie, gestrichelt: σ^L_{zz} nach beiden Theorien.

Die für uns wichtigste Größe ist jedoch die maximale Zugspannung. Sie liegt an der unteren Stirnseite im Punkt $(r, z) = (0, h/2)$. Der direkte Vergleich einer 3D-Lösung und einer *Kirchhoff*-Lösung ist in Abbildung 8.5 dargestellt. Wir erkennen, dass im Gegensatz zur oberen Deckfläche die Radialspannungen auf der unteren Deckfläche für $r < R_C$ nach der 3D-Lösung betragsmäßig kleiner als nach der *Kirchhoff*'schen Lösung sind. Für $r > 2h$ sind beide Lösungen wieder kaum unterscheidbar.

Vergleichen wir den Verlauf der Radialspannung für verschiedene Lastradien bei gleicher Plattendicke und bei gleicher resultierender Kraft, ergeben

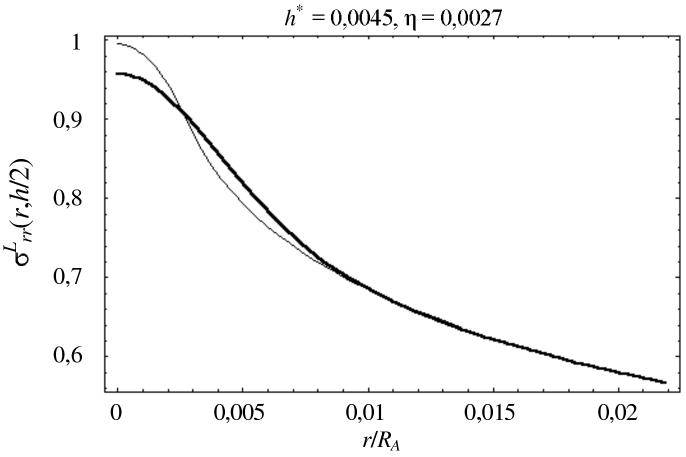

Abbildung 8.5: Dimensionslose skalierte Darstellung der Spannungen auf der unteren Deckfläche, d.h. für $z = h/2$. Fett durchgezogen: σ^L_{rr} nach der 3D-Theorie, dünn durchgezogen: σ^L_{rr} nach der *Kirchhoff* -Theorie.

sich die in Abbildung 8.6 dargestellten Verläufe. Wir erkennen, je kleiner der Lastradius ist, desto größer sind die Abweichungen der *Kirchoff*-Theorie von der 3D-Theorie. Außerdem liegen die Abweichungen nur in einem kleinen Bereich um den Nullpunkt vor. Für Radien $r > 0,01R_A$ sind die Abweichungen praktisch vernachlässigbar. Für den großen Lastradius liegt der Fehler im Nullpunkt bei 5%, für den kleinen Radius bei 24%. Außerdem konstatieren wir, dass sich der Spannungsverlauf für den kleinen Lastradius praktisch nicht vom Grenzfall $R_C \to 0$ unterscheidet, d.h. die Kurve für den Grenzfall $R_C \to 0$ verläuft entlang der dicken gestrichelten Linie.

Wir schließen daraus, dass bei $R_C \ll h$ für die Berechnung der Radialspannung der konkrete Lastradius nicht berücksichtigt werden muss, so dass wir mit der radiusunabhängigen Formel (8.84) rechnen können.

Als nächstes untersuchen wir den Einfluss der Plattendicken bei konstantem Lastradius. Für eine dimensionslose Dicke $h^* = 0,0045$ entnehmen wir aus Abbildung 8.7, dass der Fehler der skalierten Radialspannung, die nach der *Kirchhoff*'schen Theorie berechnet wurde, im Nullpunkt bei rund 4 % liegt. Bei einer Verringerung der Plattendicke um das 0,8-Fache liegt der Fehler nur noch bei 2%. Eine Verringerung um das 0,7-Fache führt nur auf einen Fehler von 1%. Die Verringerung auf das 0,6-Fache, d.h. bei einer dimensionslosen Dicke von $h^* = 0,0027$, sind die Werte der Maximalspannung nach der *Kirchhoff*'schen Theorie praktisch nicht mehr unterscheidbar.

Nachdem wir die Spannungsverläufe in radialer Richtung diskutiert haben, geben wir zum Schluss die Spannungsverläufe in axialer Richtung über die Plattendicke bei $r = 0$ an. Abbildung 8.8 zeigt den Vergleich der 3D-Lösung mit der *Kirchhoff*-Lösung. Wir sehen, dass die Abweichung bei $z = -h/2$ deutlich größer ist als bei $z = h/2$. Da wir uns für die Zug-

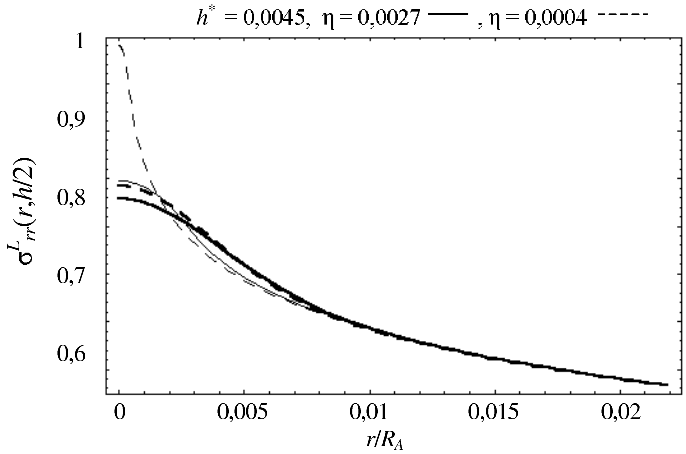

Abbildung 8.6: Radialspannungen σ_{rr}^L auf der unteren Deckfläche. Fett durchgezogen: $\eta = 0,0027$ nach 3D-Theorie. Dünn durchgezogen: $\eta = 0,0027$ nach *Kirchhoff*'scher Theorie. Fett gestrichelt: $\eta = 0,0004$ nach 3D-Theorie. Dünn gestrichelt: $\eta = 0,0004$ nach *Kirchhoff*'scher Theorie.

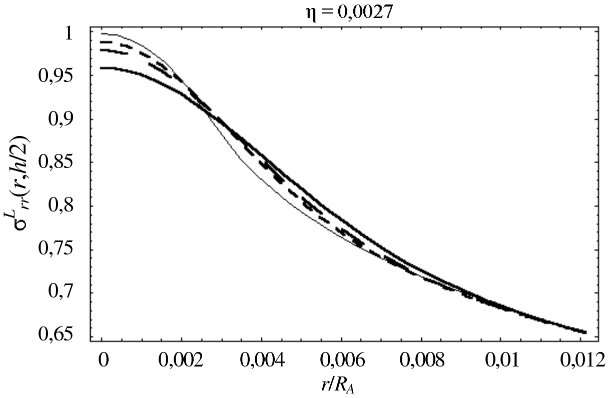

Abbildung 8.7: Einfluss der Plattendicke auf die skalierte Radialspannung. Fett: skalierte Radialspannungen für verschiedene Plattendicken. Fett durchgezogen: $h^* = 0,0045$. Fett lang gestrichelt: $h^* = 0,0036$. Fett kurz gestrichelt: $h^* = 0,00315$. Dünn durchgezogen: skalierte Radialspannung nach der *Kirchhoff*-Lösung für alle Dicken.

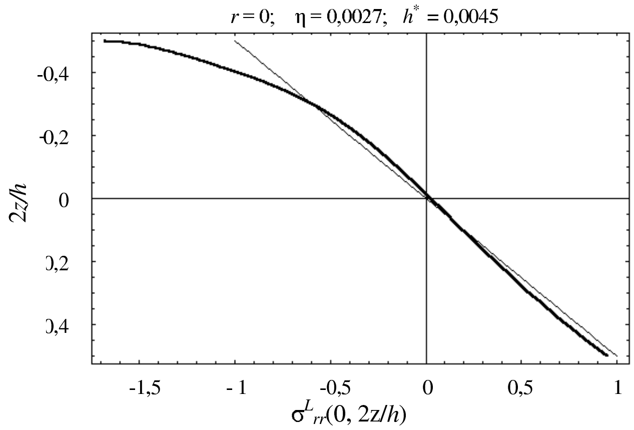

Abbildung 8.8: Radialspannung entlang der Achse $r = 0$. Fett: 3D-Theorie. Dünn: *Kirchhoff*-Theorie.

spannungen bei $z = h/2$ interessieren, haben wir es mit dem günstigeren Fall zu tun.

8.5.5 Folgerungen aus dem 2D-3D-Vergleich

Die Berechnung der Durchbiegung bei lokal begrenzten Lasten kann in ausreichender Genauigkeit durch eine 2D-Plattentheorie erfolgen. Die Berechnung der Radialspannung ist außer in der Umgebung der konzentrierten Last ebenfalls ausreichend genau. Im Nullpunkt sind die Werte der Radialspannung auf der unteren Stirnseite nach der *Kirchhoff*'schen Theorie immer zu hoch. Dabei sind die Abweichungen für kleine Lastradien immer größer als für große Lastradien. In der Praxis hängen jedoch die Lastradien von der Druckkraft ab, da sie sich aus einer *Hertz*'schen Pressung ergeben. Wir folgern, dass kleine Lasten die Verwendung der genaueren 3D-Theorie eher erfordern, als große Lasten. Die Beispielrechnung wurde anhand der realen Dickenverhältnisse der untersuchten Platten vorgenommen. Das Verhältnis $h^* = 0.0027$ ergibt sich für die *Hertz*'sche Pressung der tatsächlich im Experiment verwendeten Kugel bei $f = 500$ N. Dies ist gerade der Bereich, bei dem die Platte bricht. Für diesen Wert liefert die *Kirchhoff*'sche Theorie Abweichungen von 4%.

Kapitel 9

Schlussbemerkungen und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein spezieller Biegetest für Gallium-Arsenid-Wafer modelliert. Es wurde gezeigt, dass der gesamte Wafer als eine dünne Platte zu betrachten ist. Das Plattenproblem wurde zunächst mit der *von Kármán*'schen Theorie gelöst. Der Grenzwertcharakter dieser Theorie für Platten, deren Dicke gegen Null geht, wurde für das vorliegende nichtlineare Randwertproblem durch asymptotische Entwicklung seiner schwachen Formulierung gezeigt. Dabei wurden sowohl die Anisotropie als auch die besonderen Randbedingungen des Biegetests in der Asymptotik berücksichtigt.

Zur Modellierung des Kontaktproblems wurde die Theorie der *Hertz*'schen Pressung vom isotropen Fall auf den anisotropen Fall übertragen.

Nach Auswahl geeigneter Finite-Element-Ansätze wurde die FE-Diskretisierung des *von Kármán*'schen Problems mittels reduzierter *Hermite*'scher kubischer und quintischer Dreieckselemente formuliert. Die Randbedingungen wurden am Kreisrand so formuliert, dass das Plattenparadox nicht auftritt. Dies konnte durch die hohe Genauigkeit in der Übereinstimmung mit einer analytischen *Kirchhoff*-Lösung dokumentiert werden. Außerdem zeigten die berechneten nichtlinearen Last-Durchbiegungskurven eine sehr gute Übereinstimmung mit den vom Wafer-Hersteller angegebenen experimentellen Daten.

Die berechneten Spannungsverläufe weisen eine nur schwache Anisotropie auf. Es konnte gezeigt werden, dass durch keine der bekannten isotropen Mittelungsformeln eine brauchbare Approximation der Durchbiegung erreicht werden kann. Deshalb wurde ein isotroper Datensatz numerisch aus dem Biegetest berechnet, für den eine sehr gute Übereinstimmung von isotroper und anisotroper Durchbiegung erreicht werden konnte. Überraschenderweise konnte mit diesem Datensatz eine deutlich bessere isotrope Approximation der anisotropen Kontaktfläche des anisotropen Problems der *Hertz*'schen Pressung realisiert werden, als es mit den bekannten Mittelungsformeln möglich ist.

Die konkreten FE-Rechnungen zeigten, dass in der Umgebung der Kontaktfläche zwischen Druckkugel und Wafer die Bedingungen der Plattentheorie verletzt sind. Deshalb wurde das Kernzylinderproblem mit der 3D-Theorie für dicke Platten hergeleitet und eine Vorschrift erarbeitet, wie die Resultate einer FE-Rechnung weiter verarbeitet werden müssen, um die genauen Zugspannungsverläufe berechnen zu können. Für Parameterstudien wurde ein leicht modifiziertes Testproblem einem 2D-3D-Vergleich unterzogen, mit dem Resultat, dass die mit der 2D-Plattentheorie berechneten Zugspannungen zu hoch approximiert werden. Da bei hohen Lasten die Kontaktfläche durch Pressung größer wird, sind die Abweichungen bei hohen Lasten kleiner als bei niedrigen Lasten.

Aufgrund der hier vorgestellten Analyse kann somit dem Wafer-Hersteller eine sehr genaue Spannungsanalyse des Biegetest geliefert werden. In gleicher Weise konnte gezeigt werden, dass kommerzielle FE-Rechenergebnisse, die zu kleine Durchbiegungen liefern, offensichtlich das Plattenparadox nicht berücksichtigen, und dass die Ergebnisse einer 2D-Plattentheorie durch einen nachgeschalteten Prozess zur Ermittlung brauchbarer Zugspannungswerte aufbereitet werden müssen.

Als offenes Problem ergibt sich die Beantwortung der Frage, warum die Verwendung der bekannten isotropen Mittelungsformeln bei schwacher Anisotropie zu resultierenden maximalen Durchbiegungen führt, die grundsätzlich um 10% zu klein sind.

Anhang A

Ergänzende Ausführungen zum 3D-Problem

A.1 Deformation und Lageänderung

Im gewöhnlichen Sprachgebrauch, und bis Anfang der 60er Jahre des vorigen Jahrhunderts auch in den meisten Veröffentlichungen auf dem Gebiet der Mechanik, wird unter Deformation eines Körpers eine Verformung, sprich eine Formänderung, verstanden, so z.B. bei *Voigt* 1889 in [110], *Lagally* 1928 in [70], *Sommerfeld* 1954 in [102] oder *Macke* 1962 in [73]. Während im *Handbuch der Physik* Band VI alle Autoren ebenfalls diese Definition von Deformation verwenden [40], ist in einigen anderen, viel zitierten Bänden dieses Handbuchs Deformation ein Synonym für Lageänderung. Siehe hierzu die Bände III/1, III/3 und VIa/2, angegeben unter [106, 105] und [51]. Diese unanschauliche Bezeichnung ist Quelle für so manches Missverständnis, insbesondere im Zusammenhang mit den so genannten „großen Deformationen“ und den Starrkörperdrehungen.

Im hier beschriebenen Fall, des auf dem Stützring aufliegenden Wafers, betrachten wir zur Illustration zwei verschiedene Lageänderungen bezüglich der im Bild 3.1 auf Seite 18 angegebenen Referenzlage. Links im Bild A.1 auf der nächsten Seite heben wir den Wafer so an, dass er den Stützring nur noch in einem Punkt seiner oberen Außenkante berührt. Auf der rechten Seite des Bildes A.1 zeigen wir die Draufsicht eines auf dem Stützring liegenden Wafers, der um den selben Punkt wie im linken Bild verdreht ist. In beiden Fällen bleibt der Wafer unverformt, d.h. es handelt sich keineswegs um große Verformungen. Nach Lesart des *Handbuchs der Physik* handelt es sich jedoch in beiden Fällen um große Deformationen.

Dem Anliegen des Handbuchs entsprechend, übernahmen die meisten Autoren nach seinem Erscheinen diese Begriffe, obwohl *Noll*, einer der Mitautoren des Bandes des III/3 schon 1972 in [81] neue Bezeichnungen vorschlug, und *Truesdell* und *Noll* im Vorwort zur 1992 erschienenen 2. Auf-

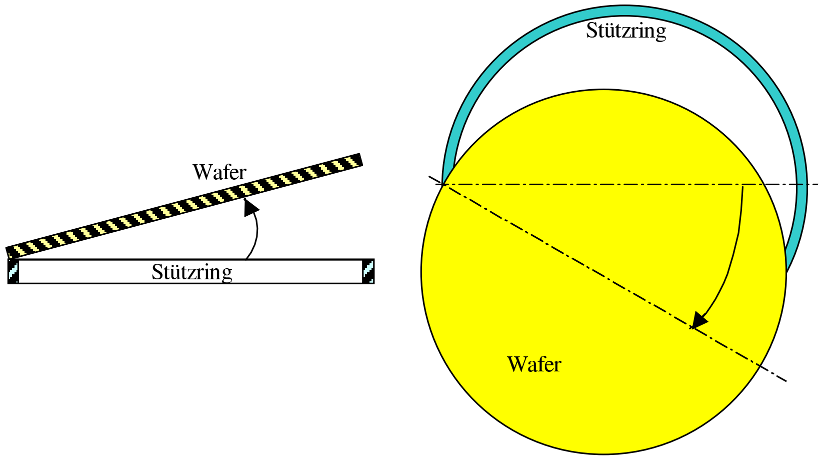

Abbildung A.1: Starrkörperdrehungen des Wafers um einen Punkt auf der oberen Außenkante des Stützringes. Links: Der Wafer wird auf einer Seite vom Stützring angehoben. Rechts: Der Wafer wird, auf dem Stützring liegend, durch eine Drehung verschoben.

lage dieses Handbuchartikels [105] ausdrücklich darauf hinwiesen, dass die in der ersten Auflage des Handbuchs verwendeten Begriffe „configuration“ und „deformation“ von ihnen schlecht gewählt wurden. Stattdessen schlagen sie die Verwendung von „placement“ und „transplacement“ vor, da die Klassifizierung von Translation und Rotation als Deformation, der in einem gewöhnlichen Wörterbuch oder Lexikon erklärten Bedeutung von Deformation widerspricht.

So wie *Noll* in [81] den Begriff „placement“ zur Beschreibung der Lage eines materiellen Körpers benutzt, verwendet *Krawietz* 1986 in [67] den deutschen Begriff „Platzierung“[1]. Die Lageänderung $\boldsymbol{\chi}$ wird bei *Krawietz* nicht, wie im *Handbuch der Physik*, „Deformation“, sondern „Platzierungswechsel“ genannt. *Bertram* schlägt in [11] vor, die Größe $\boldsymbol{\chi}$ „Deplatzierung“ zu nennen. *Noll* nennt in [81] diese Größe „displacement tensor“, während *Krawietz* dafür die Bezeichnung „lokaler Platzierungswechsel“ einführt.

Es sei hier noch angemerkt, dass bei *Noll* in [81] verschiedene Platzierungen des Körpers zu einer „Konfiguration“ gehören, wenn sich die Platzierungen nur durch Starrkörpermodifikationen unterscheiden. Demnach gehören beide im Bild A.1 starr gedrehten Wafer zur gleichen Konfiguration.

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass die oben erwähnten Autoren, wie *Voigt*, *Lagally*, *Sommerfeld* oder *Macke*, die Größe $\boldsymbol{u}$ nicht „Verschiebung“ nennen, sondern „Verrückung“. „Verschiebungen“ beschreiben bei *Voigt* und *Macke* reine Starrkörpertranslationen. Während bei *Voigt*

---

[1] Im Original [67] wird nach alter Rechtschreibung „Plazierung“ geschrieben.

und *Lagally* der symmetrische Anteil des Gradienten von $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$ bezüglich der Referenzkoordinaten X_i als „Deformation“ bezeichnet wird, heißt diese Größe bei *Sommerfeld* und *Macke* „Verzerrung“.

A.2 Zur Darstellung der elastischen Konstanten

A.2.1 *Voigt*'sche Notation — modulare Darstellung

Der Steifigkeitstensor im *Saint-Venant–Kirchhoff*'schen Materialgesetz gemäß (4.31) kann als lineare Abbildung $\boldsymbol{c} : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ betrachtet werden. Durch Umordnung lässt sich eine 3×3-Matrix auch als 9×1-Matrix anordnen, so dass wir die Komponenten von $\boldsymbol{c}$ auch als 9×9-Matrix $\underline{\underline{c}} : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ schreiben können. Wegen der Symmetriebedingungen (4.32) ist $\underline{\underline{c}}$ nicht invertierbar. Da symmetrische 3×3-Matrizen nur 6 voneinander unabhängige Komponenten haben, lassen sich die unabhängigen Komponenten einer solchen Matrix durch Umordnung als 6×1-Matrix darstellen. Die Komponenten von $\boldsymbol{c}$ können entsprechend als invertierbare 6×6-Matrix dargestellt werden.

Die Umschrift der Komponenten von symmetrischen 3×3-Matrizen in 6×1-Matrizen kann auf verschiedene Weisen erfolgen. *Olschewski* benutzt in [85, 86] und [87] eine Zuordnung, für die

$$G_{ij}G_{ij} = |\underline{G}^O|^2 \quad \text{und} \quad \sigma_{ij}\sigma_{ij} = |\underline{\sigma}^O|^2$$

gilt, mit

$$\begin{aligned} \underline{G}^O &:= (G_{11}, G_{22}, G_{33}, \sqrt{2}G_{23}, \sqrt{2}G_{31}, \sqrt{2}G_{12}) \quad \text{und} \\ \underline{\sigma}^O &:= (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sqrt{2}\sigma_{23}, \sqrt{2}\sigma_{31}, \sqrt{2}\sigma_{12}), \end{aligned}$$

so dass mit $\underline{\sigma}^O = \underline{\underline{c}}^O \underline{G}^O$ und $\underline{G}^O = \underline{\underline{s}}^O \underline{\sigma}^O$ auch

$$c^O_{44} = c_{2323}/2 \quad \text{und} \quad s^O_{44} = s_{2323}/2$$

gilt[2]. Die so genannte *Voigt*'sche Notation, wie sie von z.B. von *Voigt* in [110] und von *Gurtin* in [51] verwendet wird, geht dagegen aus den folgenden Zuordnungen hervor:

$$\begin{pmatrix} G^V_1 \\ G^V_2 \\ G^V_3 \\ G^V_4 \\ G^V_5 \\ G^V_6 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} G_{11} \\ G_{22} \\ G_{33} \\ 2G_{12} \\ 2G_{23} \\ 2G_{31} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sigma^V_1 \\ \sigma^V_2 \\ \sigma^V_3 \\ \sigma^V_4 \\ \sigma^V_5 \\ \sigma^V_6 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

Oft werden die Größen G^V_I für $I = 1, 2, 3$ auch Dehnungen genannt. Für $I = 4, 5, 6$ nennt man sie auch Gleitungen.

---

[2] Siehe auch Fedorov [36] und Cowin [31].

Es folgt

$$G_{ij}G_{ij} \neq |\underline{G}^V|^2 \quad \text{und} \quad \sigma_{ij}\sigma_{ij} \neq |\underline{\sigma}^V|^2.$$

Mit $\underline{\sigma}^V = \underline{\underline{c}}^V \underline{G}^V$ und $\underline{G}^V = \underline{\underline{s}}^V \underline{\sigma}^V$ gilt

$$\begin{pmatrix} c^V_{11} & c^V_{12} & c^V_{13} & c^V_{14} & c^V_{15} & c^V_{16} \\ c^V_{12} & c^V_{22} & c^V_{23} & c^V_{24} & c^V_{25} & c^V_{26} \\ \iddots & \iddots & c^V_{33} & c^V_{34} & c^V_{35} & c^V_{36} \\ \iddots & \iddots & \iddots & c^V_{44} & c^V_{45} & c^V_{46} \\ \iddots & sym. & \iddots & \iddots & c^V_{55} & c^V_{56} \\ c^V_{16} & \iddots & \iddots & \iddots & c^V_{56} & c^V_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1112} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2231} & c_{2231} & c_{2212} \\ \iddots & \iddots & c_{3333} & c_{3312} & c_{3331} & c_{3312} \\ \iddots & \iddots & \iddots & c_{2323} & c_{2331} & c_{2312} \\ \iddots & sym. & \iddots & \iddots & c_{3131} & c_{3112} \\ c_{1112} & \iddots & \iddots & \iddots & c_{3112} & c_{1212} \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

und

$$\begin{pmatrix} s^V_{11} & s^V_{12} & s^V_{13} & s^V_{14} & s^V_{15} & s^V_{16} \\ s^V_{12} & s^V_{22} & s^V_{23} & s^V_{24} & s^V_{25} & s^V_{26} \\ \iddots & \iddots & s^V_{33} & s^V_{34} & s^V_{35} & s^V_{36} \\ \iddots & \iddots & \iddots & s^V_{44} & s^V_{45} & s^V_{46} \\ \iddots & sym. & \iddots & \iddots & s^V_{55} & s^V_{56} \\ s^V_{16} & \iddots & \iddots & \iddots & s^V_{56} & s^V_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1111} & s_{1122} & s_{1133} & 2s_{1123} & 2s_{1131} & 2s_{1112} \\ s_{1122} & s_{2222} & s_{2233} & 2s_{2231} & 2s_{2231} & 2s_{2212} \\ \iddots & \iddots & s_{3333} & 2s_{3312} & 2s_{3331} & 2s_{3312} \\ \iddots & \iddots & \iddots & 4s_{2323} & 4s_{2331} & 4s_{2312} \\ \iddots & sym. & \iddots & \iddots & 4s_{3131} & 4s_{3112} \\ 2s_{1112} & \iddots & \iddots & \iddots & 4s_{3112} & 4s_{1212} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Insbesondere gilt

$$c^V_{44} = c_{2323} \quad \text{und} \quad s^V_{44} = 4s_{2323}. \tag{A.4}$$

Die Größen E_i, die durch

$$\frac{1}{E_i} = s_{i\underline{iii}} = s^V_{i\underline{i}} \tag{A.5}$$

definiert sind, werden Elastitizitätsmodule bzw. kurz E-Module genannt. Sie bilden die Proportionalitätsfaktoren zwischen Spannung und Dehnungen in Richtung der X_i-Achse, für diejenigen einachsigen Spannungszustände für die gerade $\sigma_{i\underline{i}} \neq 0$ gilt. Entsprechend werden die Größen ν_{ij}, die durch

$$\nu_{ij} = -\frac{s_{\underline{ii}\,j\underline{j}}}{s_{i\underline{iii}}} = -\frac{s^V_{\underline{i}j}}{s^V_{i\underline{i}}} \quad \text{mit} \quad i \neq j \tag{A.6}$$

definiert sind, Querkontraktionszahlen genannt. Der negative Wert der Querkontraktionszahl ν_{ij} gibt im einachsigen Spannungszustand das Verhältnis zwischen den Dehnungen in i-Richtung und j-Richtung an. Im allgemeinen gilt $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$, da $\frac{\nu_{ij}}{\nu_{ji}} = \frac{E_j}{E_i}$ gilt. Die Größen μ_i, definiert durch

$$\frac{1}{\mu_1} = 4s_{2323} = s^V_{44}, \; \frac{1}{\mu_2} = 4s_{3131} = s^V_{55} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mu_3} = 4s_{1212} = s^V_{66} \tag{A.7}$$

werden Schub- oder Schermodule genannt. Sie bilden den Proportionalitätsfaktor zwischen gleichindizierten Schubspannungen und Gleitungen.

A.2.2 Elastische Konstanten bei Isotropie oder kubischer Materialsymmetrie

Bei kubischer Materialsymmetrie gibt es gemäß Abschnitt 4.2.5 nur drei voneinander unabhängige Komponenten c_{ijkl}. Damit gibt es auch nur drei voneinander unabhängige Komponenten c^V_{IJ} mit I, J = 1,. . . ,6. Die Komponenten c^V_{IJ} hängen im allgemeinen von der Orientierung ab und die von ihnen generierte Matrix ist voll besetzt. In der ⟨100⟩-Orientierung lassen sich die Komponenten zu einer dünn besetzten Matrix $\underline{\underline{c}}^{V\langle 100\rangle}$ anordnen:

$$\underline{\underline{c}}^{V\langle 100\rangle} = \begin{pmatrix} c^V_{11} & c^V_{12} & c^V_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c^V_{12} & c^V_{11} & c^V_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c^V_{12} & c^V_{12} & c^V_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c^V_{44} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & c^V_{44} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c^V_{44} \end{pmatrix} . \tag{A.8}$$

Dies ist die Standardnotation der Werkstofftechniker, Metallkundler und Kristallphysiker. Wann immer in der Literatur elastische Konstanten durch Komponenten c_{IJ} angegeben werden, ist *Voigt*'sche Notation in der ⟨100⟩-Orientierung gemeint. Deshalb lassen wir den Index V und die *Miller*'schen Indizes bei dieser Notation weg.

Im isotropen Fall gilt der Zusammenhang

$$c_{44} = (c_{11} - c_{12})/2, \tag{A.9}$$

so dass die Matrix-Darstellung gemäß (A.8) für diesen Fall unabhängig von der Orientierung ist.

Bei Verwendung der normalen Tensornotation ist im isotropen Fall die folgende Darstellung des *St-Venant–Kirchhoff*'schen Materialgesetz gemäß (4.31) üblich:

$$\sigma_{ij} = \lambda \, G_{kk} \, \delta_{ij} + 2 \, \mu \; G_{ij}. \tag{A.10}$$

Dabei heißen λ und μ Lamé-Konstanten und es gelten zu den isotropen *Voigt*'schen Konstanten die Beziehungen

$$2\mu = c_{11} - c_{12} \quad \text{und} \quad \lambda = c_{12}. \tag{A.11}$$

Eine solche kompakte Darstellung ist bei kubischer Materialsymmetrie im allgemeinen nicht möglich. Eine Ausnahme bildet auch hier die Darstellung in der ⟨100⟩-Orientierung. Dort erhalten wir statt der isotropen Darstellung gemäß Formel (A.10) die Formel (4.35): $\sigma_{ij} = \lambda^{\langle 100\rangle} G_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^{\langle 100\rangle} G_{ij} + \mu'^{\langle 100\rangle} G_{\underline{ii}} \delta_{ij}$. Die Größen $\lambda^{\langle 100\rangle}$, $\mu^{\langle 100\rangle}$ und $\mu'^{\langle 100\rangle}$ sind die *Lamé*-Konstanten des kubischen Materials in der $\langle 100\rangle$-Orientierung und es gelten für die kubischen *Voigt*'schen Konstanten in der $\langle 100\rangle$-Orientierung die Beziehungen

$$\mu^{\langle 100\rangle} = c_{44}, \quad \lambda^{\langle 100\rangle} = c_{12} \quad \text{und} \quad \mu'^{\langle 100\rangle} = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}. \tag{A.12}$$

Die Größe μ ist zugleich der Schubmodul in der $\langle 100\rangle$-Orientierung, da in dieser Orientierung alle durch (A.7) definierten Schubmoduli zusammenfallen, d. h. es gilt $\mu_1^{\langle 100\rangle} = \mu_2^{\langle 100\rangle} = \mu_3^{\langle 100\rangle} = \mu^{\langle 100\rangle}$. Im weiteren lassen wir die *Miller*'schen Indizes auch an den *Lamé*-Konstanten weg, da wir diese Größen in der vorliegenden Arbeit nur in der $\langle 100\rangle$-Orientierung verwenden.

Die E-Moduli E_i und die Querkontraktionszahlen ν_{ij} fallen in der $\langle 100\rangle$-Orientierung ebenfalls zusammen, da entsprechend Abbildung 3.3 auf Seite 19 alle Kristallhauptachsen gleichwertig sind. Es gilt $E_1^{\langle 100\rangle} = E_2^{\langle 100\rangle} = E_3^{\langle 100\rangle} = E^{\langle 100\rangle}$ und $\nu_{23}^{\langle 100\rangle} = \nu_{32}^{\langle 100\rangle} = \nu_{31}^{\langle 100\rangle} = \nu_{13}^{\langle 100\rangle} = \nu_{23}^{\langle 100\rangle} = \nu_{32}^{\langle 100\rangle} = \nu^{\langle 100\rangle}$ mit

$$E^{\langle 100\rangle} = \frac{1}{s_{11}} = (c_{11} - c_{12})\frac{c_{11} + 2c_{12}}{c_{11} + c_{12}} \quad \text{und} \quad \nu^{\langle 100\rangle} = -\frac{s_{12}}{s_{11}} = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}}. \tag{A.13}$$

Da wir im Kapitel 6 auch orientierungsabhängige E-Moduli und Querkontraktionszahlen einführen, die wir im Zusammenhang mit der *Hertz*'schen Pressung kubisch anisotroper Materialien benötigen, lassen wir die *Miller*'schen Indizes bei $E_{\langle 100\rangle}$ und $\nu_{\langle 100\rangle}$ nicht weg.

A.2.3 Isotrope Mittelung kubisch elastischer Materialien

Zur weiteren Vereinfachung des Modell interessieren wir uns für isotrope Näherungen. Eine umfassende Übersicht zu den verschieden Möglichkeiten der Mittelwertbildung wird von *Böhlke* in [12] angegeben. Insgesamt werden vier Mittelungsformeln angegeben, die mit den Namen *Voigt* [111], *Reuss* [91], *Hill* [57] und *Eisenberg* [1] verbunden sind. Die Vorschrift von *Voigt* wird auch arithmetisches, die von *Eisenberg* geometrisches und die von *Reuss* harmonisches Mittel genannt, wobei das *Voigt*'sche und das *Reuss*'sche den Charakter von oberen und unteren Schranken haben, deren arithmetisches Mittel die Vorschrift von *Hill* ist.

Im Folgenden sind die Formeln für den Kompressionsmodul K, den Schubmodul μ, den E-Modul E und die Querkontraktionszahl ν tabellarisch angegeben. Außerdem geben wir noch die Kontaktsteifigkeit k an, die in dieser Form nicht nur bei der *Hertz*'schen Pressung, sondern auch als Plattensteifigkeit in der isotropen Plattentheorie auftaucht. Speziell für GaAs geben wir die entsprechen Werte an, die sich aus den drei *Voigt*'schen Konstanten gemäß (3.1) ergeben.

	$\langle 100\rangle$	$\langle 110\rangle$
K	$K^{\langle 100\rangle} = \frac{2c_{12}+c_{11}}{3}$	$K^{\langle 110\rangle} = K^{\langle 100\rangle}$
μ	$\mu^{\langle 100\rangle} = c_{44}$	$\mu^{\langle 110\rangle} = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}$
E	$E^{\langle 100\rangle} = \frac{1}{s_{11}}$	$E^{\langle 110\rangle} = \frac{4}{2(s_{11}+s_{12})+s_{44}}$
ν	$\nu^{\langle 100\rangle} = -\frac{s_{12}}{s_{11}}$	$\nu^{\langle 110\rangle} = \frac{s_{44}-2(s_{11}+s_{12})}{s_{44}+2(s_{11}+s_{12})}$
k	$k^{\langle 100\rangle} = \frac{s_{11}}{s_{11}^2-s_{12}^2}$	$k^{\langle 110\rangle} = \frac{2(s_{11}+s_{12})-s_{44}}{2(s_{11}+s_{12})s_{44}}$

Tabelle A.1: Elastische Konstanten von Einkristallen in der $\langle 100\rangle$-Orientierung und in der $\langle 110\rangle$-Orientierung, dargestellt durch die *Voigt*'schen Konstanten.

	Voigt	*Eisenberg*
K	$K^{\langle VI\rangle} = K^{\langle 100\rangle}$	$K^{\langle AI\rangle} = K^{\langle 100\rangle}$
μ	$\mu^{\langle VI\rangle} = \frac{1}{5}(c_{11} - c_{12} + 3c_{44})$	$\mu^{\langle AI\rangle} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})^{\frac{2}{5}}(2c_{44})^{\frac{3}{5}}$
E	$E^{\langle VI\rangle} = \frac{9K^{\langle VI\rangle}\mu^{\langle VI\rangle}}{3K^{\langle VI\rangle}+\mu^{\langle VI\rangle}}$	$E^{\langle AI\rangle} = \frac{9K^{\langle AI\rangle}\mu^{\langle AI\rangle}}{3K^{\langle AI\rangle}+\mu^{\langle AI\rangle}}$
ν	$\nu^{\langle VI\rangle} = \frac{1}{2}\frac{3K^{\langle VI\rangle}-2\mu^{\langle VI\rangle}}{3K^{\langle VI\rangle}+\mu^{\langle VI\rangle}}$	$\nu^{\langle AI\rangle} = \frac{1}{2}\frac{3K^{\langle AI\rangle}-2\mu^{\langle AI\rangle}}{3K^{\langle AI\rangle}+\mu^{\langle AI\rangle}}$
k	$k^{\langle VI\rangle} = \frac{E^{\langle VI\rangle}}{1-(\nu^{\langle VI\rangle})^2}$	$k^{\langle AI\rangle} = \frac{E^{\langle AI\rangle}}{1-(\nu^{\langle AI\rangle})^2}$

Tabelle A.2: Isotrope Näherung nach *Voigt* und *Eisenberg*, dargestellt durch die *Voigt*'schen Konstanten des Einkristalls.

	Reuss	*Hill*
K	$K^{\langle RI\rangle} = K^{\langle 100\rangle}$	$K^{\langle HI\rangle} = K^{\langle 100\rangle}$
μ	$\mu^{\langle RI\rangle} = \frac{5c_{44}(c_{11}-c_{12})}{4c_{44}+3(c_{11}-c_{12})}$	$\mu^{\langle HI\rangle} = \frac{1}{2}(\mu^{\langle VI\rangle} + \mu^{\langle RI\rangle})$
E	$E^{\langle RI\rangle} = \frac{9K^{\langle RI\rangle}\mu^{\langle RI\rangle}}{3K^{\langle RI\rangle}+\mu^{\langle RI\rangle}}$	$E^{\langle HI\rangle} = \frac{9K^{\langle HI\rangle}\mu^{\langle HI\rangle}}{3K^{\langle HI\rangle}+\mu^{\langle HI\rangle}}$
ν	$\nu^{\langle RI\rangle} = \frac{1}{2}\frac{3K^{\langle RI\rangle}-2\mu^{\langle RI\rangle}}{3K^{\langle RI\rangle}+\mu^{\langle RI\rangle}}$	$\nu^{\langle HI\rangle} = \frac{1}{2}\frac{3K^{\langle HI\rangle}-2\mu^{\langle HI\rangle}}{3K^{\langle HI\rangle}+\mu^{\langle HI\rangle}}$
k	$k^{\langle RI\rangle} = \frac{E^{\langle RI\rangle}}{1-(\nu^{\langle RI\rangle})^2}$	$k^{\langle HI\rangle} = \frac{E^{\langle HI\rangle}}{1-(\nu^{\langle HI\rangle})^2}$

Tabelle A.3: Isotrope Näherung nach *Reuss* und *Hill*, dargestellt durch die *Voigt*'schen Konstanten des Einkristalls.

	$\langle 100\rangle$	$\langle 110\rangle$	*Voigt*	*Eisenberg*	*Reuss*	*Hill*
K in GPa	75,53	$75,53$	$75,53$	$75,53$	$75,53$	$75,53$
μ in GPa	59,5	32,6	48,74	46,77	44,73	46,74
E in GPa	85,5	121,52	120,34	116,31	112,08	116,24
ν	0,3113	0,0212	0,2345	0,2434	0,2527	0,2435
k in GPa	94,68	121,58	127,34	123,63	119,73	123,57

Tabelle A.4: Isotrope Näherung nach *Voigt*, *Eisenberg*, *Reuss* und *Hill* für GaAs, berechnet aus den *Voigt*'schen Konstanten gemäß (3.1).

Wir erkennen, in allen Mittelungsformeln ist der Kompressionsmodul gleich dem des kubischen Materials. Damit gilt der Zusammenhang

$$E^{I*} = 3K^{\langle 100\rangle}(1 - 2\nu^{I*}). \tag{A.14}$$

Zu einer kompakten Darstellung der verschieden Mittelungsformeln gelangen wir mit Hilfe der Projektorschreibweise. Danach werden die Steifigkeitstensoren als Linearkombinationen von Tensoren 4. Stufe mit besonderen Eigenschaften darstellt. Ein Projektor $\boldsymbol{P}^{(m)}$ hat die gleichen Symmetrieeigenschaften, wie die der Steifigkeitstensor selbst, d.h. es gilt entsprechend (4.32)

$$P^{(m)}_{ijkl} = P^{(m)}_{klij} = P^{(m)}_{ijlk}. \tag{A.15}$$

Außerdem gilt

$$P^{(m)}_{ijkl}P^{(\underline{m})}_{klpq} = P^{(m)}_{ijpq}, \tag{A.16}$$

$$P^{(m)}_{ijkl}P^{(n)}_{klpq} = 0, \quad \text{falls} \quad n \neq m \tag{A.17}$$

und

$$\sum_{m=1}^{n_{max}} P^{(m)}_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2. \tag{A.18}$$

Für kubische Materialien gibt es im Kristallachsensystem für die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitstensoren die Darstellung

$$\boldsymbol{c} = \gamma_i \boldsymbol{P}^{(i)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{s} = \frac{1}{\gamma_i}\boldsymbol{P}^{(i)} \tag{A.19}$$

und für isotrope Materialien gilt

$$\boldsymbol{c}^I = \gamma^I_\alpha \boldsymbol{P}^{I(\alpha)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{s}^I = \frac{1}{\gamma^I_\alpha}\boldsymbol{P}^{I(\alpha)}, \tag{A.20}$$

wobei auch hier für kleine lateinischen Buchstaben die *Einstein*'sche Summationskonvention von 1 bis 3 gelten soll und für kleine griechische Buchstaben von 1 bis 2.

Die Projektoren im kubischen Fall sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P^{(1)}_{ijkl} &:= \delta_{ij}\delta_{kl}/3, \quad P^{(2)}_{ijkl} := \delta_{ijkl} - P^{(1)}_{ijkl} \quad \text{und} \\ P^{(3)}_{ijkl} &:= (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2 - P^{(1)}_{ijkl} - P^{(2)}_{ijkl}. \end{aligned} \tag{A.21}$$

Im isotropen Fall gilt:

$$\begin{aligned} P^{I(1)}_{ijkl} &:= P^{(1)}_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}/3 \quad \text{und} \\ P^{I(2)}_{ijkl} &:= P^{(2)}_{ijkl} + P^{(3)}_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2 - P^{I(1)}_{ijkl}. \end{aligned} \tag{A.22}$$

Die Koeffizienten vor den Projektoren stehen zu den *Voigt*'schen Konstanten in folgender Beziehung:

$$\gamma_1 = c_{11} + 2c_{12}, \quad \gamma_2 = c_{11} - c_{12} \quad \text{und} \quad \gamma_3 = 2c_{44}. \tag{A.23}$$

Für den isotropen Fall gilt

$$\gamma^I_1 = c_{11} + 2c^I_{12} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = c^I_{11} - c^I_{12}. \tag{A.24}$$

Für die isotrope Mittelung werden nun die γ^I_α durch die γ_i ausgedrückt. Definieren wir entsprechend *Böhlke* [12] die folgende Gewichtsmatrix

$$W^{(\alpha i)} := \frac{P^{I(\alpha)}_{jkls} P^{(i)}_{jkls}}{P^{I(\underline{\alpha})}_{mnpq} P^{I(\underline{\alpha})}_{mnpq}}, \tag{A.25}$$

deren Zeilensummen stets 1 sind, gilt für die Mittelungen nach *Voigt*, *Eisenberg* und *Reuss*

$$\gamma^{VI}_\alpha = W^{(\alpha i)}\gamma_i, \quad \gamma^{AI}_\alpha = \gamma_1^{W^{(\alpha 1)}} \gamma_2^{W^{(\alpha 2)}} \gamma_3^{W^{(\alpha 3)}}, \quad \frac{1}{\gamma^{RI}_\alpha} = W^{(\alpha i)}\frac{1}{\gamma_i} \tag{A.26}$$

sowie nach *Hill*

$$\gamma^{HI}_\alpha = (\gamma^{VI}_\alpha + \gamma^{RI}_\alpha)/2. \tag{A.27}$$

Wegen $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ folgt daraus

$$\gamma^{VI}_1 = \gamma^{AI}_1 = \gamma^{RI}_1 = \gamma^{HI}_1 = \gamma_1 \tag{A.28}$$

und

$$\gamma^{VI}_2 = 2\gamma_2/5 + 3\gamma_3/5, \quad \gamma^{AI}_2 = \gamma_2^{2/5}\gamma_2^{3/5}, \quad \gamma^{RI}_2 = \frac{5\gamma_2\gamma_3}{2\gamma_2 + 3\gamma_3}. \tag{A.29}$$

A.3 Kleine Verzerrungen — kleine Verschiebungsgradienten

Liegen kleine Verzerrungen vor, genügt der *Green*'sche Verzerrungstensor $\boldsymbol{G}$, gemäß (4.12), der Bedingung

$$0 \leq \|\boldsymbol{G}\| \ll 1. \tag{A.30}$$

Damit lassen sich Tensorfunktionen von $\boldsymbol{G}$ durch Tensorfunktionen approximieren, die nur noch linear in $\boldsymbol{G}$ sind.

Als erstes Beispiel betrachten wir das allgemeine elastische Gesetz für einfache Materialien

$$\sigma_{ij} = \hat{\mathcal{H}}_{ij}(\boldsymbol{C}) = \mathcal{H}_{ij}(\boldsymbol{G}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}_{ij}(\boldsymbol{0}) = 0. \tag{A.31}$$

Die *Taylor*-Reihenentwicklung um $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$ liefert

$$\mathcal{H}_{ij}(\boldsymbol{G}) = 0 + \left.\frac{\partial \mathcal{H}_{ij}(\boldsymbol{G})}{\partial G_{kl}}\right|_{\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}} G_{kl} + \left.\frac{\partial^2 \mathcal{H}_{ij}(\boldsymbol{G})}{2\partial G_{kl}\partial G_{mq}}\right|_{\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}} G_{kl}G_{mq} + O(\|\boldsymbol{G}\|^3).$$

Das heißt, es gilt

$$\sigma_{ij} = O(\|\boldsymbol{G}\|). \tag{A.32}$$

Die Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung liefert das bekannte *Saint-Venant–Kirchhoff*'sche Materialgesetz gemäß Formel (4.31).

Als zweites linearisieren wir die Normal-Komponente des wahren Spannungsvektors $\boldsymbol{t}$. Wir benutzen dabei die Formeln:

$$T^{nn} := t_i n_i = n_j T_{ji} n_i = n_j T_{ji} n_i.$$

Bei kleinen Verschiebungsgradienten $\boldsymbol{H}$, definiert durch (4.12), gilt

$$0 \leq \|\boldsymbol{H}\| \ll 1. \tag{A.33}$$

Jetzt lassen sich Tensorfunktionen von $\boldsymbol{H}$ durch Tensorfunktionen approximieren, die nur noch linear in $\boldsymbol{H}$ sind.

So gilt für den *Green*'schen Verzerrungstensor

$$G_{ij} = (H_{ij} + H_{ji})/2 + O(\|\boldsymbol{H}\|^2).$$

Wir nennen den linearen Anteil von $\boldsymbol{G}$ linearen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$, mit

$$\varepsilon_{ij} := (H_{ij} + H_{ji})/2 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon} := (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T)/2 \tag{A.34}$$

Im Gegensatz zu $\boldsymbol{G}$ verschwindet $\boldsymbol{\varepsilon}$ bei einer reinen Starrkörperrotation nicht.

Die Linearisierung des *St-Venant–Kirchhoff*'schen Materialgesetzes bezüglich $\boldsymbol{H}$ führt auf das *Hooke*'sche Gesetz

$$\sigma_{ij}^L := c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij} := s_{ijkl}\sigma_{kl}^L. \tag{A.35}$$

Wir nennen $\boldsymbol{\sigma}^L$ linearisierte Spannung, denn es folgt für alle drei Spannungsmaße

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L + O(\|\boldsymbol{H}\|^2), \quad S_{ij} = \sigma_{ij}^L + O(\|\boldsymbol{H}\|^2) \quad \text{und} \quad T_{ij} = \sigma_{ij}^L + O(\|\boldsymbol{H}\|^2). \tag{A.36}$$

Die linearisierte Version der Impulsbilanz (4.30) lautet

$$\frac{\partial \sigma_{ik}^L}{\partial X_k} = 0 \tag{A.37}$$

und die der Randbedingung (4.51)

$$\sigma_{13}^L(\boldsymbol{X}) = \sigma_{23}^L(\boldsymbol{X}) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{33}^L(\boldsymbol{X}) = -p^f(\boldsymbol{X}) \leq 0 \quad \forall \quad \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^f. \tag{A.38}$$

A.4 Eine schwache Formulierung des 3D-Randwertproblems

Zur Rechtfertigung der *von Kármán*'schen Plattentheorie durch eine asymptotische Entwicklung des 3D-Problems benötigen wir eine schwache Formulierung des im Kapitel 4 beschriebenen 3D-Randwertproblems. Dieses Problem umfasst die Impulsbilanz (4.30), das Materialgesetz (4.35), die Verschiebungs-Verzerrungsrelation in Form des *Green*'schen Verzerrungstensors (4.14), die Spannungsrandbedingungen (4.62) bis (4.68) und die Verschiebungsrandbedingungen (4.55) und (4.61). Setzen wir nun die Verschiebungs-Verzerrungsrelation (4.14) in das Materialgesetz (4.35) und das ganze in die Impulsbilanz (4.30) ein, erhalten wir drei gekoppelte partielle Differentialgleichungen für die drei unbekannten Verschiebungskomponenten u_i, die die Randbedingungen (4.62) bis (4.68) sowie (4.55) und (4.61) erfüllen sollen. Zur schwachen Formulierung dieses nur von den Verschiebungen abhängigen Differentialgleichungssystems wählen wir drei Testfunktionen

$$v_i : \Omega^R \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad v_3 = 0 \quad \text{auf} \quad \Sigma^f, v_i s_i = 0 \quad \text{in} \quad \boldsymbol{X}^O, \boldsymbol{X}^N, \boldsymbol{X}^W \tag{A.39}$$

mit hinreichenden Differenzierbarkeits- und Integrierbarkeitseigenschaften und multiplizieren die i-te Komponente von $\boldsymbol{v}$ mit der i-ten Gleichung der

Impulsbilanz. Anschließend integrieren wir das ganze über das vom Wafer in der Bezugsplatzierung eingenommene Gebiet:

$$\iiint\limits_{\Omega^R} \frac{\partial S_{ij}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})\big)}{\partial X_j} v_i(\boldsymbol{X}) \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 = 0.$$

Daraus folgt mit dem *Gauß*'schen Satz

$$\iiint\limits_{\Omega^R} S_{ij}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})\big) \frac{\partial v_i(\boldsymbol{X})}{\partial X_j} \,\mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 = \iint\limits_{\partial\Omega^R} S_{ij}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})\big) v_i(\boldsymbol{X}) n_j \,\mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2.$$

Nach Auswertung der Randbedingungen (4.62) bis (4.68) sowie (4.55) und (4.61) verbleibt

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega^R} S_{ij}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})\big) \frac{\partial v_i(\boldsymbol{X})}{\partial X_j} \,\mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 \\ &\qquad = \iint\limits_{\omega} F^-_{i3}(X_1, X_2) p(X_1, X_2) v^-_i(X_1, X_2) \,\mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\text{mit} \quad F^-_{i3}(X_1, X_2) := \delta_{i3} + \left.\frac{\partial u_i(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3}\right|_{X_3=-h/2}$$

$$\text{und} \quad v^-_i(X_1, X_2) := v_i(X_1, X_2, -h/2).$$

Die drei Funktionen u_i sind dann die schwache Lösung des Randwertproblems, wenn die Gleichung (A.40) für alle v_i, die der Bedingung (A.39) genügen, erfüllt ist, und u_i den Verschiebungsrandbedingungen (4.55) und (4.61) genügt.

Bemerkung

> Es ist naheliegend von dieser schwachen Formulierung gleich auf eine 3D-Finite-Element-Approximation überzugehen. Numerische Untersuchungen von *Vidrascu* in [108] zeigten jedoch, dass 3D-FE-Lösungen für dünne Platten schlecht konvergieren. Je dünner die Platte ist, desto schlechter ist das Konvergenzverhalten. Bei *Vidrascu* werden 3D-Lösungen nach der vollkommen linearen Theorie mit Lösungen nach der *Kirchhoff*'schen Plattentheorie verglichen. In den Arbeiten von *Babuška* und *Suri* [7] sowie von *Chenais* und *Paumier* [20] wird ein solches Verhalten durch das so genannte Locking-Phänomen erklärt, dass bei

> FE-Ansätzen niedriger Ordnung auftritt. Im Falle der Plattenbiegung locken Elemente, die 2. Ableitungen nicht mehr korrekt erfassen können, da man sich für immer dünner werdende Platten immer mehr dem Grenzfall nähert, in dem eine der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung des 3D-Problems in eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung übergeht. Das Gleiche tritt bei schubweichen Plattenmodellen auf, die im Grenzfall der unendlich dünnen Platte ebenfalls auf das schubstarre Modell übergehen. Den Grenzwertcharakter der Plattengleichungen zum ursprünglichen 3D-Problem zeigen wir mit Hilfe einer asymptotischen Entwicklung im Abschnitt 5.4.

Die entsprechende schwache Formulierung für das linearisierte Problem (A.37), (A.38) und (A.35) lautet:

$$\iiint\limits_{\Omega^R} \sigma_{ij}^L \left(\boldsymbol{u}^L(\boldsymbol{X})\right) \frac{\partial v_i(\boldsymbol{X})}{\partial X_j} \, \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 = \iint\limits_{\omega} p(X_1, X_2) \; v_3^-(X_1, X_2) \, \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2. \quad \text{(A.41)}$$

Anhang B

Ergänzende Ausführungen zur 2D-Theorie für dünne Platten

B.1 Schwache Formulierungen

B.1.1 Alternative schwache Formulierungen der *von Kármán*'schen Plattentheorie

Durch Einsetzen der Materialgleichungen (5.41) und (5.42) in die Gleichgewichtsbedingungen (5.32) und (5.36) erhalten wir ein System von drei partiellen Differentialgleichungen, die nur noch von den Plattenmittelflächenverschiebungen U_α und W abhängen. Testen wir diese Gleichungen mit beliebigen „Testverschiebungen“ oder „virtuellen Verrückungen“, die die Verschiebungsrandbedingungen erfüllen, erhalten wir eine schwache Formulierung des Problems. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, müssen wir für U_α in ω nicht mehr, wie in der starken Formulierung, die zweimalige Differenzierbarkeit fordern, sondern es genügt die abgeschwächte Forderung, nach einmaliger Differenzierbarkeit. In gleicher Weise muss für W in $\omega \setminus \Theta$ nicht mehr die viermalige, sondern nur noch die zweimalige Differenzierbarkeit gefordert werden. In jedem Fall sind die gesuchten Lösungen Verschiebungen. Die Lösungsmethode ist in diesem Sinne eine reine Verschiebungsmethode. Da es sich bei Finite-Element-Formulierungen um Approximationen von schwachen Formulierungen handelt, werden Verfahren, für die die Verschiebungen mit FE-Ansätzen approximiert werden, ebenfalls Verschiebungsmethoden genannt.

Es ist auch möglich, andere Sätze von Unbekannten einzuführen. Die unterschiedlichen Lösungszugänge führen letztlich zu anderen Differentialgleichungen und anderen zugehörigen schwachen Formulierungen.

Von Kármán betrachtete ursprünglich nur isotrope Platten. Dadurch war es ihm möglich, die Membrankräfte (5.29) als zweite Ableitungen einer *Airy*'schen Spannungsfunktion darzustellen. Er benötigte auf diese Weise nur zwei Unbekannte, die Durchbiegung W und die *Airy*'sche Spannungsfunktion. In der Literatur werden die beiden Differentialgleichungen, die nur diese zwei Unbekannten enthalten, als die „*von Kármán*'schen Gleichungen" bezeichnet. Derartige Funktionen lassen sich für die hier betrachteten Materialien mit kubischer Symmetrie nicht finden.

Zu einer anderen alternativen Formulierung der *von Kármán*'schen Plattentheorie, die auch im kubischen Fall anwendbar ist, gelangt man durch die so genannte gemischte Formulierung. Diese Formulierung erhält man, wenn in der schwachen Formulierung nicht nur die Verschiebungen, sondern auch die Membrankräfte und die Biegemomente als Unbekannte eingeführt werden. In dieser Version müssen nicht nur die Membrangleichungen (5.32) und Biegegleichung (5.36) geeignet getestet werden, sondern auch die zweidimensionalen Materialgesetze (5.32) und (5.36). Die Testfunktionen werden oft auch „virtuelle Kräfte und Momente" genannt. Um eventuell auftretende Schwierigkeiten bei dem dadurch entstehenden Sattelpunktproblem zu umgehen, wird hier der reinen Verschiebungsmethode der Vorzug gegeben.

B.1.2 Die schwache Formulierung des *von Kármán*'schen Problems in Verschiebungsgrößen

Wir führen als nächstes die hinreichend glatten Testfunktionen $V_i(X_1, X_2)$ ein. Wegen der Verschiebungsrandbedingungen (4.61) muss für die Funktionen V_α gefordert werden, dass sie in den horizontalen Fesselpunkten mit den Koordinaten $(0, R_A), (R_A, 0)$ und $(-R_A, 0)$ verschwinden:

$$V_\alpha s^R_\alpha(X_1, X_2) = 0, \quad \text{falls} \quad (X_1, X_2) = (0, R_A), (X_1, X_2) = (R_A, 0) \quad \text{oder} \\ (X_1, X_2) = (-R_A, 0). \tag{B.1}$$

Wegen der Verschiebungsrandbedingungen (5.52) muss V_3 auf der Stützlinie verschwinden, d. h. es gilt

$$V_3 = 0 \quad \text{auf} \quad \Theta. \tag{B.2}$$

Werden die Membrangleichungen (5.32) mit V_α multipliziert und über die Plattenmittelfläche ω integriert, ergibt sich

$$\iint\limits_\omega \frac{\partial N_{\alpha\beta}(X_1, X_2)}{\partial X_\beta} V_\alpha(X_1, X_2)\ \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 = 0. \tag{B.3}$$

Nach partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint\limits_\omega N_{\alpha\beta} \frac{\partial V_\alpha}{\partial X_\beta}\ \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 &= \int\limits_{\partial\omega} N_{\alpha\beta}\ V_\alpha\ n^R_\beta\ \mathrm{d}s \\ &= \int\limits_{\partial\omega} N^n_\alpha\ V_\alpha\ ds = \int\limits_{\partial\omega} (N^{nn}\ V^n + N^{sn}\ V^s)\ \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

wobei wir hier die Argumente weggelassen haben. Unter Beachtung der Randbedingungen (5.45) und (5.46) für die Normal- und Tangentialkomponenten der Membrankraft auf $\partial\omega$, sowie von (B.1) folgt die Beziehung

$$\iint\limits_{\omega} N_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \frac{\partial V_\alpha(X_1, X_2)}{\partial X_\beta} \, \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 = 0. \tag{B.4}$$

Setzen wir in diese Gleichung die Materialgleichung (5.41) ein, treten in der resultierenden Gleichung nur erste Ableitungen der Verschiebungsfunktionen U_α und W auf.

Als nächstes multiplizieren wir die Gleichung (5.36) mit V_3 und integrieren sie über ω. Dann ergibt sich

$$\iint\limits_{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial X_\alpha} \left(Q_\alpha(X_1, X_2) + N_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \frac{\partial W(X_1, X_2)}{\partial X_\beta} \right) + p(X_1, X_2) \right. \\ \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial X}} \right) V_3(X_1, X_2) \, \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 = 0. \tag{B.5}$$

Nach partieller Integration dieser Gleichung erhalten wir mit (5.35)

$$\iint\limits_{\omega} \left(\frac{\partial M_{\alpha\beta}(X_1, X_2)}{\partial X_\beta} + N_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \frac{\partial W(X_1, X_2)}{\partial X_\beta} \right) \frac{\partial V_3(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha} \, \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \\ = \int\limits_{\partial\omega} \left(Q_\alpha(s, n) + N_{\alpha\beta}(s, n) \frac{\partial W(s, n)}{\partial X_\beta} \right) V_3(s, n) \; n^R_\alpha \, \mathrm{d}s \\ + \iint\limits_{\omega} p(X_1, X_2) \; V_3(X_1, X_2) \, \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2.$$

Nach nochmaliger partieller Integration wird daraus

$$\iint\limits_{\omega} \left(N_{\alpha\beta} \frac{\partial W}{\partial X_\beta} \frac{\partial V_3}{\partial X_\alpha} - M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 V_3}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \right) \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \\ = \int\limits_{\partial\omega} \left(\left(Q_\alpha + N_{\alpha\beta} \frac{\partial W}{\partial X_\beta} \right) V_3 - M_{\alpha\beta} \frac{\partial V_3}{\partial X_\beta} \right) n^R_\alpha \, \mathrm{d}s + \int\limits_{\omega} p \; V_3 \, \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \\ = \int\limits_{\partial\omega} \left(\left(Q^n + N^n_\beta \frac{\partial W}{\partial X_\beta} \right) V_3 - M^n_\beta \frac{\partial V_3}{\partial X_\beta} \right) \mathrm{d}s + \int\limits_{\omega} p \; V_3 \, \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \\ = \int\limits_{\partial\omega} \left(\left(Q^n + N^n_\beta \frac{\partial W}{\partial X_\beta} \right) V_3 - M^{ns} \frac{\partial V_3}{\partial s} - M^{nn} \frac{\partial V_3}{\partial n} \right) \mathrm{d}s + \int\limits_{\omega} p \; V_3 \, \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2,$$

wobei zur besseren Übersichtlichkeit die Argumente weggelassen wurden. Die ersten Terme der rechten Seite formen wir weiter um, so dass

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial\omega} \left(\left(Q^n + N^n_\beta \frac{\partial W}{\partial X_\beta} \right) V_3 - M^{ns} \frac{\partial V_3}{\partial s} - M^{nn} \frac{\partial V_3}{\partial n} \right) \mathrm{d}s \\
&\quad = \int\limits_{\partial\omega} \left(\left(Q^n + N^n_\beta \frac{\partial W}{\partial X_\beta} + \frac{\partial M^{ns}}{\partial s} \right) V_3 - \frac{\partial (M^{ns} V_3)}{\partial s} - M^{nn} \frac{\partial V_3}{\partial n} \right) \mathrm{d}s \\
&\qquad = \int\limits_{\partial\omega} \left(\left(Q^n + N^{nn} \frac{\partial W}{\partial n} + N^{ns} \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial M^{ns}}{\partial s} \right) V_3 - M^{nn} \frac{\partial V_3}{\partial n} \right) \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

folgt.

Im folgenden müssen wir unterscheiden, ob wir tatsächlich das Plattenproblem für ein Gebiet mit Kreisrand lösen wollen, oder das Ersatzproblem lösen, das sich ergibt, wenn wir die Kreisfläche durch ein geradlinig berandetes Polygon mit n Ecken und Kanten approximieren. Letzteres Problem entsteht dadurch, wenn wir zur numerischen Lösung mittels der FEM, wie im Kapitel 7, zur Approximation von ω nur geradlinige Dreieckselemente benutzen.

B.1.3 Echter Kreisrand

Das Integral $\int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial (M^{ns} V_3)}{\partial s} \mathrm{d}s$ verschwindet bei glatten geschlossen Randkurven, wie hier im Fall der Kreisplatte. Die Größe $Q^n + N^{nn} \frac{\partial W}{\partial n} + N^{ns} \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial M^{ns}}{\partial s}$ wird Ersatzquerkraft genannt. Sie ist im hier betrachten Fall wegen der spannungsfreien Mantelfläche Null. Damit verbleibt von Gleichung (B.5)

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\omega} \Bigg(& N_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \frac{\partial W(X_1, X_2)}{\partial X_\beta} \frac{\partial V_3(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha} \\
& - M_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \frac{\partial^2 V_3(X_1, X_2)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \Bigg) \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \\
& = \int\limits_{\omega} p(X_1, X_2) V_3(X_1, X_2) \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2. \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (B.4) und (B.6) bilden zusammen mit den Verschiebungsrandbedingungen (4.61) und (5.52) ein gekoppeltes System, für das die Funktionen U_α und W genau dann eine schwache Lösung des ursprünglichen Randwertproblems darstellen, wenn es für alle zulässigen Testfunktionen V_i identisch erfüllt ist. Näherungslösungen durch Finite-Element-Diskretisierung sind letztlich dadurch charakterisiert, dass die schwachen Formulierungen nicht mehr für alle zulässigen Testfunktionen aus einem unendlich dimensionalen Raum identisch erfüllt sein sollen, sondern nur noch für eine endliche geeignet gewählte Teilmenge dieses Raumes.

B.1.4 Kreisapproximation durch ein Polygon

Der Rand $\partial\omega$ sein ein N-Eck. Wir bezeichnen das Innere der i-ten Kante für $1 \leq I \leq N$ mit $\gamma_{(I)}$ und die Randpunkte von $\gamma_{(I)}$ mit $\partial\gamma_{(I)}$ und $\partial\gamma_{(I+1)}$, so dass $\partial\gamma_{(N+I)} = \partial\gamma_{(I)}$ und $\gamma_{(N+I)} = \gamma_{(I)}$ gilt, sowie

$$\partial\omega = \bigcup_{I=1}^{N} \bar{\gamma}_{(I)} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}_{(I-1)} \cap \bar{\gamma}_{(I)} = \partial\gamma_{(I)}. \tag{B.7}$$

Das Integral $\int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial(M^{ns}V_3)}{\partial s}\mathrm{d}s$ verschwindet hier nicht, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial(M^{ns}(s)V_3(s))}{\partial s}\mathrm{d}s \;&=\; \sum_{I=1}^{N} \int\limits_{\gamma_{(I)}} \frac{\partial(M^{ns}(s_{(I)})V_3(s_{(I)}))}{\partial s_{(I)}}\mathrm{d}s_{(I)} \\
&= \sum_{I=1}^{N} \int\limits_{\gamma_{(I)}} \frac{\partial(M^{ns}(s_{(I)})V_3(s_{(I)}))}{\partial s_{(I)}}\mathrm{d}s_{(I)} \\
&= \sum_{I=1}^{N} \left(M^{ns}(s_{(I)})V_3(s_{(I)})\Big|_{\partial\gamma_{(I+1)}} - M^{ns}(s_{(I)})V_3(s_{(I)})\Big|_{\partial\gamma_{(I)}} \right) \\
&:= \sum_{I=1}^{N} \Big(M^{ns}(s^+_{(I)})V_3(s^+_{(I)}) - M^{ns}(s^-_{(I)})V_3(s^-_{(I)}) \Big) \\
&= \sum_{I=1}^{N} \Big(M^{ns}(s^+_{(I-1)}) - M^{ns}(s^-_{(I)}) \Big) \; V_3(s)\big|_{\partial\gamma_{(I)}} \\
&:= \sum_{I=1}^{N} K(s)\big|_{\partial\gamma_{(I)}} \; V_3(s)\big|_{\partial\gamma_{(I)}} .
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Die Größe K wird Eckkraft genannt. Sind die Plattenränder im ursprünglichen 3D-Problem spannungsfrei, muss demnach im resultierenden 2D-Problem in jeder Ecke $K = 0$ gelten.

B.2 Die *Kirchhoff*'sche Plattentheorie

Die *Kirchhoff*'sche Plattentheorie kann unter Verwendung der im Abschnitt 5.3.1 angegebenen a priori Annahmen in zweierlei Weisen hergeleitet werden.

Erste Möglichkeit:

> Linearisierung des nichtlinearen 3D-Problems um $\boldsymbol{H} = \mathbf{0}$, Auswertung der Annahmen (5.7), (5.8), (5.9), (5.15), (5.16) und Übergang zum 2D-Problem durch Integration über Plattendicke gemäß Abschnitt 5.3.3.

Zweite Möglichkeit:

> Übergang vom nichtlinearen 3D-Problem zum nichtlinearen 2D-Problem entsprechend Abschnitt 5.3, Linearisierung um $\frac{\partial W}{\partial X_\alpha} = 0$.

Der linearisierte 2D-Verzerrungstensor lautet:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial X_\alpha} - 2X_3 \frac{\partial W}{\partial X_\alpha X_\beta}\right). \tag{B.9}$$

Das Materialgesetz lautet

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \frac{2\mu + \mu'}{2\mu + \mu' + \lambda} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} + \mu' \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\underline{\beta\beta}} \tag{B.10}$$

und die Impulsbilanz vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} = 0. \tag{B.11}$$

Es resultieren die *Kirchhoff*'sche Plattengleichungen

$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}\Big(U_1(X_1, X_2), U_2(X_1, X_2)\Big)}{\partial X_\beta} = 0 \quad \forall\ (X_1, X_2) \in \omega \quad \text{und} \tag{B.12}$$

$$\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}\Big(W(X_1, X_2)\Big)}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = -p(X_1, X_2) \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega \setminus \Theta^f, \tag{B.13}$$

wobei (B.12) und (B.13) entkoppelt sind. Wegen der horizontalen Starrkörperfesseln folgt für den Biegetest des Wafers sofort $U_\alpha = 0$.

B.3 Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften

B.3.1 Kubische Symmetrie in rotationssymmetrischen Bauteilen

Der in Abbildung 4.2 auf Seite 38 dargestellte Wafer hat in seiner Mittelfläche insgesamt vier Symmetrielinien. Dies resultiert einerseits aus der rotionssymmetrischen Geometrie und der konzentrischen Belastung des Wafers und andererseits aus der Orientierung des kubisch symmetrischen Kristallits. Wir erinnern, die Lastrichtung liegt parallel zur [100]-Richtung des Wafers. Da der Wafer auf Grund dieser Symmetrien in tangentialer Richtung mit einer Periode von $\pi/2$ das gleiche Verformungsverhalten aufweist genügt es, bei einer 2D-Rechnung statt des Vollkreises die Berechnungen auf einen Achtelkreis zu beschränken. Dies ist insbesondere für eine Finite-Element-Rechnung in Hinblick auf Rechenzeit und Speicherplatz von Vorteil. Eine ausführliche Erläuterung dieser Problematik kann man unter anderem bei *Gasch* und *Knothe* in [49] und [65] finden.

Das betrachtete Gebiet der Wafermittelfläche ω_8^R ist wie folgt definiert

$$\omega_8^R = \Big\{(X_1, X_2) \mid X_1 > 0,\ X_2 > 0,\ X_1^2 + X_2^2 < R_A^2,\ X_2 < X_1\Big\}.$$

Die Randbedingungen für dieses Gebiet lauten bei Verwendung der *von Kármán*'schen Theorie :

- Außenrand $X_1^2 + X_2^2 = R_A^2$:

$$N^{nn} = 0, \quad N^{ns} = 0, \quad M^{nn} = 0 \quad \text{und} \quad Q^{*n} = 0.$$

- Stützrand $X_1^2 + X_2^2 = R_I^2$:

$$W = 0.$$

- [100]-Symmetrierand $X_2 = 0$:

$$N_{21} = 0, \quad U_2 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial X_2} = 0 \quad \text{und} \quad Q_2^* = 0.$$

- [110]-Symmetrierand $X_1 = X_2$:

$$N_{11} = N_{22}, \quad U_1 = U_2, \quad \frac{\partial W}{\partial X_1} = \frac{\partial W}{\partial X_2} \quad \text{und} \quad Q^{*n} = 0.$$

B.3.2 Isotropie – der vollständig rotationssymmetrische Fall

Für den Fall das isotropes Materialverhalten vorliegt, ist jede durch den Mittelpunkt gehende Linie der Wafermittelfläche eine Symmetrielinie, so dass jetzt der vollständig rotationssymmetrische Fall vorliegt.

Bei einer 2D-Rechnung braucht vom Vollkreis nur eine einzige Linie berücksichtigt werden, z.B. $0 \leq X_1 \leq R_A$. Zweckmäßiger Weise sollten in diesem Fall sämtliche Gleichungen in Zylinderkoordinaten formuliert werden. Alle Größen sind dann nur vom Radius r abhängig. Entsprechende

Formulierungen für die *von Kármán*'schen Theorie werden z.B. von *Raack* in [89] angegeben. Die Gleichungen lauten[1]:

$$\frac{\mathrm{d}N_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{N_{rr} - N_{\varphi\varphi}}{r} = 0$$

und

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_{rr}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}M_{rr}}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r}\frac{M_{\varphi\varphi}}{r} + N_{rr}\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}r^2} + \frac{N_{\varphi\varphi}}{r}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} = -p,$$

mit

$$N_{rr} = \frac{hE}{1-\nu^2}\left(\frac{\mathrm{d}U_r}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{U_r}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}\right)^2\right) \quad \text{und}$$

$$N_{\varphi\varphi} = \frac{hE}{1-\nu^2}\left(\frac{U_r}{r} + \nu\frac{\mathrm{d}U_r}{\mathrm{d}r} + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}\right)^2\right),$$

$$M_{rr} = \frac{hE}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}W}{dr}\right), \quad M_{r\varphi} = 0 \quad \text{und}$$

$$M_{\varphi\varphi} = \frac{hE}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}r^2}\right).$$

Die Randbedingungen lauten:

$$U_r(0) = 0, \quad \frac{dW}{dr}(0) = 0 \quad \text{und} \quad Q_r(0) = 0$$

sowie

$$N_{rr}(R_A) = 0, \quad M_{rr}(R_A) = 0 \quad \text{und} \quad Q_r(R_A) = 0.$$

Außerdem gilt

$$W(R_I) = 0.$$

Wegen

$$X_1 = r\cos(\varphi) \quad \text{und} \quad X_2 = r\sin(\varphi), \tag{B.14}$$

gilt auch

$$N_{11} = N_{rr}\cos^2(\varphi) + N_{\varphi\varphi}\sin^2(\varphi), \quad N_{22} = N_{rr}\sin^2(\varphi) + N_{\varphi\varphi}\cos^2(\varphi) \quad \text{und} \tag{B.15}$$

$$N_{12} = (N_{rr} - N_{\varphi\varphi})\sin(\varphi)\cos(\varphi) \quad \text{sowie} \tag{B.16}$$

$$M_{11} = M_{rr}\cos^2(\varphi) + M_{\varphi\varphi}\sin^2(\varphi), \quad M_{22} = M_{rr}\sin^2(\varphi) + M_{\varphi\varphi}\cos^2(\varphi) \quad \text{und} \tag{B.17}$$

$$M_{12} = (M_{rr} - M_{\varphi\varphi})\sin(\varphi)\cos(\varphi). \tag{B.18}$$

---

[1] Da wir hier nicht das Problem der rotationssymmetrischen Torsion einer Kreisringscheibe mit festgehaltenem Innenring betrachten, gilt hier $U_\varphi = 0$ und $N_{r\varphi} = 0$

Spezielle Lösungen des linearisierten vollständig rotationssymmetrischen Falls

Die Lösungen des linearisierten vollständig rotationssymmetrischen Biegetests unter der Einzellast f lautet:

$$W^L(r) = \frac{3f(1-\nu^2)R_I^2}{4\pi\ E\ h^3(1+\kappa)^2}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu} + 2\kappa(2+\kappa)\right) \tag{B.19}$$

für $r = 0$ und $R_A = R_I(1+\kappa)$,

$$W^L(r) = \frac{3f(1-\nu^2)R_I^2}{4\pi\ E\ h^3} \left(\left(2 + \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{(1+\kappa)^2}\right)\left(1 - \left(\frac{r}{R_I}\right)^2\right) + 2\left(\frac{r}{R_I}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R_I}\right)\right)$$

für $0 < r \leq R_I$ und $R_A = R_I(1+\kappa)$ und

$$W^L(r) = \frac{3f(1-\nu^2)R_I^2}{4\pi\ E\ h^3}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{(1+\kappa)^2}\left(1 - \left(\frac{r}{R_I}\right)^2\right) - 2\ln\left(\frac{r}{R_I}\right)\right)$$

für $0 < r \leq R_I$.

B.3.3 Isotrope Mittelung für die 2D-Plattentheorie

Dünne Platten genügen einem 2D-Materialgesetz, dass dem des ebenen Spannungszustandes entspricht. Die Spannungen in einer 2D-Plattentheorie σ_{i3}^P sind nicht mehr über ein Materialgesetz durch die Verzerrungen festgelegt. Um ein 2D-Materialgesetz isotrop zu mitteln, gibt es neben den im Abschnitt A.2.3 beschriebenen Methoden auch die Möglichkeit, direkt das 2D-Materialgesetz zu mitteln. Um dies zu erreichen, geben wir die 2D-Steifigkeitstensoren in der 2D-Projektordarstellung an. Die benötigten Formeln haben die gleiche Gestalt wie die Formeln (A.15) bis (A.22) mit dem Unterschied, dass die unteren lateinischen Indizes durch griechische zu ersetzen sind und der erste Projektor die Darstellung

$$P^{I(1)}_{\alpha\beta\gamma\sigma} = P^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\sigma} := \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\sigma}/2 \tag{B.20}$$

hat.

Auch die Formeln (A.25) bis (A.28) können wir auf diese Weise komplett übernehmen. Zur Unterscheidung gegenüber den 3D-Größen kennzeichnen wir die 2D-Größen wieder mit dem zusätzlichen Index P. Die Gewichtsmatrix lautet jetzt

$$\boldsymbol{W}^P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{B.21}$$

	$\langle 100\rangle$	$\langle 110\rangle$	*Voigt*	*Eisenberg*	*Reuss*	*Hill*
μ in GPa	59,5	32,6	46,05	44,04	42,12	44,09
E in GPa	85,5	121,52	101,18	98,11	95,18	98,18
ν	0,3113	0,0212	0,3870	0,3830	0,3790	0,3831
k in GPa	94,68	121,58	119,0	114,98	111,14	115,07

Tabelle B.1: Isotrope 2D-Näherung nach *Voigt*, *Eisenberg*, *Reuss* und *Hill* für GaAs, berechnet aus den *Voigt*'schen Konstanten gemäß (3.1).

Damit erhalten wir

$$\gamma_1^{PVI} = \gamma_1^{PAI} = \gamma_1^{PRI} = \gamma_1^{PHI} = \gamma_1^P \tag{B.22}$$

und

$$\gamma_2^{PVI} = (\gamma_2^P + \gamma_3^P)/2, \quad \gamma_2^{PAI} = \sqrt{\gamma_2^P \gamma_3^P}, \quad \gamma_2^{PRI} = \frac{2\gamma_2^P \gamma_3^P}{\gamma_2^P + \gamma_3^P}. \tag{B.23}$$

Außerdem gelten die Zusammenhänge

$$\gamma_1^P = \frac{3\gamma_1\gamma_2}{2\gamma_2 + \gamma_1}, \quad \gamma_2^P = \gamma_2, \quad \text{und} \quad \gamma_3^P = \gamma_3 \tag{B.24}$$

sowie

$$c_{11}^{P*I} = \gamma_1^{P*I}/2 + \gamma_2^{P*I} \quad \text{und} \quad c_{12}^{P*I} = \gamma_2^{P*I}/2, \tag{B.25}$$

wobei das *-Symbol ein Platzhalter für die jeweilige Mittelungsmethode ist. Weiter folgt mit $k^{P*I} = c_{11}^{P*I}$

$$\nu^{P*I} = \frac{c_{12}^{P*I}}{c_{12}^{P*I}}, \quad \mu^{P*I} = (c_{11}^{P*I} - c_{12}^{P*I})/2 \quad \text{und} \quad E^{P*I} = \frac{(c_{11}^{P*I})^2 - (c_{12}^{P*I})^2}{c_{11}^{P*I}}. \tag{B.26}$$

Damit können wir analog zur Tabelle A.4 für die verschiedenen Mittelungsformeln die isotropisierten elastischen Konstanten angeben:

Wir erkennen beim Vergleich mit Tabelle A.4, dass die Werte für die verschiedenen Mittelungsformeln für die 2D-Näherung dichter bei einander liegen, als die Werte für die 3D-Näherung. Qualitativ unterscheiden sich die Werte noch dadurch, dass in der 3D-Näherung die Werte für k zum Teil außerhalb des vom Einkristall aufgespannten Bereiches liegen und in der 2D-Näherung die Werte für ν außerhalb des vom Einkristall aufgespannten Bereiches liegen.

Anhang C

Funktionenräume und spezielle Funktionen

C.1 Raumdefinitionen

Für die Herleitung der Finite-Element-Methode benötigen wir noch folgende Definitionen:

Durch $\mathcal{L}_2(\omega)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $W : \omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\|W\|_2 := \sqrt{\int_\omega |W(X_1, X_2)|^2 \, \mathrm{d}X_1 \, \mathrm{d}X_2} < \infty \tag{C.1}$$

Außerdem definieren wir

$$\mathcal{H}^1(\omega) := \{W \in \mathcal{L}_2(\omega); \frac{\partial W}{\partial X_\alpha} \in \mathcal{L}_2(\omega)\} \tag{C.2}$$

und

$$\mathcal{H}^2(\omega) := \{W \in \mathcal{H}^1(\omega); \frac{\partial^2 W}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \in \mathcal{L}_2(\omega)\}. \tag{C.3}$$

Wir definieren außerdem: $\mathcal{C}^0(\omega)$ als Menge aller Funktionen, die in ω stetig sind; $\mathcal{C}^0(\bar{\omega})$ als Menge aller Funktionen aus $\mathcal{C}^0(\omega)$, die auf dem Rand von ω stetig fortsetzbar sind; $\mathcal{C}^1(\omega)$ als Menge aller Funktionen aus $\mathcal{C}^0(\omega)$, deren partielle Ableitungen jeweils ebenfalls aus $\mathcal{C}^0(\omega)$ sind; $\mathcal{C}^1(\bar{\omega})$ als Menge aller Funktionen aus $\mathcal{C}^1(\omega)$, deren partielle Ableitungen jeweils aus $\mathcal{C}^0(\bar{\omega})$ sind.

C.2 Einige Eigenschaften von *Bessel*funktionen

Im Kapitel 8 werden folgenden Formeln mit *Bessel*funktionen 1. Art verwendet:

$$\frac{2\ n\ \mathrm{J}_n(x)}{x} = \mathrm{J}_{n-1}(x) + \mathrm{J}_{n+1}(x), \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial \mathrm{J}_n(x)}{\partial x} = \big(\mathrm{J}_{n-1}(x) - \mathrm{J}_{n+1}(x)\big)/2. \tag{C.5}$$

Sind k_{ni} die Nullstellen von $J_n(x)$ mit $n > -1$, dann gilt

$$\frac{2}{\left(\left.\frac{d\mathrm{J}_n(y)}{dy}\right|_{y=k_{ni}}\right)^2} \int\limits_0^1 x\ \mathrm{J}_n(k_{ni}\ x)\mathrm{J}_n(k_{nj}\ x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j \\ 1 & \text{für} \quad i = j. \end{cases} \tag{C.6}$$

Speziell für $n = 0$ erhalten wir

$$\frac{2}{\big(\mathrm{J}_1(k_{0i})\big)^2} \int\limits_0^1 x\ \mathrm{J}_0(k_{0i}\ x)\mathrm{J}_0(k_{0j}\ x)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j \\ 1 & \text{für} \quad i = j. \end{cases} \tag{C.7}$$

Außerdem gilt

$$\int\limits_0^1 x\mathrm{J}_0^2(k_{0i}x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{J}_1^2(k_{0i})}{2}. \tag{C.8}$$

Literaturverzeichnis

[1] K. S. Alexandrow und L. A. Eisenberg (К. С. Александров и Л. А. Айзенберг), Dokladij Akademii Nauk SSSR **167** (1966), no. 5, 1028–1031, englische Übersetzung: K. S. Aleksandrov and L. A. Aizenberg, *Method of calculating the physical constants of polycrystalline materials*, Soviet Physics-Doklady **11** (1966), no. 4, 323-325.

[2] J.H. Argyris, *Energy theorems and structural analysis, Part I: General theory*, Aircraft Engineering **26** (1954), 347–356, 383–387, 394 **26** (1955) 42–58, 80–94, 125–134, 145–158, Nachdruck: 1960 in Butterworths Scientific Publications.

[3] J.H. Argyris, I. Fried and D. W. Scharf, *The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method*, The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society **72** (1968), 701–709.

[4] I. Babuška, *The theory of small changes in the domain of existence in the theory of partial differential equations and its applications*, Differential Equation and Their Applications, Academic Press, New York, 1963, (Proc. Conference, Prag 1962), pp. 12–26.

[5] I. Babuška and L. Li, *Hierarchic modeling of plates*, Computers & Structures **40** (1991), no. 2, 419–430.

[6] I. Babuška and J. Pitkäranta, *The plate paradox for hard and soft simple support*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), no. 3, 551–576.

[7] I. Babuška and M. Suri, *On locking and robustness in the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992), no. 5, 1261–1293.

[8] G. P. Bazely, Y. K. Cheung, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, *Triangular elements in plate bending — conforming and nonconforming solutions*, Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics (Dayton, OH), Air Force Inst. of Techn. Wright Patterson A. F. Base, Oct. 1965, pp. 547–576.

[9] K. Bell, *A refined triangular plate bending element*, Internat. J. Methods Engrg. **1** (1969), 101–122.

[10] F. Bergner, U. Bergmann, R. Hammer, M. Jurisch und M. Schaper, *Mikro- und Ultramikrohärteprüfung an GaAs-Einkristallen*, Materialprüfung **43** (2001), no. 4, 117–122.

[11] A. Bertram, *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989.

[12] T. Böhlke, *Crystallographic texture evolution and elastic anisotropie. Simulation, modeling, and applications*, Shaker, Aachen, 2001, Dissertation.

[13] J. Boobnoff (И. Г. Бубнов), Inst. of. Naval. Arch. Trans. **44** (1902), 15.

[14] J. C. Brice, *Properties of gallium arsenide*, 2. ed., Serie no. 2, ch. Physical and Thermal Properties, pp. 1–24, EMIS Datareviews, London, 1990.

[15] G. H. Bryan, Proceedings London Math. Soc. **22** (1891), 54.

[16] I. G. Bubnow (И. Г. Бубнов), Напряжения в обшивке судов от дабления воды) *Spannungen in der Schiffsbeplankung infolge von Wasserdruck*), (1902), St. Petersburg, Nachdruck 1953 in [19].

[17] ———, Отзiв о сочиненях профессора Тимосченко, удостоенных премии им. Журавского (*Renzension der mit dem Schurawski-Preis ausgezeichneten Abhandlungen von Professor Timoschenko*), Sammlung des Instituts für Verkehrswesen **18** (1913), St. Petersburg, Nachdruck 1953 in [19].

[18] ———, Строительная механика кораблиа. ч. 2 (*Baumechanik des Schiffes. Teil 2*), (1914), St. Petersburg, Nachdruck 1953 in [19].

[19] ———, Труды по теории пластинки (*Arbeiten zur Plattentheorie*), Gostechisdat, Moskau, 1953.

[20] D. Chenais and J.-C. Paumier, *On the locking phenomenon for a class of elliptic problems*, Numerische Mathematik **67** (1994), 427–440.

[21] P. G. Ciarlet, *A justification of the von Kármán equations*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **73** (1980), 349–389.

[22] ———, *Mathematical elasticity,* vol. I, *Three-dimensional Elasticity*, Studies in Mathematics and its Applications, no. 20, Elsevier, Amsterdam, 1988, unveränderter Nachdruck: 1993.

[23] ______, *Basic error estimates for elliptic problems*, Handbook of Numerical Analysis (P. G. Ciarlet and J.L. Lions, eds.), Finite Element Methods (Part 1), vol. II, Elsevier, North-Holland, 1991, pp. 17–351.

[24] ______, *Mathematical elasticity,* vol. II, *Theory of Plates*, Studies in Mathematics and its Applications, no. 27, Elsevier, Amsterdam, 1997.

[25] ______, *Mathematical elasticity,* vol. III, *Theory of Shells*, Studies in Mathematics and its Applications, no. 29, Elsevier, Amsterdam, 2000.

[26] P. G. Ciarlet and P. Destuynder, *A justification of a nonlinear model in plate theory*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **17/18** (1979), 227–258.

[27] A. Clebsch, *Theorie der Elasticität fester Körper*, Teubner, Leipzig, 1862, ins französische übersetzt von Saint Venant und A. Flamant (1897), mit zusätzlichen Anmerkungen von Saint Venant [28].

[28] ______, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, Paris, 1883, französische Übersetzung von [27] durch Saint Venant und A. Flamant, mit zusätzlichen Anmerkungen von Saint Venant.

[29] R.W. Clough, *The finite element method in plane stress analysis*, Proceedings 2nd ASCE Conference on Electronic Computation (Pittsburgh, PA.), 1960.

[30] R. Courant, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration*, Bulletin of the American Math Society **49** (1943), 1–61.

[31] S. Cowin, *Properties of the anisotropic elastic tensor*, Q. J. Mech. appl. Math. **42** (1989), 249–266.

[32] J. L. Davet, *Justification de modèles de plaques non linéaires pour des lois de comportement générales*, Modélisation Math. Anal. Numér. **20** (1986), 225–249.

[33] P. Destuynder and M. Salaun, *Mathematical analysis of thin plate models*, Springer, Paris, 1996.

[34] W. Dreyer and F. Duderstadt, *Spannungsanalyse dünner quadratischer GaAs-Platten im modifizierten Doppelring-Biegeversuch*, Tech. report, WIAS, Berlin, Mohrenstr. 39, 2002, unveröffentlichter Abschlussbericht für die Firma *Freiberger Compound Materials.*

[35] W. Dreyer, F. Duderstadt, St. Eichler and M. Jurisch, *Stress analysis and bending tests for GaAs wafer*, WIAS-Preprint **897** (2003).

[36] F. Fedorov, *Theory of elastic waves in crystals*, Plenum Press, New York, 1968.

[37] C. A. Felippa, *Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures*, Structures material research report, no. 66-22, University of California, Berkeley, 1966.

[38] T. Flade, *Explosion of demand for large-size GaAs substrates for device manufacturing — the reaction of a wafer supplier*, URL `http://www.fcm-germany.com/media.com/media/gorham3.pdf`(06. 07. 2001), 2001.

[39] T. Flade, M. Jurisch, A. Kleinwächter, A. Köhler, U. Kretzer, J. Prause, Th. Reinhold and B. Weinert, *State of art 6" SI GaAs wafers made of conventionally grown LEC-crystals*, Journal of Crystal Growth **198/199** (1999), 336–342.

[40] S. Flügge (ed.), *Handbuch der Physik,* vol. VI, *Elastizität und Plastizität*, Springer, Berlin, 1958.

[41] A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik,* Bd. 5, *Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie*, Teubner, Leipzig, 1907.

[42] A. Föppl und L. Föppl, *Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure* Bd. 1, R.Oldenburg, München, 1941, 3. Auflage (Erstauflage 1919. Letzter Nachdruck der 3. Auflage, mit englischer Einführung von G. Æ. Oravas, Johnson Reprint Corporation, New York, 1969).

[43] D. D. Fox, A. Raoult and J. C. Simo, *A justification of nonlinear properly invariant plate theories*, Arch. Rational Mech. Anal. **124** (1993), 157–199.

[44] H. P. R. Frederickse (ed.), *CRC Handbook of chemistry and physics*, CRC-Press, Boca Raton, Florida, 1996.

[45] Freiberger Compound Materials GmbH, *Semi-insulating gallium-arsenide wafers*, URL `http://www.fcm-germany.com/media/Semi-ins.pdf` (28. 02. 2001), 1998.

[46] ———, *4" GaAs wafer breakage — test results — comparison between VGF- and LEC-grown wafer*, URL `http://www.fcm-germany.com/media/LEC_vs_VGF.pdf` (16.10.2001), 2001.

[47] J. Fuhrmann, Th. Koprucki and H. Langmach, *pdelib: An open modular tool box for the numerical solution of partial differential equations. Design Patterns*, Proceedings of the 14th GAMM Seminar Kiel on Concepts of Numerical Software, January 23-25, 1998 (W. Hackbusch and G. Wittum, eds.), Universität Kiel, 2001, pp. 121–132.

[48] B. G. Galjorkin (Б. Г. Галёркин), Стержин и пластины. Пяды в некоторых вопросах упругого равновесия стершнейи пластин (*Stäbe und Platten. Reihen in gewissen Gleichgewichtsproblemen elastischer Stäbe und Platten*), Westnik inschenerow i technikow **19** (1915), 897–908, St. Petersburg, englische Übersetzung: (B. G. Galerkin, Rods and plates. Series solution of some problems in elastic equilibrium of rods and plates.Report TT-63-18924, National Technical Information Service, U.S. Dept. of Commerce, Springfield, VA, 22161).

[49] R. Gasch und K. Knothe, *Stukturdynamik,* Bd. 2, *Kontinua und ihre Diskretisierung*, Springer, Berlin, 1989.

[50] K. Girkmann, *Flächentragwerke*, Springer, Wien, 1959, 5. Auflage, (Erstauflage 1946, Nachdruck der 5. Auflage: 1963 und 1986).

[51] M. E. Gurtin, *Handbuch der Physik,* vol. VI/6a, *The linear theorie of elasticity*, Springer, Berlin, 1972.

[52] P.C. Hammer, O.P. Marlowe and A.H. Stroud, *Numerical integration over simplexes and cones*, Math. Tables Aids Comp. **10** (1956), 130–137.

[53] J. P. den Hartog, *Advanced strength of materials*, McGraw-Hill, New York, 1952, unveränderter Nachdruck: Dover Publications, New York, 1987.

[54] H. Hertz, *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **92** (1881), 156–171, Neuflage in [56].

[55] ______, *Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte*, aus den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes, Berlin, 1882, Neuauflage in [56].

[56] ______, *Gesammelte Werke*, vol. 1, J. A. Barth, Leipzig, 1895.

[57] R. Hill, *The elastic behavior of a cristalline aggregate*, Proc. Phys. Soc., London **A 65** (1952), 349–354.

[58] S. M. Hu, *Critical stress in silicon brittle fracture, and effect of ion implantation and other surface treatments*, J. Appl. Phys. **53** (1982), no. 5, 3576–3580.

[59] M. Jurisch, *Persönliche Mitteilungen*, 2003.

[60] G. Kämmel und H. Franeck, *Einführung in die Methode der finiten Elemente*, Fachbuchverlag, Leipzig, 1988.

[61] Th. von Kármán, *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau* (1910), Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (F. Klein und C. Müller, ed.), vol. IV/4, Teubner, Leipzig, 1907-1914, pp. 314–386.

[62] L. Kiesewetter, D. Houdeau, G. Löper und J.-M. Zhang, *Wie belastbar ist Silizium in mikromechanischen Strukturen?*, Mikromechanik und integrierte Optik **100** (1992), no. 6, 249–254.

[63] G. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, Crelles Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **40** (1850), 51–88.

[64] ——, *Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1876.

[65] K. Knothe und H. Wessels, *Finite Elemente. Eine Einführung für Ingenieure*, Springer, Berlin, 1991.

[66] L. A. Kolesnikow (Л. А. Колесников), К установлению пределов применимости уравнений кармана изгиба пластин, Rascet prostranstwennych konstrukcij, Sbornik statej (1962), 205–214.

[67] A. Krawietz, *Materialtheorie. Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermo-dynamischen Verhaltens*, Springer, Berlin, 1986.

[68] H.-J. Kruse, *Randwertprobleme der von Kármánschen Plattengleichungen und ihre numerische Lösung mittels finiter Elemente*, Technische Universität Berlin, Berlin, 1980, Dissertation.

[69] K. Kümmel, *Anwendbarkeit der Finite-Element-Methode bei der Festigkeitsanalyse von Strukturen aus sprödem Material*, Studienarbeit, Laboratorium für Technische Mechanik im Fachbereich Maschinentechnik der Universität GH Paderborn, Januar 1995.

[70] L. Lagally, *Vorlesungen über Vektorrechnung*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1928, unveränderter Nachdruck 1949.

[71] St. Łukasiewicz, *Local loads in plates and shells*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warschau, *auch bei* Nordhoff International Publishing, Leyden, 1979, erste englische Auflage, erste polnische Auflage 1976.

[72] A. I. Lurje (А. И. Лурье), Пространственные задачи теории упругости, Gostechisdat, Moskau, 1955, deutsche autorisierte ergänzte Ausgabe übersetzt von H. Göldner, G. Landgraf und H. Kirchhübel: A. I. Lurje, *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie*, Akademie-Verlag, Berlin, 1963, englische Ausgabe übersetzt von D. B. McVean: A. I. Lur'e, *Three-dimensional problems in the theory of elasticity*, Interscience, New York, 1964.

[73] W. Macke, *Mechanik der Teilchen, Systeme und Kontinua*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1961.

[74] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, London, 1983.

[75] J. C. McLaughlin and A. F. W. Willoughby, *Fracture of silicon wafers*, Journal of Crystal Growth **85** (1987), 83–90.

[76] B. Miara, *Justification of the asymptotic analysis of elastic plates, II. The non-linear case*, Asymptotic Analysis **9** (1994), 119–134.

[77] A. Nádai, *Die elastischen Platten*, Springer, 1925, unveränderter Nachdruck: Springer, 1968.

[78] P. M. Naghdi, *Handbuch der Physik,* vol. VI/6a, *The Theorie of Shells and Plates*, Springer, Berlin, 1972.

[79] H. Neuber, *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie; der Hohlkugel unter Einzellast als Beispiel*, Z. Angew. Math. Mech. **14** (1934), 203–213.

[80] ______, *Kerbspannungslehre*, Springer, Berlin, 1985, 3. Auflage (Erstauflage 1937, letzter Nachdruck der 3. Auflage 2001).

[81] W. Noll, *A new mathematical theory of simple materials*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **48** (1972), 1–50.

[82] NORM ASTM Standard F 394-78, *Biaxial flexure strength* (*modulus of repture*) *of ceramic substrates*, 1996.

[83] NORM EN DIN 1288-5, *Bestimmung der Biegefestigkeit von Glas — Teil 5: Doppelring-Biegeversuch an plattenförmigen Proben mit kleinen Prüfflächen*, 2000, Ersatz für DIN 52292-1.

[84] W. W. Nowoschilow (В. В. Новожилов), Основы нелинейной теории упругости, Современные проблемы механики, Gostechisdat, Moskau, 1948, englische Ausgabe übersetzt von F. Bagemihl, H. Komm und W. Seidel: V. V. Novozhilov, *Foundations of the nonlinear theory of elasticity*, Graylock Press, 1953, unveränderter Nachdruck der englischen Ausgabe: Dover Publications, New York, 1999.

[85] J. Olschewski, *Das elastische Materialverhalten kubisch einkristalliner Körper*, BAM Zwischenbericht des Teilprojektes Modellentwicklung im MATFO-Verbundprojekt "Einkristall-Turbinenschaufeln", BAM, 12205 Berlin, Unter den Eichen 87, 1988, Nachdruck: BAM-1.31 92/2, Sept. 1992.

[86] ———, *Der kubisch-flächenzentrierte Einkristall in Theorie und Experiment — Einige Untersuchungen zum Problemkreis - Orientierung - elastische Konstanten - Gleitsysteme* -, BAM-V.31 97/5, BAM, 12205 Berlin, Unter den Eichen 87, April 1997.

[87] J. Olschewski, F. Duderstadt, H.-D. Noack und C. Haftaoglu, *Erarbeitung eines Werkstoffmodells zur Beschreibung des Kriechens der Einkristall-Legierung CMSX4, Erstellung eines UMAT-Unterprogrammes für das FE-programm ABAQUS*, Bericht zum Forschungsauftrag der MTU München im Rahmen des Projektes Engine 3E, AP1330, BAM, 12205 Berlin, Unter den Eichen 87, August 1998, Bestell-Nr. 50-836761.

[88] P.F. Papkowitsch (П. Ф. Папкович), Выражение общего интеграла урабнений теории упругости через гармонические фунсии (*Ein allgemeines Integral für die Gleichungen der Elastizitätstheorie mit Hilfe harmonischer Funktionen*), Iswestija AN SSSR, ser. matem. i estestw. nauk **10** (1932), 1425–1435.

[89] W. Raack, *Ebene Flächentragwerke. Platten, Teil 2*, Technische Universität Berlin, 2. Institut für Mechanik, TU Berlin, Universitätsbibliothek, Abt. Publikationen, 1990.

[90] A. Raoult, *Analyse mathématique de quelques modèles de plaques et de poutres elastiques ou elasto-plastiques*, Doctoral dissertation, Université Pierre et Marrie Curie, Paris, 1988.

[91] A. Reuss, *Berechnung der Fließgrenze von Mischschkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle*, Z. Angew. Math. Mech. **9** (1929), 49–58.

[92] W. Ritz, *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **135** (1908), 1–61.

[93] ———, *Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern*, Annalen der Physik **28** (1909), no. 4, 737–786.

[94] A.-J.-C. B. de Saint-Venant, *Mémoire sur la torsion des prismes . . . (1853)*, Mém. des Savants étrangers, Acad. Sci. Paris **14** (1855), 233–560.

[95] O. M. Sapondjan, *Biegung einer frei gestützten polygonalen Platte.*, Ivz. Akad. Nauk. Armyan SSR Ser. Fiz.-Mat. Estestv. Techn. Nauk. **5** (1951), 29–46, (in russisch).

[96] M. Schaper, M. Jurisch, H.-J. Klauß, H. Balke, F. Bergner, R. Hammer and M. Winkler, *Fracture strength of GaAs wafers*, Proceedings MicroMat (Berlin), IZM, Berlin and DVM, Berlin, April 2000, pp. 570–573.

[97] W. Schatt (ed.), *Einführung in die Werkstoffwissenschaft*, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1983, 5. Auflage.

[98] I. Schmelzer, *Grid generation and geometry description with COG*, ALGORITMY 2000, Proceedings of contributed papers and posters, Acta Mathematica Universitatis Comenianae **70** (2001), no. 1, 399–405.

[99] G. E. R. Schulze, *Metallphysik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1967.

[100] J. R. Shewchuk, *Triangle: Engineering a 2D quality mesh generator and delaunay triangulator*, Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering (Ming C. Lin and Dinesh Manocha, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 1148, Springer-Verlag, May 1996, From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry, pp. 203–222.

[101] N. Sieber und H.-J. Sebastian, *Spezielle Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1983, 3. Auflage, Erstauflage 1977, 2. Auflage auch bei Harri Deutsch, Frankfurt/M.

[102] A. Sommerfeld, *Mechanik der deformierbaren Medien*, 2 ed., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1954.

[103] W. Thomson and P.G. Tait, *Handbuch der theoretischen Physik,* Bd. 2, Braunschweig, 1871-1874.

[104] C. Truesdell, *Comments on rational continuum mechanics*, Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equation (G. M de la Phanha and L. A. J. Medeiros, eds.), Mathematics Studies, vol. 30, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 495–603.

[105] C. Truesdell and W. Noll, *The non-linear field theories of mechanics*, Springer, Berlin, 1965, 1. Auflage (1965) im *Handbuch der Physik* (vol. III/3), 2. korrigierte Auflage (1992) unter eigenem Titel.

[106] C. Truesdell and Toupin R., *The classical field theories*, Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie (S. Flüge, ed.), Handbuch der Physik, vol. III/1, Springer, Berlin, 1960, pp. 226–793.

[107] M.J. Turner, R.W. Clouch, H.C. Martin and L.J. Topp, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aerospace Sci. **23** (1956), 805–823, 854.

[108] M. Vidrascu, *Comparaison numérique entre les solutions bidimensionnelles et tridimensionnelles d'un problème de plaque encastrée*, Rapport de recherche, no. 309, INRIA, 1984.

[109] W. Vocke, *Räumliche Probleme der linearen Elastizitätstheorie*, Fachbuchverlag, Leipzig, 1969.

[110] W. Voigt, *Elementare Mechanik als Einleitung in das Studium der theoretischen Physik*, Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1889.

[111] ———, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, Leipzig, 1910.

[112] M. S. Wdowik, *Reduction of wafer breakage in a 3″ wafer fab facility through the implementation of a biaxial stress test*, US Conf. on GaAs Manufacturing (Reno), June 1990.

[113] W. Weibull, *A statistical theory of the strength of materials,* Handlingar no. 151, pp. 4–49, Ingeniörs Vetenskaps Akademien, Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag, Stockholm, 1939.

[114] J. R. Willis, *Hertzian contact of anisotropic bodies*, Journal of the Mechanics and the Physics of Solids **14** (1966), 163–176.

[115] A. S. Wolmir (А. С. Вольмир), Гипкие пластинки и оболочки, Gostechisdat, Moskau, 1956, deutsche Ausgabe übersetzt von A. Duda: A. S. Wolmir, *Biegsame Platten und Schalen*, Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962, englische Ausgabe: A. S. Volmir, *Flexible Plates and Shells*, Air Force Flight Dynamics Laboratory TR-66-216, 1967.

[116] O. C. Zienkiewicz, *The finite element method*, McGraw Hill, Maidenhead, 1977, 3. Auflage, deutsche Ausgabe der 3. Auflage übersetzt von J. Beyreuther und E. Müller: *Methode der finiten Elemente*, Fachbuchverlag, Leipzig, 1983 und Carl Hanser, München, 1984.