

Mode-III-Interface-Bruch in einem Verbund aus nichtlinearen Materialien

Diplomarbeit von Marita Thomas

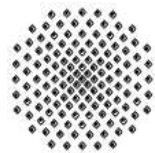
Betreuung:

apl. Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

Institut für Angewandte Analysis
und Numerische Simulation



Universität Stuttgart



Januar 2006

Erklärung

Hiermit erkläre ich,

Marita Thomas, Mat.-Nr. 2052072,

dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Leonberg, den 11. 01.2006

Vorwort

Die analytische Untersuchung des Bruches verformbarer Festkörper ist ein Teilgebiet der Mechanik und für die Ingenieurwissenschaften von Wichtigkeit.

Unter dem Bruch eines Körpers versteht man die vollständige oder teilweise Trennung eines ursprünglich zusammenhängenden Gesamtkörpers [5]. Ursache eines Bruchs sind meist Risse im Körper, die bereits vor dem eigentlichen Zerstören des Gesamtkörpers entstehen. Hervorgerufen werden Risse oftmals durch die Einwirkung äußerer Kräfte, an Stellen, wo es zu hohen Spannungs- und Energiekonzentrationen kommt. Diese treten meist an Orten wechselnder Rand- oder Materialbedingungen auf.

Um Risse und Rissausbreitung zu vermeiden sind bei der Konzeption von Bauteilen daher unter Anderem folgende Aspekte von Interesse:

1. Kann unter gegebenen Belastungen in einem Bauteil eines bestimmten Materials ein Riss entstehen oder fortschreiten?
2. In welche Richtung erfolgt der Rissfortschritt?
3. Welchen Einfluß haben ortsabhängige Stoffeigenschaften auf den Riss?

Mit der vorliegenden Diplomarbeit wurde ein erster Schritt unternommen, Antworten auf diese Fragen auf analytischem Wege für einen Verbundkörper mit nichtlinearem, hyperelastischen Werkstoffgesetz unter Mode-III-Belastung zu finden.

So ist die Rissbildung in Verbundkörpern oftmals gerade am Interface festzustellen: Dort sind zwei Teilkörper mit unterschiedlichen Materialeigenschaften im unverformten Gesamtkörper kräftefrei miteinander verbunden. Bei einem Belastungsvorgang verformen sich beide Teilkörper, müssen aber längs des Interface die Stetigkeit des Verschiebungsvektors und des Spannungsvektors einhalten, solange kein Riss vorhanden ist. Durch die unterschiedlichen Materialeigenschaften, die am Interface aufeinandertreffen, kommt es dort zu höheren inneren Kräften als im Rest des Körperinneren, was vornehmlich am Interface zu einer erhöhten Gefahr der Rissbildung führt.

Setzt man eine zeitlich und räumlich konstante Mode-III-Belastung des Körpers voraus, so ist die Betrachtung eines stationären Risses in einem zweidimensionalen Teilgebiet des Körpers erlaubt.

Daher ist die Aufgabenstellung der vorliegenden Diplomarbeit beschränkt auf die Behandlung eines stationären Interfacerisses in einem zweidimensionalen Gebiet, bestehend aus zwei Teilgebieten unterschiedlicher Materialeigenschaften. Diese sollen durch Werkstoffgesetze beschrieben werden, die auf Differentialoperatoren, ähnlich dem p -Laplace-Operator, führen. Es werden Belastungen vorausgesetzt, die zu Neumann-Bedingungen auf Teilstücken des Randes und zu (in-)homogenen Dirichlet-Bedingungen auf anderen Teilstücken des Randes führen. Die zum Verständnis der Aufgabenstellung nötigen Grundlagen aus der Mechanik sowie eine Erläuterung der Problemstellung werden in Kapitel 1 bereitgestellt.

Das zu untersuchende Transmissions-Randwertproblem und dessen schwache Formulierung sind aufgrund der vorgegebenen Differentialoperatoren nichtlinear. Daher sind Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen über die Theorie der monotonen Operatoren zu gewinnen [23]. Anders als bei linearen Randwertproblemen erfordert die Nichtlinearität der Differentialoperatoren

eine ausführliche Behandlung des inhomogenen Dirichlet-Problems, da die Fortsetzung des Verschiebungsfeldes vom Dirichlet-Rand ins Gebiet nicht -wie in der linearen Theorie üblich- aus dem Differentialoperator herausgelöst und auf die rechte Gleichungsseite überschoben werden kann. Dies wird in Kapitel 2 zum Ausdruck kommen, wo die Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen für das vorgegebene Problem ausführlich behandelt werden.

Ziel der Diplomarbeit ist es, die Griffithsche Formel für den zweidimensionalen Materialverbund zu beweisen.

Sie ermöglicht die Berechnung der Energiefreisetzungsrate über Größen, die aus der schwachen Lösung gewonnen werden können. Genauere Ausführungen hierzu sind in Kapitel 3 zu finden. Die Energiefreisetzungsrate beschreibt die Energie, die bei einem infinitesimalen Rissfortschritt frei wird. Daher erlaubt ihre Kenntnis Aussagen zur Rissausbreitung. So ist die Energiefreisetzungsrate in dem 1921 von A. A. Griffith formulierten Bruchkriterium mit einer für die Rissausbreitung kritischen Energiegröße verknüpft. Darauf wird bereits in Kapitel 1 genauer eingegangen.

Man bezeichnet die Behandlung von Rissen mithilfe der Energiefreisetzungsrate und der Griffithschen Formel auch als den „energetischen Zugang“ ("energy approach") zu Rissen [14]. Daher wird in Kapitel 2.4 der Zusammenhang zwischen der schwachen Lösung des Transmissions-Randwertproblems und den Energien des dadurch beschriebenen Systems erläutert.

In Kapitel 4 soll schließlich das Verhalten der Energiefreisetzungsrate des zweidimensionalen Verbunds unter Belastungen unter Verwendung der in Kapitel 3 bewiesenen Griffithschen Formel numerisch illustriert werden.

Bei der Entstehung meiner Diplomarbeit erhielt ich vielfältige Unterstützung durch die Arbeitsgruppe Sändig. Dafür bedanke ich mich herzlich,

insbesondere bei Herrn Dr. Thomas Merkle für die Bereitstellung des Programms MyFEM++ und die vielen damit verbundenen Hilfestellungen,

sowie bei Herrn Dipl. math. Winfried Geis für seine Geduld und seine Hilfe bei scheinbar unlösbaren Computerproblemen.

Mein besonderer Dank richtet sich an die Betreuerinnen meiner Diplomarbeit,

an Frau Dr. Dorothee Knees, die viele nützliche Anregungen, besonders für das 2. und 3. Kapitel beisteuerte und viel Ausdauer und Geduld bei Diskussionen bewies,

und ganz besonders an Frau Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig, die bei auftretenden Problemen immer gesprächsbereit war und mir durch ihre Aufgeschlossenheit und Anteilnahme am Fortschritt meiner Arbeit die nötige Sicherheit für die Durchführung meiner Diplomarbeit gab.

Ich bedanke mich auch bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. (em.) Wolfgang Wendland für die Übernahme der Zweitkorrektur meiner Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

1	Elemente der Kontinuumsmechanik für verformbare Verbundkörper mit Interfaceriss	1
1.1	Sachverhalte aus der Kontinuumsmechanik verformbarer Körper	2
1.1.1	Grundgleichungen der Kinematik	2
1.1.2	Grundgleichungen der Statik	3
1.1.3	Kurzer Überblick über Werkstoffeigenschaften	4
1.1.4	Energiefunktionale für hyperelastische Materialien	5
1.2	Die Behandlung von Rissen	6
1.2.1	Die Rissmodi	6
1.2.2	Griffithsches Bruchkriterium und Energiefreisetzungsrate	7
1.3	Problemstellung	9
2	Transmissions-Randwertprobleme	13
2.1	Herleitung einer schwachen Formulierung	13
2.1.1	Anforderungen an das Gebiet	13
2.1.2	Funktionenräume und Spursatz	15
2.1.3	Schwache Formulierung	18
2.2	Analysis der auftretenden Operatoren	21
2.2.1	Nützliche Ungleichungen	22
2.2.2	Definitions-und Wertebereich	28
2.2.3	Koerzitivität	29
2.2.4	Monotonie	35
2.2.5	Stetigkeit	37
2.3	Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösungen	40
2.4	Ein äquivalentes Minimierungsproblem	43
2.4.1	Untersuchungen zur Differenzierbarkeit	44
2.4.2	Energieminimierung und schwache Formulierung	47
3	Energiefreisetzungsrate und Griffithsche Formel für den Verbund	49
3.1	Beweis der Griffithschen Formel	50
3.1.1	Die Transformation T_δ	51
3.1.2	Beschränktheit und Konvergenz der Lösungen	52
3.1.3	Durch Energieminimierung zur Griffithschen Formel	70

4	Numerische Beispiele	77
4.1	Unendlich langer Streifen unter Mode-III-Belastung	77
4.2	Das Verhalten der Energiefreisetzungsrates ERR	81
4.2.1	ERR in Abhängigkeit von der Risslänge	81
4.2.2	ERR in Abhängigkeit von p	85
4.2.3	ERR in Abhängigkeit von μ	87
4.2.4	ERR in Abhängigkeit von der Dirichlet-Bedingung	89
4.2.5	ERR in Abhängigkeit von der Gebietsgröße	90

Nichterklärte Symbole

Folgende Symbole werden in den nachfolgenden Kapiteln als bekannt vorausgesetzt:

$\mathbb{R}^{n,n}$ Raum der Matrizen $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

\mathbb{R}^+ $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x < \infty\}$

\mathbb{R}^- $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}, -\infty < x < 0\}$

\mathbb{R}_0^+ $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < \infty\}$

\mathbb{R}_0^- $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R}, -\infty < x \leq 0\}$

$|\Omega|$ $|\Omega| = \text{meas } \Omega = \int_{\Omega} 1 \, d\mathbf{x}$

Kapitel 1

Elemente der Kontinuumsmechanik für verformbare Verbundkörper mit Interfacieriss

Festkörper sind oft zeitlich konstanten oder sich nur sehr langsam verändernden Einflüssen durch äußerere Kräfte ausgesetzt. Die Veränderungen am bzw. im Körper sind dann stationär oder verlaufen quasistatisch. Während solcher Vorgänge wird der Körper durch innere Kräfte zusammengehalten, die als Folge seiner Verformungen entstehen und deren Ursache die äußeren Kräfte sind.

Die Ermittlung der Verformungen und inneren Kräfte des stationär oder quasistatisch beanspruchten Körpers führt zu Randwertaufgaben, die aus drei Gleichungsgruppen bestehen:

1. Feldgleichungen und Randbedingungen der Kinematik, die die Verformung des Körpers beschreiben;
2. Feldgleichungen und Randbedingungen der Statik, die die Kräfteverhältnisse im Körper und auf dem Rand des Körpers erfassen;
3. den konstitutiven Beziehungen (Werkstoffgesetz), die problemorientierte Kinematikgrößen mit ihnen energetisch zugeordneten Statikgrößen verbinden.

Alle drei Gleichungsgruppen sind i. Allg. nichtlinear. Die Nichtlinearität der ersten beiden Gleichungsgruppen steht bei großen Verformungen im Vordergrund und wird als geometrische Nichtlinearität bezeichnet. Verhält sich dagegen das Werkstoffgesetz nichtlinear in seinen Variablen, so spricht man von physikalischer Nichtlinearität.

Ziel der vorliegenden Diplomarbeit sind Betrachtungen zu einem quasistatischen Deformationsvorgang, für den die Anwendung der geometrisch linearisierten 1. und 2. Gleichungsgruppe sinnvoll ist, der jedoch im Stoffgesetz physikalisch nichtlineare Einflüsse zu beachten verlangt. Besondere Aufmerksamkeit verdienen materielle Punkte des belasteten Körpers, in denen kritische Energiekonzentrationen vorhanden sind, die eine Rissbildung einleiten können.

Dazu werden in Abschnitt 1.1.4 zweckdienliche Energiefunktionale bereitgestellt und in Abschnitt 1.2 nötige Elemente zur Behandlung von Rissen erläutert.

Die Arbeit ist beschränkt auf ebene Rissprobleme längs des Interface in Verbundkörpern. Das Interface ist der geometrische Ort, hier Linie, an dem Materialparameter als Funktionen des Ortes unstetig sind. Wir betrachten Verbundkörper, die aus zwei Teilkörpern jeweils

unterschiedlicher Werkstoffe bestehen, deren Materialparameter innerhalb jedes Teilkörpers konstant sind.

1.1 Sachverhalte aus der Kontinuumsmechanik verformbarer Körper

Dieser Abschnitt enthält die benötigten Grundlagen zur Beschreibung eines Körpers unter dem Einfluss äußerer Kräfte. Hierzu werden die Grundgleichungen der Kinematik und der Statik formuliert und ein kurzer Überblick über ausgewählte Werkstofftypen gegeben. Zur Charakterisierung des Zustandes eines Körpers kann es von Interesse sein, seine Energie zu betrachten. Im Hinblick darauf werden Energiefunktionale vorgestellt.

1.1.1 Grundgleichungen der Kinematik

Eine Deformation φ setzt sich zusammen aus einer Starrkörperbewegung (Translation und Rotation), sowie der Verformung des Körpers in sich. Da in dieser Arbeit der Rissvorgang quasistatisch zu behandeln ist, wird φ zeitunabhängig sein.

Ist \mathbf{x} ein materieller Punkt des Körpers in der Referenzkonfiguration $\overline{\Omega}_0 \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, so ist $\mathbf{x}^\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ sein Bild in der deformierten, oder aktuellen Konfiguration $\overline{\Omega}_\varphi$ [3]. Die Abbildung $\varphi : \overline{\Omega}_0 \rightarrow \overline{\Omega}_\varphi$ muss dabei bijektiv sein. Das zur Deformation φ gehörende Verschiebungsfeld $\mathbf{u} : \overline{\Omega}_0 \rightarrow \overline{\Omega}_\varphi$ ergibt sich für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}_0$ als

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left(u^{(j)}(\mathbf{x}) \right)_{j=1}^n = \varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \quad . \quad (1.1)$$

Eine derartige Darstellung des Verschiebungsfeldes wird als Lagrangesche Betrachtungsweise bezeichnet. Diese ist in der Festkörpermechanik zweckmäßig, weil die Konfiguration des unverformten Körpers bekannt, seine aktuelle Konfiguration jedoch unbekannt ist.

Das punktweise erklärte Verschiebungsfeld \mathbf{u} ist allerdings ungeeignet zur Beschreibung des Deformationsgeschehens in einer ganzen Umgebung eines Punktes $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}_0$. Notwendig ist die Benutzung des Verschiebungsgradienten $\nabla \mathbf{u}$, bzw. von daraus abgeleiteten Größen, z.B. dem Green-St. Venant-Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^\top + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^\top \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \quad . \quad (1.2)$$

Ist der Verschiebungsgradient $\nabla \mathbf{u}$ sehr klein, d.h.

$$\|\nabla \mathbf{u}\| = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_0} \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \left| \partial_{x_i} u^{(j)}(\mathbf{x}) \right| \ll 1, \quad (1.3)$$

so ist das Produkt $\left((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^\top \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right)$ vernachlässigbar klein gegenüber $\nabla \mathbf{u}, (\nabla \mathbf{u})^\top$ und es darf der linearisierte Verzerrungstensor

$$\varepsilon : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, \quad \varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^\top + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) = \frac{1}{2} \left(\partial_{x_j} u^{(i)}(\mathbf{x}) + \partial_{x_i} u^{(j)}(\mathbf{x}) \right)_{i,j=1}^n \quad (1.4)$$

eingeführt werden. Man bezeichnet

$$\varepsilon(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^\top + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \quad (1.5)$$

als linearisierte Feldgleichung der Kinematik. Die vollständige Beschreibung der Kinematik erfordert Randbedingungen auf einem Teilstück Γ_D des Randes $\partial\Omega_0$ mit dem Maß $|\Gamma_D| > 0$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma_D . \quad (1.6)$$

1.1.2 Grundgleichungen der Statik

Der Punkt \mathbf{x}^φ besitze ein umgebendes Flächenelement $\Delta A^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)$ in der verformten Konfiguration Ω_φ . Die an diesem Flächenelement angreifende Kraft $\Delta \mathbf{P}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)$ erzeugt den Grenzwert

$$\mathbf{t}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) = \lim_{\Delta A^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)}{\Delta A(\mathbf{x}^\varphi)} .$$

Dieser Grenzwert heißt Spannungsvektor im Punkt \mathbf{x}^φ der verformten Konfiguration. Seine Existenz ist ein Axiom der Kontinuumsmechanik. Dem zu seiner Definition erforderlichen Flächenelement ist ein Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x}^\varphi)$ in \mathbf{x}^φ zugeordnet. Cauchy's Theorem postuliert die Existenz einer linearen Abbildung $T^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)$ in \mathbf{x}^φ , die dem Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x}^\varphi)$ des Punktes \mathbf{x}^φ den Spannungsvektor $\mathbf{t}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)$ in \mathbf{x}^φ zuordnet. Diese Abbildung ist der sog. Cauchysche Spannungstensor $T^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)$, der im verformten Körper definiert ist:

$$\mathbf{t}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) = T^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) \mathbf{n}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) . \quad (1.7)$$

Neben den vorgegebenen Kräfteverteilungen $\mathbf{h}^\varphi : \Gamma_N^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Oberflächenanteil Γ_N^φ ist der zu untersuchende Körper noch der vorgegebenen Volumenkraftdichte $\mathbf{f}^\varphi : \Omega_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ ausgesetzt. Befindet sich der in seiner Beweglichkeit im Raum unbehinderte Körper im Ruhezustand oder einer quasistatischen Bewegung, so ist er im Gleichgewicht. Dies ist eine Folgerung aus dem Newtonschen Grundgesetz.

Mit dem Eulerschen Schnittprinzip folgt, dass sich ein infinitesimaler Würfel, der aus einem sich im Gleichgewicht befindlichen Körper herausgeschnitten wird, sich ebenfalls im Gleichgewicht befindet. Gleichgewichtsbetrachtungen an einem solchen infinitesimalen Würfel führen auf die statischen Feldgleichungen:

$$-\operatorname{div} T^\varphi = \mathbf{f}^\varphi \quad \text{in } \Omega_\varphi , \quad (1.8)$$

$$T^\varphi = (T^\varphi)^\top \quad \text{in } \Omega_\varphi . \quad (1.9)$$

Dabei beschreibt Gleichung (1.8) die Kräftegleichgewichtsbeziehung zwischen Spannungstensor und Volumenkraftdichte. Die Symmetrie des Spannungstensors (1.9) resultiert aus der Forderung, dass infinitesimaler Würfel und Körper sich im Ruhezustand nicht drehen dürfen.

Auf dem Oberflächenanteil Γ_N^φ , auf dem keine Verschiebung, sondern die Oberflächenkraftdichte \mathbf{h}^φ vorgeschrieben ist, muss der Spannungsvektor \mathbf{t}^φ die statischen Randbedingungen erfüllen:

$$\mathbf{t}^\varphi = \mathbf{h}^\varphi \quad \text{auf } \Gamma_N^\varphi . \quad (1.10)$$

Die statischen Gleichungen lassen sich mit Hilfe der Piola-Transformation

$$T : \Omega_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, \quad T(\mathbf{x}) = (\det \nabla \varphi(\mathbf{x})) T^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^{-\top} \quad (1.11)$$

auf die Referenzkonfiguration überführen:

$$-\operatorname{div} T = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_0 , \quad (1.12)$$

$$(\nabla \varphi) T^\top = T (\nabla \varphi)^{-\top} \quad \text{in } \Omega_0 , \quad (1.13)$$

$$T \mathbf{n} = \mathbf{h} \quad \text{auf } \Gamma_N . \quad (1.14)$$

Der Tensor T heißt 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor und ist i.Allg. unsymmetrisch. Daher benützt man den symmetrischen 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor:

$$\Sigma : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, \quad \Sigma(\mathbf{x}) = (\nabla \boldsymbol{\varphi})^{-1} T(\mathbf{x}) = (\det \nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) (\nabla \boldsymbol{\varphi})^{-1} T^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) (\nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))^{-\top}. \quad (1.15)$$

Bei kleinen Verschiebungsgradienten sind auch die Statikgleichungen linearisiert zu verwenden:

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_0, \quad (1.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\top = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{in } \Omega_0, \quad (1.17)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h} \quad \text{auf } \Gamma_N. \quad (1.18)$$

Die Symmetrie des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ der linearisierten Theorie in Gleichung (1.17) resultiert aus der Beziehung $\nabla \boldsymbol{\varphi} = \nabla \mathbf{u} + \operatorname{Id}$, wenn $\nabla \mathbf{u}$ vernachlässigbar klein gegenüber Id ist. Die Unterschiede zwischen Cauchyschem, 1. und 2. Piola-Kirchhoffschem Spannungstensor sowie dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ sind dann klein von höherer Ordnung.

1.1.3 Kurzer Überblick über Werkstoffeigenschaften

Ein Werkstoffgesetz besitzt die Form

$$\Sigma = \widehat{\Sigma}(\cdot, \cdot, \cdot, \dots), \quad (1.19)$$

wobei die Argumentliste $(\cdot, \cdot, \cdot, \dots)$ nach dem Prinzip der Äquipräsenz alle Zustandsgrößen enthalten muss, die das Problem beschreiben [20]. Dabei versteht man unter Zustandsgrößen die linear unabhängigen Variablen des Problems, das sind z.B. der Ort \mathbf{x} , die Zeit t , der Green-St. Venant Verzerrungstensor \mathbf{E} , die Temperatur T , die Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, etc.. Ein Werkstoffgesetz charakterisiert das Verhalten eines Materials und wird in den Werkstoffwissenschaften durch Experimente festgestellt.

Reale Werkstoffe zeigen i.Allg. Kombinationen der nachfolgend angeführten Verhaltensweisen:

1. Elastisches Verhalten ist gekennzeichnet durch eine eindeutige Darstellung der Spannung durch Verzerrung und Ort:

$$\Sigma = \widehat{\Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{E}(\mathbf{x})),$$

das bedeutet, dass in einem elastischen Material Deformationen reversibel sind [10].

Man unterscheidet zwischen linearer und nichtlinearer Abhängigkeit von \mathbf{E} :

- (a) Bei linear elastischen Materialien ist das Werkstoffgesetz durch das Hookesche Gesetz gegeben:

$$\Sigma = C(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad C : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}.$$

- (b) Ein nichtlineares Material liegt z.B. im Falle eines Werkstoffgesetzes vom Potenztyp vor:

$$\Sigma = \widehat{\Sigma}(\mathbf{x}, (\mathbf{E}(\mathbf{x}))^p), \quad p \in (1, \infty).$$

- (c) Linear und nichtlinear elastische Materialien heißen hyperelastisch [3], wenn ein Potential $W_{el} : \overline{\Omega}_0 \times \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, aus dem sich der Spannungstensor durch Differentiation ergibt:

$$\Sigma = \frac{\partial W_{el}}{\partial F}(\mathbf{x}, F) \quad \text{mit } F = \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (1.20)$$

Das Potential W_{el} wird als Verzerrungsenergiedichte bezeichnet. Bei kleinen Verschiebungsgradienten sind entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 1.1.1 und 1.1.2 die Tensoren $\mathbf{E} = \varepsilon$ und $\Sigma = \sigma$ zu setzen.

Die Punkte (b) und (c) sind für die nachfolgenden Kapitel von Wichtigkeit.

2. Plastisches Materialverhalten liegt vor, wenn Deformationen zu irreversiblen Veränderungen führen, sodass bei Entlastung die Ausgangskonfiguration nicht mehr erreicht wird.
3. Werkstoffe, die kein ausgeprägtes plastisches Verhalten zeigen und sich bis zum Bruch weitgehend elastisch verhalten, nennt man spröde [5]. Ein solcher Werkstoff ist z.B. Glas.
4. Ein Werkstoff verhält sich zäh, wenn er vor dem Bruch ein ausgeprägtes plastisches Verhalten zeigt, [5]. Solche Werkstoffe sind z.B. Aluminiumlegierungen und kohlenstoffarmer Stahl.

Bemerkung 1.1.1

Ein Randwertproblem zur Bestimmung der Verschiebungsfeldes \mathbf{u} benötigt die Gleichungen

$$(1.2), (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.19) \text{ bzw.} \\ (1.4), (1.6), (1.16), (1.17), (1.18), (1.19).$$

1.1.4 Energiefunktionale für hyperelastische Materialien

Der Energieinhalt eines hyperelastischen Körpers, ggf. mit Riss, kann unter der Annahme kleiner Verschiebungsgradienten durch folgende Energiefunktionale beschrieben werden:

- Elastische Verzerrungsenergie:
Aus 1.1.3 (c) ist bekannt, dass hyperelastische Materialien durch die Existenz einer Verzerrungsenergiedichte $W_{el}(\mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{x}))$ charakterisiert sind. Die Integration über die Konfiguration Ω liefert die elastische Verzerrungsenergie

$$J_{el}(\Omega, \varepsilon) = \int_{\Omega} W_{el}(\mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} . \quad (1.21)$$

- Arbeit der äußeren Kräfte [10], S.121:
Für vorgegebene äußere Kräfte \mathbf{f} , \mathbf{h} und bekanntes Verschiebungsfeld \mathbf{u} ist die Arbeit der äußeren Kräfte am Körper Ω definiert als die Anwendung der Kräfte \mathbf{f} , \mathbf{h} auf das Verschiebungsfeld \mathbf{u} :

$$W(\Omega, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\Omega} + \langle \mathbf{h}, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_N} = -P(\Omega, \mathbf{u}) , \quad (1.22)$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als duale Paarung aufzufassen ist und $P(\Omega)$ im Falle konservativer äußerer Kräfte das Potential der äußeren Kräfte ist.

- Potentielle Energie:
Die potentielle Energie einer Konfiguration Ω ist -konservative äußere Kräfte vorausgesetzt- die Summe aus innerem und äußerem Potential:

$$E(\Omega, \varepsilon, \mathbf{u}) = J_{el}(\Omega, \varepsilon) - W(\Omega, \mathbf{u}) = J_{el}(\Omega, \varepsilon) + P(\Omega, \mathbf{u}) . \quad (1.23)$$

- Dissipative Energie:

Bei der Behandlung eines Körpers Ω mit Riss spielt die dissipative Energie $D(\Omega)$ eine wichtige Rolle. Sie umfasst den Energieanteil, der für irreversible Prozesse zur Verfügung steht. Dazu gehören alle auf Mikroebene stattfindenden Vorgänge, wie das Brechen von Atombindungen, sowie die Schaffung einer neuen makroskopischen Rissoberfläche. Im einfachsten Fall kann die dissipative Energie proportional zur Rissfortschrittslänge δ angesetzt werden [5]:

$$D(\Omega) = 2\gamma\delta, \quad (1.24)$$

wobei γ eine Materialkonstante ist. Der Faktor 2 berücksichtigt die Tatsache, dass bei Rissfortschritt stets zwei neue Rissufer gebildet werden müssen.

- Totale Energie:

Die totale Energie eines Körpers Ω mit Riss ist die Summe aller oben aufgeführten Energieanteile:

$$\Pi(\Omega, \varepsilon, \mathbf{u}) = E(\Omega, \varepsilon, \mathbf{u}) + D(\Omega) = J_{el}(\Omega, \varepsilon) - W(\Omega, \mathbf{u}) + D(\Omega). \quad (1.25)$$

1.2 Die Behandlung von Rissen

In dieser Diplomarbeit werden Risse aus kontinuumsmechanischer Sicht behandelt, daher ist nur ihr makroskopisches Verhalten von Bedeutung. Ein Riss kann dabei als Schnitt in einem Körper aufgefasst werden [5]. Seine gegenüberliegenden Berandungen bezeichnet man im Dreidimensionalen als Rissoberflächen, welche in der zweidimensionalen Rissfront enden. Bei zweidimensionaler Betrachtung eines Risses spricht man von den Rissufern und der Rissspitze. Die Rissufer können als kräftefrei angesehen werden.

Bei der Rissbildung und -ausbreitung spielt die Prozesszone eine wichtige Rolle. Darunter versteht man die Zone um die Rissspitze, in der es zu Atombindungsbrüchen und zur Plastifizierung des Materials kommt. Solche Vorgänge können nur auf mikroskopischer Ebene beschrieben werden. Daher ist es bei der kontinuumsmechanischen Behandlung von Rissen notwendig, die Prozesszone als vernachlässigbar klein anzusehen [5]. Diese Annahme ist für metallische Werkstoffe und spröde Materialien durchaus sinnvoll. Soll Plastifizierung ausgeschlossen werden, so ist es nötig, kleine Verschiebungsänderungen vorauszusetzen. Dann kann die in Abschnitt 1.1 beschriebene linearisierte Theorie verwendet werden.

1.2.1 Die Rissmodi

Für einen Körper mit Riss in der x_1 - x_3 -Ebene können drei verschiedenen Grundtypen der Rissöffnung festgestellt werden, vgl. Abbildung 1.1, [5]:

- Mode I:

Darunter versteht man eine zur x_1 - x_3 -Ebene symmetrische Rissöffnung. Sie entsteht durch Auseinanderziehen der Rissoberflächen in x_2 -Richtung.

- Mode II:

Dies ist eine antisymmetrische Separation der Rissoberflächen in der x_1 - x_3 -Ebene durch Relativverschiebungen in x_1 -Richtung.

- Mode III:
Dabei erfolgt die Separation der Rissoberflächen in der x_1 - x_3 -Ebene durch Relativverschiebungen in x_3 -Richtung.

Ein realer Riss kann als Kombination dieser drei Grundtypen beschrieben werden.

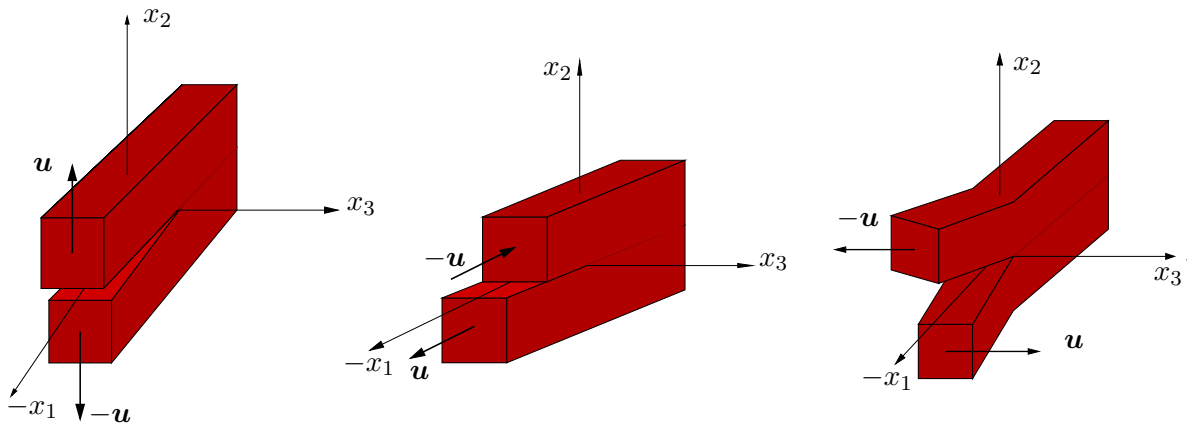


Abb. 1.1: Körper mit Mode- I-, Mode- II-, Mode- III-Riss (v.l.n.r.)

In Experimenten und Simulationen zeigt sich, dass Mode III von untergeordneter Bedeutung ist. So sind nur Mode-I- und Mode-II-Risse in Reinform zu erzeugen. Verschiebungen, die zu einem Mode-III-Riss führen sollen, rufen beim Rissfortschritt i. Allg. Mode-I- und Mode-II-Belastungen hervor. Damit ist ein Mode-III-Riss experimentell schlecht realisierbar. Simulationen haben ergeben, [14], dass sich ein durch Mode-III-Belastung entstandener Riss bei anschließender Entlastung wieder bis zu seinem Ausgangszustand schließen würde. Bei Mode-I- und Mode-II-Belastungen bleibt dagegen auch nach Entlastung ein Rissfortschritt sichtbar.

1.2.2 Griffithsches Bruchkriterium und Energiefreisetzungsrate

Bei einem Körper mit bestehendem Riss kann es von Interesse sein, einen eventuellen Rissfortschritt vorauszusagen. Hierzu wurde 1921 von A. A. Griffith ein geeignetes Kriterium formuliert.

Für einen Körper in der aktuellen Konfiguration Ω_{δ_0} mit Riss R_{δ_0} der Länge δ_0 lautet das Griffithsche Bruchkriterium:

Definition 1.2.1 (Griffithsches Bruchkriterium, [10])

Der Riss R_{δ_0} ist stationär unter einer Kraft F , falls die totale Energie des Körpers $\Pi(\Omega_{\delta_0})$ in der aktuellen Konfiguration minimal ist im Vergleich zu jeder anderen benachbarten Konfiguration.

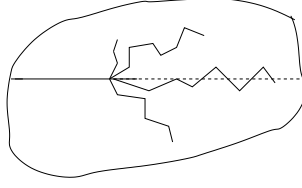


Abb. 1.2: Andere benachbarte Konfigurationen

Unter anderen benachbarten Konfigurationen sind dabei Konfigurationen zu verstehen, in die der Riss durch Fortschritt in eine beliebige Richtung um eine beliebige Länge gelangen könnte, vgl. Abbildung 1.2.

In der Diplomarbeit sollen ausschließliche Interfacerrisse behandelt werden. In diesem Fall ist die Rissfortschrittsrichtung eindeutig festgelegt und verschiedene Konfigurationen des Körpers unterscheiden sich nur in der Risslänge.

Ist Ω_{δ_1} eine Konfiguration mit dem längerem Riss R_{δ_1} , d.h. $\delta_0 < \delta_1$, so besagt das Griffithsche Bruchkriterium:

$$\text{Ist } \Pi(\Omega_{\delta_0}) < \Pi(\Omega_{\delta_1}), \text{ so ist der Riss stationär.}$$

Unter Beachtung von Formel (1.25) ist dies äquivalent zu:

$$\text{Ist } E(\Omega_{\delta_0}) - E(\Omega_{\delta_1}) < D(\Omega_{\delta_1}) - D(\Omega_{\delta_0}), \text{ so ist der Riss stationär.}$$

Das bedeutet in Worten: Ein Riss ist stationär, falls die potentielle Energie, die bei einem Rissfortschritt freigesetzt würde, kleiner ist als die zur Schaffung einer neuen Rissoberfläche benötigte Energie.

Dies motiviert die Definition der Energiefreisetzungsrates:

Definition 1.2.2 (Energiefreisetzungsrates, [10], [5])

Die Energiefreisetzungsrates ist die Energie, die bei infinitesimalem Rissfortschritt frei wird.

$$\begin{aligned} ERR(\Omega_{\delta_0}) &= \lim_{0 < \delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}) - E(\Omega_{\delta_0 + \delta})}{\delta} \\ &= - \left(\frac{dE(\Omega_{\delta_0 + \delta})}{d\delta} \right) \Big|_{\delta=0}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Die Energiefreisetzungsrates hat die Einheit einer Kraft: $\left[\frac{\text{J}}{\text{m}} \right] = [\text{N}]$.

Das Griffithsche Bruchkriterium kann nun unter Verwendung der Energiefreisetzungsrates formuliert werden:

$$\begin{aligned} \text{Ist } ERR(\Omega_{\delta_0}) &< \left. \frac{dD(\Omega_{\delta_0 + \delta})}{d\delta} \right|_{\delta=0}, \text{ so ist der Riss stationär.} \\ \text{Ist } ERR(\Omega_{\delta_0}) &> \left. \frac{dD(\Omega_{\delta_0 + \delta})}{d\delta} \right|_{\delta=0}, \text{ so wächst der Riss.} \end{aligned}$$

Damit erweist sich die Energiefreisetzungsrates als geeignete Größe, um Aussagen über das Eintreten von Risswachstum zu machen.

1.3 Problemstellung

Gegeben sei ein Körper, der aus zwei physikalisch nichtlinearen Materialien M_1, M_2 zusammengesetzt ist. Er weise entlang des Interface einen Riss auf, welcher im Folgenden stets in der x_1 - x_3 -Ebene liege, siehe Abbildung 1.3.

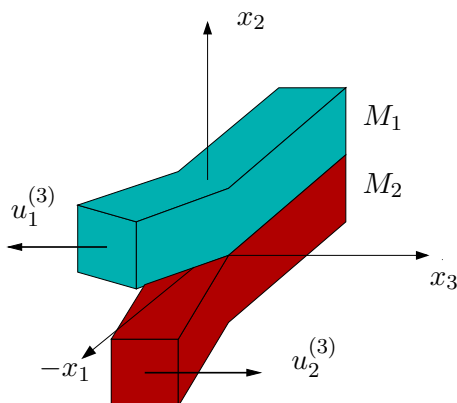


Abb. 1.3: Körper mit Mode-III-Interface-Riss

Die zu den beiden Materialien M_1, M_2 gehörenden Werkstoffgesetze seien vom Potenztyp. Die auf den Körper einwirkenden Kräfte seien zeitlich konstant. Das bei Rissausbreitung typische plastische Materialverhalten soll nur in einer vernachlässigbar kleinen Prozesszone um die Rissspitze auftreten, sodass beide Materialien als hyperelastisch angenommen werden können. Daher werden die folgenden elastischen Verzerrungsenergiedichten als gegeben vorausgesetzt:

$$W_{elj}(\varepsilon(\mathbf{u})) = \frac{\mu_j}{p_j} (\kappa_j + |\varepsilon^D(\mathbf{u})|^2)^{\frac{p_j}{2}} + c_j (\text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u})))^2 \quad \text{für das Material } M_j. \quad (1.27)$$

Dabei sind $p_j \in (1, \infty)$, $\mu_j \in \mathbb{R}^+$, $\kappa_j \in [0, 1]$, $c_j \in (0, \infty)$ für $j = 1, 2$ Materialparameter und $\varepsilon^D(\mathbf{u})$ bezeichnet den deviatorische Anteil von $\varepsilon(\mathbf{u})$, vgl. (1.31)

Im Körper wird ein zweidimensionales Teilgebiet Ω_δ um die Rissspitze betrachtet, das entsprechend dem Mode III-Modellfall antiplanaren Schubspannungen, normal zu Ω_δ , ausgesetzt ist. Siehe Abbildung 1.4.

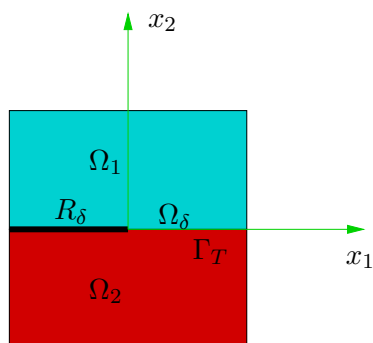


Abb. 1.4: 2D-Teilgebiet

Definition 1.3.1 (Zweidimensionales Gebiet mit Riss)

Das zweidimensionale Gebiet mit Riss Ω_δ liege in der x_1 - x_2 -Ebene. Das Interface Γ_T und der Riss R_δ der Länge δ befinden sich auf der x_1 -Achse. Eine Rissausbreitung würde in x_1 -Richtung stattfinden.

Weiter sei $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

Es sei $\overline{\Omega}_\delta = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ und $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, wobei Ω_1 aus dem Material M_1 und Ω_2 aus dem Material M_2 besteht. Ω_1 und Ω_2 seien ebenfalls offen und zusammenhängend.

Die Rissufer seien definiert durch $R_{\delta,j} = \partial\Omega_j \cap R_\delta$ für $j = 1, 2$.

Wir setzen $\Omega = \text{int } \overline{\Omega}_\delta$ und $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \Omega_\delta$.

Bemerkung 1.3.1

Weil ein Interface-Riss behandelt wird, sind die Teilgebiete Ω_1, Ω_2 unabhängig von der Risslänge δ .

Aufgrund der antiplanaren Schubspannungen ist das Verschiebungsfeld \mathbf{u} auf $\overline{\Omega}_\delta$ gegeben durch

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{u}|_{\overline{\Omega}_1}(x_1, x_2) + \mathbf{u}|_{\overline{\Omega}_2}(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_j^{(3)}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

$$\text{wobei } u_1^{(3)}(x_1, x_2) = u_2^{(3)}(x_1, x_2) \text{ auf dem Interface } \Gamma_T \text{ gilt.} \quad (1.29)$$

Für $j \in \{1, 2\}$ lautet der linearisierte Verzerrungstensor gemäß Gleichung (1.4)

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\partial_{x_1} u_j^{(3)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\partial_{x_2} u_j^{(3)} \\ \frac{1}{2}\partial_{x_1} u_j^{(3)} & \frac{1}{2}\partial_{x_2} u_j^{(3)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Wegen $\text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) = 0$ ist der deviatorische Anteil des linearisierten Verzerrungstensors $\varepsilon^D(\mathbf{u})$ gegeben durch:

$$\varepsilon^D(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u}) - \frac{1}{3}\text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u}))\text{Id} = \varepsilon(\mathbf{u}). \quad (1.31)$$

In Vektorschreibweise ist

$$\vec{\varepsilon}^D(\mathbf{u}) = \vec{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_{x_2} u_j^{(3)} \\ \partial_{x_1} u_j^{(3)} \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (1.32)$$

Der linearisierte Verzerrungstensor enthält also $\nabla u_j^{(3)}$ als einzigen Nicht-Nulleintrag. Somit ergibt sich für $j \in \{1, 2\}$ die elastische Verzerrungsenergiedichte

$$W_{elj}(\varepsilon(\mathbf{u})) = W_{elj}(\nabla u_j^{(3)}) = \frac{\mu_j}{p_j}(\kappa_j + |\nabla u_j^{(3)}(x_1, x_2)|^2)^{\frac{p_j}{2}} + 0. \quad (1.33)$$

Mit Formel (1.20) gilt für den Spannungstensor

$$\Sigma_j(\mathbf{x}, F) = \frac{\partial W_{elj}}{\partial F}(\mathbf{x}, F) = \frac{\mu_j}{p_j} \frac{p_j}{2}(\kappa_j + |F|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} 2F, \quad (1.34)$$

wobei $F = \nabla u_j^{(3)}$ ist. Daher ist

$$\Sigma_j(\mathbf{x}, \nabla u_j^{(3)}(\mathbf{x})) = DW_{elj}(\nabla u_j^{(3)}(\mathbf{x})) = \mu_j(\kappa_j + |\nabla u_j^{(3)}(\mathbf{x})|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (1.35)$$

Damit die beiden Materialien am Interface Γ_T miteinander verbunden sind, müssen dort die Verschiebungsfelder übereinstimmen und sich die Spannungsvektoren aufheben. Auf Γ_T gelten daher folgende Transmissionsbedingungen:

$$u_1^{(3)} = u_2^{(3)} \text{ auf } \Gamma_T, \quad (1.36)$$

$$DW_{el1}(\nabla u_1^{(3)}) \cdot \mathbf{n}_{12} + DW_{el2}(\nabla u_2^{(3)}) \cdot \mathbf{n}_{21} = 0 \text{ auf } \Gamma_T. \quad (1.37)$$

Diese Bedingung sichert die Wohldefiniertheit von $u^{(3)}$ und $DW_{el}(\nabla u^{(3)})$ im Verbund Ω_δ .

Die Rissufer sollen nicht in Kontakt stehen und keine Kräfte aufeinander ausüben. Daher sind sie spannungsfrei und es sind hier homogene Neumanndaten vorzugeben.

Durch Einsetzen von $DW_{el}(\nabla u)$ in die Gleichgewichtsbedingung (1.16), (1.18) kann für vorgegebene, skalare, genügend glatte Kraftdichten $f : \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$, sowie einer Verschiebung $g : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$ nun folgendes Transmissions-Randwert-Problem formuliert werden (siehe hierzu Abbildung 1.5):

Definition 1.3.2 (Transmissions-Randwert-Problem)

Finde $u^{(3)} = u : \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u_j = u|_{\Omega_j}$, $j \in \{1, 2\}$ für vorgegebene Funktionen $f : \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h|_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} = h_j$ und $g : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$, sodass:

$$-\mu_j \operatorname{div} \left((\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \right) = f \text{ in } \Omega_j, \quad (1.38)$$

$$u_1 - u_2 = 0 \text{ auf } \Gamma_T, \quad (1.39)$$

$$\mu_1 (\kappa_1 + |\nabla u_1|^2)^{\frac{p_1-2}{2}} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_{12} + \mu_2 (\kappa_2 + |\nabla u_2|^2)^{\frac{p_2-2}{2}} \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_{21} = 0 \text{ auf } \Gamma_T, \quad (1.40)$$

$$u = g \text{ auf } \Gamma_D, \quad (1.41)$$

$$\mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \cdot \mathbf{n}_j = h_j \text{ auf } \Gamma_N \cap \partial\Omega_j, \quad (1.42)$$

$$\mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \cdot \mathbf{n}_j = 0 \text{ auf } R_{\delta j}. \quad (1.43)$$

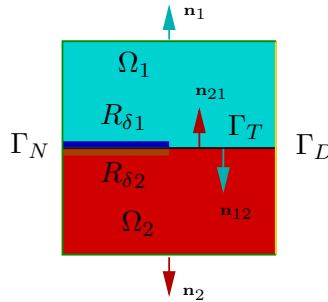


Abb. 1.5: Aufteilung des Randes von Ω_δ

Bemerkung 1.3.2

In Zukunft setzen wir $\Gamma_{\tilde{N}j} = (\Gamma_N \cap \partial\Omega_j) \cup R_{\delta j}$, $\Gamma_{\tilde{N}} = \Gamma_N \cup R_{\delta 1} \cup R_{\delta 2}$ und

$$\tilde{h} : \Gamma_{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{h} = \begin{cases} h & \text{auf } \Gamma_N, \\ 0 & \text{auf } R_{\delta 1} \cup R_{\delta 2}. \end{cases}$$

Bemerkung 1.3.3

Die Wahl von $\kappa_j = 0$, $j \in \{1, 2\}$, führt in Gleichung (1.38) zum p_j -Laplace-Operator auf Ω_j .

Kapitel 2

Transmissions-Randwertprobleme

2.1 Herleitung einer schwachen Formulierung

Im Folgenden soll eine schwache Formulierung für das in Definition 1.3.2 eingeführte Transmissions-Randwertproblem erstellt werden. Dazu müssen besondere Funktionenräume eingeführt werden, die das Verhalten von Funktionen angemessen widerspiegeln, die auf einem Gebiet mit Riss Ω_δ definiert sind und auf Teilgebieten unterschiedlichen Operatorgleichungen genügen. Da die Lösung des Transmissions-Randwertproblems und die Testfunktionen der schwachen Formulierung gewissen Randbedingungen genügen müssen, wird ein Spursatz, sowie die Existenz einer Fortsetzung des Dirichlet-Randdatums benötigt. Dabei bringt der Riss einige Probleme mit sich. Zum Einen liegt $C^\infty(\overline{\Omega}_\delta)$ nicht dicht in einem Sobolev-Raum über dem Gebiet mit Riss Ω_δ . Dies ist jedoch Voraussetzung für die Definition einer Spur auf dem Rand und für die Definition einer Fortsetzung ins Gebiet. Zum Anderen ist ein Gebiet mit Riss kein Lipschitz-Gebiet, eine Eigenschaft, die ebenfalls für einen Spursatz benötigt wird. Diese Schwierigkeiten sollen in den folgenden beiden Abschnitten genauer erläutert und gelöst werden.

2.1.1 Anforderungen an das Gebiet

Warum ein Gebiet mit Riss $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^2$ kein Lipschitz-Gebiet ist, auch wenn $\Omega = \text{int}\overline{\Omega}_\delta$ ein solches ist, läßt sich anhand der Definition des Lipschitz-Gebietes und der gleichmäßigen Kegeleigenschaft leicht einsehen:

Definition 2.1.1 ((gleichmäßige) Kegeleigenschaft [21] S.45, Def.2.2, 2.3)

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ hat die Kegeleigenschaft, falls für jedes $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ein Kegel C mit Spitze in \mathbf{x} existiert, sodass C in Ω enthalten ist.

Das Gebiet Ω hat die gleichmäßige Kegeleigenschaft, falls für alle \mathbf{y} in einer Umgebung $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ des Punktes \mathbf{x} der selbe Kegel C verwendet werden kann, ohne dass dieser gedreht werden darf.

Ein Lipschitz-Gebiet ist dagegen wie folgt definiert:

Definition 2.1.2 (Lipschitz-Gebiet [17] S.92, Bemerkung)

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Lipschitz-Gebiet, falls für jeden Randpunkt $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ eine Umgebung $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ und eine Lipschitz-stetige, bijektive Funktion $\varphi_{\mathbf{x}}$ existiert, sodass $\varphi_{\mathbf{x}}(\Omega \cap \mathcal{U}(\mathbf{x}))$ auf einer Seite von $\varphi_{\mathbf{x}}(\partial\Omega \cap \mathcal{U}(\mathbf{x}))$ liegt.

Bemerkung 2.1.1

Der Rand eines Lipschitz-Gebietes kann lokal durch eine Lipschitz-stetige Funktion dargestellt werden.

Der Zusammenhang zwischen Gebieten mit Kegeleigenschaft und Lipschitz-Gebieten ist in einem Lemma formuliert.

Lemma 2.1.1 (vgl. [17] S.92)

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann ein Lipschitz-Gebiet, wenn es die gleichmäßige Kegeleigenschaft hat.

Anhand von Abbildung 2.1 sehen wir, dass für einen Punkt $\mathbf{x} \in R_\delta$ mit Umgebung $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ Punkte $\mathbf{y} \in \mathcal{U}(\mathbf{x})$ existieren, in denen der verwendete Kegel C den Riss schneidet. Weil C dann nicht vollständig in Ω_δ enthalten ist, liegt keine gleichmäßige Kegeleigenschaft vor und Ω_δ ist nach Lemma 2.1.1 kein Lipschitz-Gebiet. Darf man C in \mathbf{y} jedoch drehen, so kann der gedrehte Kegel in Ω_δ enthalten sein. Daher weist ein beliebiges zweidimensionales Gebiet mit Riss zumindest die Kegeleigenschaft auf, sofern $\Omega = \text{int } \Omega_\delta$ diese besitzt. Die Kegeleigenschaft wird genutzt, um spezielle Gebiete mit Riss zu definieren, auf denen sich eine schwache Formulierung finden lässt. Ein solches Gebiet wird als zulässiges Gebiet bezeichnet. Die Forderungen für ein zulässiges Gebiet sind in Abbildung 2.2 veranschaulicht.

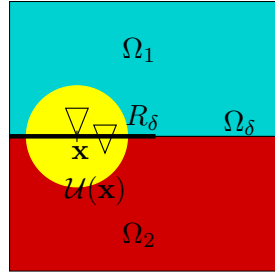


Abb. 2.1: Kegel in Ω_δ

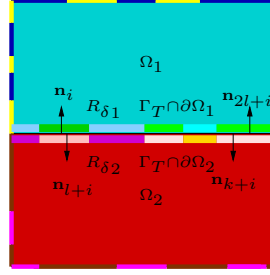


Abb. 2.2: zulässiges Gebiet

Definition 2.1.3 (zulässiges Gebiet)

Ein Gebiet Ω_δ mit Riss R_δ und Interface Γ_T ist zulässig, falls gilt:

1. $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^2$ ist offen und beschränkt und hat die Kegeleigenschaft.
2. $\Omega = \text{int } \bar{\Omega}_\delta$, sowie Ω_1 und Ω_2 sind offene, beschränkte Lipschitz-Gebiete mit $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$.
3. $\partial\Omega_\delta = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{R}_\delta$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_N \cap R_\delta = \emptyset$, $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{R}_\delta = \emptyset$.
4. die Ränder $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ lassen sich in Lipschitz-stetige offene Teilstücke $\bar{\Gamma}_i$, $i = 1, \dots, N$, unterteilen mit stetigen Normalenvektoren \mathbf{n}_i . Dabei soll gelten:
 $R_{\delta 1} = \partial\Omega_1 \cap R_\delta = \cup_{i=1}^l \bar{\Gamma}_i$, $R_{\delta 2} = \partial\Omega_2 \cap R_\delta = \cup_{i=l+1}^{2l} \bar{\Gamma}_i$,
 $\mathbf{n}_i = -\mathbf{n}_{l+i}$, $i = 1, \dots, l$,
 $\Gamma_T \cap \partial\Omega_1 = \cup_{i=2l+1}^k \bar{\Gamma}_i$, $\Gamma_T \cap \partial\Omega_2 = \cup_{i=k+1}^{2k} \bar{\Gamma}_i$,
 $\mathbf{n}_i = -\mathbf{n}_{k+i}$, $i = 2l+1, \dots, k$,
 $\bar{\Gamma}_N \cap \partial\Omega_1 = \cup_{i=2k+1}^m \bar{\Gamma}_i$, $\bar{\Gamma}_N \cap \partial\Omega_2 = \cup_{i=m+1}^M \bar{\Gamma}_i$,
 $\bar{\Gamma}_D \cap \partial\Omega_1 = \cup_{i=M+1}^n \bar{\Gamma}_i \neq \emptyset$, $\bar{\Gamma}_D \cap \partial\Omega_2 = \cup_{i=n+1}^N \bar{\Gamma}_i \neq \emptyset$,
wobei $1 \leq l \leq k < m < M \leq n \leq N$ und es sei $\text{meas } \Gamma_D > 0$.
5. Für $j = 1, 2$ ist $\partial\Omega_j = \bar{R}_{\delta j} \cup (\bar{\Gamma}_T \cap \partial\Omega_j) \cup (\bar{\Gamma}_N \cap \partial\Omega_j) \cup (\bar{\Gamma}_D \cap \partial\Omega_j)$.

Gemäß [13] S.59 Satz 3.26 und S.61 Bemerkung 3.3 gilt der Sobolevsche Einbettungssatz für Gebiete mit Kegeleigenschaft. Die Forderungen 2. und 4. sichern für $W^{1,p_j}(\Omega_j)$ die Existenz einer Spurabbildung $\gamma_{\partial\Omega_j} : W^{1,p_j}(\Omega_j) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p_j},p_j}(\partial\Omega_j)$, sowie von Spurabbildungen γ_{Γ_i} auf Teilstücke $\Gamma_i \subset \partial\Omega_j$. Dies wird im nächsten Abschnitt von Nutzen sein.

2.1.2 Funktionenräume und Spursatz

In diesem Abschnitt werden die Funktionenräume eingeführt, die bei einer schwachen Formulierung erforderlich sind. Unter Verwendung eines zulässigen Gebietes sind das spezielle Sobolev-Räume für die ein Spursatz gilt. Mithilfe dessen werden die nötigen Spurräume definiert.

Für ein Problem der Form

$$-\operatorname{div}(DW_{el}(\nabla u)) = -\operatorname{div}\left(\mu(\kappa + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u\right) = f \text{ auf } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

$$u = g \text{ auf } \Gamma_D \quad (2.2)$$

$$\mu(\kappa + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u \cdot \mathbf{n} = h \text{ auf } \Gamma_N, \quad (2.3)$$

über dem Lipschitz-Gebiet Ω , werden folgende Funktionenräume bei der schwachen Formulierung benötigt:

Definition 2.1.4

Sei $p \in (1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Lipschitz-Gebiet. Dann ist

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad (2.4)$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad (2.5)$$

$$V_{(g)}^p(\Omega) = \{ u \in W^{1,p}(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = g \}. \quad (2.6)$$

Die Ableitungen im Raum $W^{1,p}(\Omega)$ und im affinen Raum $V_{(g)}^p(\Omega)$ sind im Distributionensinn zu verstehen. Für den Raum $W^{1,p}(\Omega)$ lässt sich über einen Widerspruch zu den Sobolevschen Einbettungssätzen die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung beweisen. Wir entnehmen diese aus [18] Satz 7.8, S. 67.

Satz 2.1.1 (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung für $W^{1,p}(\Omega)$)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Weiter sei $V \subset W^{1,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum mit der Eigenschaft:

Für alle $v \in V$ folgt aus $\nabla v = 0$, dass auch $v = 0$ ist.

Dann existiert eine Konstante $c_{PF} > 0$, sodass für alle $v \in V$ gilt:

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq c_{PF} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Mithilfe der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung lässt sich für den Raum $V_{(0)}^p(\Omega)$ folgende Normäquivalenz nachweisen, vgl. [18], Satz 7.8, S.67.

Satz 2.1.2 (Normäquivalenz)

Für $u \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega)$ gilt:

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Die schwache Lösung u von Problem (2.1)-(2.3) ist im Raum $W^{1,p}(\Omega)$ zu finden. Daher wird die schwache Lösung von Problem 1.3.2 über jedem Teilgebiet Ω_j ein Element aus $W^{1,p_j}(\Omega_j)$ für $j \in \{1, 2\}$ sein müssen. Ist $\vec{p} = (p_1, p_2)$ und $p_{\min} = \min\{p_1, p_2\}$, so gilt auf beiden Teilgebieten stets $W^{1,p_j}(\Omega_j) \subset W^{1,p_{\min}}(\Omega_j)$, sowie $L^{p_j}(\Omega_j) \subset L^{p_{\min}}(\Omega_j)$. Diese Tatsache wurde bereits von W. B. Liu in [12] zur Definition von geeigneten Funktionenräumen verwendet. Entsprechend definieren wir die folgenden Funktionenräume.

Definition 2.1.5 (Funktionenräume)

Sei Ω_δ ein zulässiges Gebiet. Für $\vec{p} = (p_1, p_2)$ und $p_{\min} = \min\{p_1, p_2\}$ ist

$$W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta) = \{u \in W^{1,p_{\min}}(\Omega_\delta) : u_j = u|_{\Omega_j} \in W^{1,p_j}(\Omega_j), j = 1, 2\} \quad (2.7)$$

$$\text{mit der Norm} \quad \|u\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)} = \|u_1\|_{W^{1,p_1}(\Omega_1)} + \|u_2\|_{W^{1,p_2}(\Omega_2)}, \quad (2.8)$$

$$V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) = \left\{ u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta) : \gamma_{\Gamma_D} u = g \right\}, \quad (2.9)$$

$$L^{\vec{p}}(\Omega_\delta) = \{u \in L^{p_{\min}}(\Omega_\delta) : u_j = u|_{\Omega_j} \in L^{p_j}(\Omega_j), j = 1, 2\} \quad (2.10)$$

$$\text{mit der Norm} \quad \|u\|_{L^{\vec{p}}(\Omega_\delta)} = \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega_1)} + \|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega_2)}. \quad (2.11)$$

Dabei ist γ_{Γ_D} in Formel (2.9) der Spuroperator für den Dirichletrand im Sinne von Satz (2.1.4).

In [12], bzw. [4] sind die Eigenschaften dieser Räume genauer ausgeführt.

Lemma 2.1.2 ([12], [4])

Sei $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^2$ ein zulässiges Gebiet und $\vec{p} = (p_1, p_2)$ mit $p_j \in (1, \infty)$ für $j \in \{1, 2\}$. Dann sind die normierten Funktionenräume $(W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta), \|\cdot\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)})$, $(L^{\vec{p}}(\Omega_\delta), \|\cdot\|_{L^{\vec{p}}(\Omega_\delta)})$, aus Definition 2.1.5 separable, reflexive Banachräume.

Die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung gilt auch im Raum $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$:

Satz 2.1.3 (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung für $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$, [10] S. 27)

Sei $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^2$ ein zulässiges Gebiet und $V \subset W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ ein abgeschlossener Unterraum für den aus $u \in V$, mit $\nabla u = 0$ in Ω_δ folgt, dass $u = 0$ ist in Ω_δ .

Dann existiert eine Konstante $c_{PF} > 0$, sodass die Abschätzung

$$\|u\|_{L^{\vec{p}}(\Omega_\delta)} \leq c_{PF} \|\nabla u\|_{L^{\vec{p}}(\Omega_\delta)} \quad \text{für alle } u \in V$$

erfüllt ist.

Wir befassen uns nun eingehender mit dem Problem der Spurbildung für Funktionen aus dem Raum $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$. Um einen Spursatz für $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ zu formulieren, wäre die Dichtheit von $C^\infty(\overline{\Omega_\delta})$ nötige Voraussetzung. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt folgende Überlegung: Eine Funktion aus $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ darf auf den beiden Rissufern R_{δ_1} , R_{δ_2} verschiedene Werte annehmen, d.h. $u|_{R_{\delta_1}} \neq u|_{R_{\delta_2}}$ ist zulässig. Bildet man $\overline{\Omega_\delta}$, so ist der Riss R eine Teilmenge des Inneren von $\overline{\Omega_\delta}$, andererseits ist jedoch $\Omega = \text{int}\overline{\Omega_\delta} \neq \Omega_\delta$. Deshalb nehmen Funktionen $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega_\delta})$ auf den Rissufern keine unterschiedlichen Werte an, d.h. $\eta|_{R_{\delta_1}} = \eta|_{R_{\delta_2}}$. Nun ist leicht einzusehen, dass $C^\infty(\overline{\Omega_\delta})$ nicht dicht in $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ liegen kann.

Da die Berandungen $\partial\Omega_\delta$, $\partial\Omega_1$ und $\partial\Omega_2$ nach Voraussetzung aufgeteilt werden in Rissufer $R_{\delta 1}$, $R_{\delta 2}$, Interface Γ_T , sowie Dirichlet- und Neumannrand Γ_D , bzw. Γ_N genügt es, einen Spursatz auf Teile des Randes zu formulieren. Zulässige Unterteilungen sind aufgrund von Definition 2.1.3 vorhanden. Wir orientieren uns bei der Formulierung des Spursatzes für ein zulässiges Gebiet an [9] Satz 2.5, S.6.

Satz 2.1.4 (Spursatz für ein zulässiges Gebiet)

Sei Ω_δ ein zulässiges Gebiet und $\Gamma = \cup_{i \in I} \Gamma_i$ ein Teilstück der Berandung, $I \subset \{1, \dots, N\}$. Für $j = 1, 2$ sei ferner $1 < p_j < \infty$. Dann existiert genau eine lineare, stetige Abbildung

$$\gamma_\Gamma : W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow W^{1 - \frac{1}{p_{\min}}, p_{\min}}(\Gamma)$$

mit folgenden Eigenschaften:

Für $i \in I$ ist $\Gamma_i \subset \partial\Omega_j$ und daher

1. $\gamma_{\Gamma_i} = \gamma_\Gamma|_{\Gamma_i} : W^{1, p_j}(\Omega_j) \rightarrow W^{1 - \frac{1}{p_j}, p_j}(\Gamma_i)$.
2. für alle $u \in C^\infty(\bar{\Omega}_j)$ gilt: $\gamma_{\Gamma_i}(u) = u|_{\Gamma_i}$.

Beweis

Es ist $\Gamma = \cup_{i \in I} \Gamma_i$ ein Teilstück der Berandung eines zulässigen Gebietes. Somit ist jedes Γ_i , $i \in I$ nach Definition Lipschitz-stetig mit stetigem Normaleneinheitsvektor \mathbf{n}_i . Zudem gilt $\Gamma_i \subset \partial\Omega_j$, $j = 1, 2$ für alle $i \in I$, wobei Ω_j ein Lipschitz-Gebiet ist. Damit sind die Voraussetzungen des Spursatzes 2.5, S.6 aus [9] erfüllt und folglich existiert genau eine lineare, stetige Abbildung

$$\gamma_{\Gamma_i} : W^{1, p_j}(\Omega_j) \rightarrow W^{1 - \frac{1}{p_j}, p_j}(\Gamma_i),$$

die 2. erfüllt. Da für alle $v \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)$ insbesondere $v \in W^{1, p_{\min}}(\Omega_\delta)$ erfüllt ist, folgt

$$\gamma_{\Gamma_i} : W^{1, p_{\min}}(\Omega_j) \rightarrow W^{1 - \frac{1}{p_{\min}}, p_{\min}}(\Gamma_i).$$

Setzt man $\gamma_\Gamma = \sum_{i \in I} \gamma_{\Gamma_i}$, so gilt

$$\begin{aligned} \gamma_\Gamma & : W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow W^{1 - \frac{1}{p_{\min}}, p_{\min}}(\Gamma) \quad \text{und} \\ \gamma_\Gamma|_{\Gamma_i} = \gamma_{\Gamma_i} & : W^{1, p_j}(\Omega_j) \rightarrow W^{1 - \frac{1}{p_j}, p_j}(\Gamma_i). \end{aligned}$$

■

Da nun ein Spursatz für ein beliebiges Teilstück Γ des Randes eines zulässigen Gebietes Ω_δ zur Verfügung steht, lassen sich Spurräume für $W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)$ über Γ definieren.

Definition 2.1.6 (Spurräume)

Sei Ω_δ ein zulässiges Gebiet und $\Gamma = \cup_{i \in I} \Gamma_i \subset \partial\Omega_\delta$, mit $I \subset \{1, \dots, N\}$. Für $\vec{p} = (p_1, p_2)$ und $p_{\min} = \min\{p_1, p_2\}$ ist

$$W^{1 - \frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma) = \{u \in L^{p_{\min}}(\Gamma) : \exists \hat{u} \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta), \gamma_{\Gamma_i} \hat{u} = u|_{\Gamma_i}, \gamma_\Gamma \hat{u} = u\}$$

mit der Norm $\|u\|_{W^{1 - \frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma)} = \inf_{\substack{\hat{u} \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta) \\ \gamma_\Gamma \hat{u} = u}} \|\hat{u}\|_{W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)},$

$$\widetilde{W}^{1 - \frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma) = \{u \in W^{1 - \frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma) : \exists \tilde{u} \in W^{1 - \frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\partial\Omega_\delta) \text{ mit } \tilde{u}|_\Gamma = u \text{ und } \tilde{u}|_{\partial\Omega_\delta \setminus \Gamma} = 0\}$$

mit der Norm $\|u\|_{\widetilde{W}^{1 - \frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma)} = \|\tilde{u}\|_{W^{1 - \frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\partial\Omega_\delta)} = \inf_{\substack{\hat{u} \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta) \\ \gamma_{\partial\Omega_\delta} \hat{u} = \tilde{u}}} \|\hat{u}\|_{W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)}.$

Es ist zu bemerken, dass die oben definierten Spurräume nur solche Funktionen enthalten, für die eine Fortsetzung ins Gebiet aus $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ existiert.

Lemma 2.1.3

Der Funktionenraum $(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta), \|\cdot\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)})$ aus Definition 2.1.5 ist ein separabler, reflexiver Banachraum.

Beweis

Zunächst wird gezeigt, dass $(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta), \|\cdot\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)})$ ein Banachraum ist.

Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta), \|\cdot\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)})$. Wegen $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \subset W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ existiert ein Grenzwert $f \in W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$. Nun ist $\gamma_{\Gamma_D} f = 0$ zu zeigen.

Es ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\gamma_{\Gamma_D} f\|_{W^{1-\frac{1}{\vec{p}},\vec{p}}(\Gamma_D)} = \|\gamma_{\Gamma_D} f - \gamma_{\Gamma_D} f_n\|_{W^{1-\frac{1}{\vec{p}},\vec{p}}(\Gamma_D)} = \|\gamma_{\Gamma_D}(f - f_n)\|_{W^{1-\frac{1}{\vec{p}},\vec{p}}(\Gamma_D)} \\ &= \inf_{\substack{v \in W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta) \\ \gamma_{\Gamma_D} v = \gamma_{\Gamma_D}(f - f_n)}} \|v\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)} \leq \|f - f_n\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\gamma_{\Gamma_D} f = 0$ und $f \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Somit ist $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ ein bezüglich der $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ -Norm abgeschlossener Unterraum des separablen, reflexiven Banachraumes $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Separabilität und Reflexivität von $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ folgen aus den Eigenschaften von $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ [1] S.7, Th.1.21. ■

Nun sind alle Grundlagen für eine schwache Formulierung von 1.3.2 bereitgestellt.

2.1.3 Schwache Formulierung

In diesem Abschnitt wird unter Beachtung der starken Formulierung des Transmissions-Randwertproblems in Definition 1.3.2 eine schwache Formulierung hergeleitet und ermittelt, in welchen Räumen die auftretenden Funktionen zu finden sind.

Dazu werden die beiden Gleichungsseiten von (1.38) auf eine Testfunktion $v \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$, $v|_{\Omega_j} = v_j$ angewendet:

$$-\sum_{j=1}^2 \langle \operatorname{div}(DW_{el,j}(\nabla u_j)), v_j \rangle_{\Omega_j} = \langle f, v \rangle_{\Omega_\delta} \tag{2.12}$$

Unter der Annahme, dass $f \in L^{\vec{q}}(\Omega_\delta)$ und $\tilde{h} \in L^{\vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})$ ist, kann die duale Paarung durch Integration ersetzt werden:

$$-\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \operatorname{div}(DW_{el,j}(\nabla u_j)) v_j \, d\mathbf{x} = -\sum_{j=1}^2 \left(\int_{\Omega_j} \operatorname{div}(DW_{el,j}(\nabla u_j)) v_j \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_j} DW_{el,j}(\nabla u_j) \cdot \nabla v_j \, d\mathbf{x} \right) \tag{2.13}$$

Auf den ersten Term wird der Satz von Gauss angewendet:

$$\begin{aligned}
(2.13) &= -\sum_{j=1}^2 \left(\int_{\partial\Omega_j \cap \Gamma_D} + \int_{\partial\Omega_j \cap \Gamma_N} + \int_{R_{\delta_j}} \right) DW_{elj}(\nabla u_j) \cdot \mathbf{n}_j v_j ds \\
&\quad - \int_{\Gamma_T} (DW_{el1}(\nabla u_1) \cdot \mathbf{n}_{12} v_1 + DW_{el2}(\nabla u_2) \cdot \mathbf{n}_{21} v_2) ds + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} DW_{elj}(\nabla u_j) \cdot \nabla v_j d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega_\delta} f v d\mathbf{x} .
\end{aligned}$$

Unter Beachtung der Transmissionsbedingung (1.40) und $v_1 = v_2$ auf Γ_T , nach (1.39), ist

$$\int_{\Gamma_T} (DW_{el1}(\nabla u_1) \cdot \mathbf{n}_{12} v_1 + DW_{el2}(\nabla u_2) \cdot \mathbf{n}_{21} v_2) ds = 0 .$$

Da $v \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ ist, gilt $v|_{\Gamma_D} = 0$ und somit folgt für $j \in \{1, 2\}$

$$\int_{\partial\Omega_j \cap \Gamma_D} DW_{elj}(\nabla u_j) \cdot \mathbf{n}_j v_j ds = 0 .$$

Weil auf R_{δ_j} für $j \in \{1, 2\}$ homogene Neumanndaten vorliegen, gilt

$$\int_{R_{\delta_j}} DW_{elj}(\nabla u_j) \cdot \mathbf{n}_j v_j ds = 0 .$$

Unter Beachtung der Randbedingung auf Γ_N und der Form von $DW_{elj}(\nabla u_j)$ ergibt sich damit

$$\sum_{j=1}^2 \langle -\operatorname{div} DW_{elj}(\nabla u_j), v_j \rangle_{\Omega_j} = -\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \mu_j \operatorname{div} \left((\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \right) v_j d\mathbf{x} \quad (2.14)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \cdot \nabla v_j d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_N} h v ds \quad (2.15)$$

$$= \int_{\Omega_\delta} f v d\mathbf{x} = \langle f, v \rangle_{\Omega_\delta} . \quad (2.16)$$

Wie wir in Satz 2.2.2 beweisen werden ist $DW_{elj}(\nabla u_j) \in (L^{\vec{q}}(\Omega_j))^2$ für $(\nabla u_j) \in (L^{\vec{p}}(\Omega_j))^2$. Damit sind die Integrale unter der Summe in Ausdruck (2.15) wohldefiniert. Für schlechtere Dichten f, \tilde{h} kann die schwache Formulierung folglich vorgegeben werden durch:

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \cdot \nabla v_j d\mathbf{x} - \langle \tilde{h}, v \rangle_{\Gamma_N} = \langle f, v \rangle_{\Omega_\delta} . \quad (2.17)$$

Wir überlegen uns nun, welche Funktionenräume in Gleichung (2.17) zu wählen sind. Aus (2.17), (2.15) erkennen wir, dass ∇v_j über Ω_j für $j \in \{1, 2\}$ integrierbar sein muss. Zusammen mit (2.16) folgt $v \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)$ gemäß Definition 2.1.5. Da der Raum der Testfunktionen so gewählt wird, dass $v|_{\Gamma_D} = 0$ ist, folgt $v \in V_{(0)}^{\vec{p}}$ nach Definition 2.1.5. Also ist $f \in \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)\right)'$. Wegen $v = 0$ auf Γ_D liefert der Spursatz $(\gamma_{(\Gamma_{\tilde{N}})} v) \in \widetilde{W}^{1-\frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma_{\tilde{N}})$. Also folgt für die Funktion aus der Neumannbedingung auf Neumannrand und Rissufern $\tilde{h} \in \left(\widetilde{W}^{1-\frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma_{\tilde{N}})\right)' = W^{-\frac{1}{\vec{q}}, \vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})$, wegen $1 - \frac{1}{p_j} = \frac{1}{q_j}$ und $j \in \{1, 2\}$. Da die Lösung u die Beziehung $(\gamma_{\Gamma_D} u) = g$ erfüllen muss, folgt $u \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \subset W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)$. Für die Funktion g aus der Dirichletbedingung erhalten wir daher mit dem Spursatz $g \in W^{1-\frac{1}{\vec{p}}}(\Gamma_D)$. Aufgrund der Definition dieses Spurraumes existiert für g eine Fortsetzung $\hat{g} \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)$ in das Gebiet Ω_δ . Setzen wir $u = u^0 + \hat{g} \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)$ bei bekannter Fortsetzung $\hat{g} \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)$ und ersetzen dies in (2.15), so können wir uns darauf beschränken, die Funktion $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ zu suchen, die die Gleichung (2.17) erfüllt.

Wir definieren daher die folgende schwache Formulierung:

Definition 2.1.7 (Schwache Formulierung über $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$)

Finde $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ für gegebene Funktionen $f \in \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)\right)'$, $\tilde{h} \in W^{-\frac{1}{\vec{q}}, \vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})$

für $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1$, $j = 1, 2$ und $g \in W^{1-\frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma_D)$ mit Fortsetzung $\hat{g} \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)$, sodass für alle $v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $v_j^0 = v^0|_{\Omega_{\delta_j}}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\delta_j}} \mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} (\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j) \cdot \nabla v_j^0 \, d\mathbf{x} = \langle f, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} + \langle \tilde{h}, v^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \quad (2.18)$$

mit $p_j \in (1, \infty)$, $\mu_j \in \mathbb{R}^+$, $\kappa_j \in [0, 1]$ für $j \in \{1, 2\}$.

Zur weiteren Untersuchung der schwachen Formulierung wird ein Operator $A_{\hat{g}}$ zur linken Seite von Gleichung (2.12) und eine Biform $a_{\hat{g}}$ zur linken Seite von (2.18) definiert:

Definition 2.1.8

Sei $p_j \in (1, \infty)$, $\mu_j \in \mathbb{R}^+$, $\kappa_j \in [0, 1]$ mit $j \in \{1, 2\}$. Für festes $g \in W^{1-\frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma_D)$ mit Fortsetzung $\hat{g} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ definieren wir einen Operator $A_{\hat{g}} : V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)\right)'$ mit $A_{\hat{g}}|_{W^{1, p_j}(\Omega_j)} = A_{\hat{g}}^j$ für $j \in \{1, 2\}$ durch:

$$\begin{aligned} \langle A_{\hat{g}} u^0, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} &= \sum_{j=1}^2 \langle A_{\hat{g}}^j u_j^0, v_j^0 \rangle_{\Omega_j} \\ &= \sum_{j=1}^2 \langle -\operatorname{div} DW_{el_j}(\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j), v_j^0 \rangle_{\Omega_j} \end{aligned}$$

für alle $v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ und $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Definition 2.1.9

Sei $p_j \in (1, \infty)$, $\mu_j \in \mathbb{R}^+$, $\kappa_j \in [0, 1]$ mit $j \in \{1, 2\}$. Für festes $g \in W^{1-\frac{1}{p}, \vec{p}}(\Gamma_D)$ mit Fortsetzung $\hat{g} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ definieren wir eine Biform $a_{\hat{g}} : V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \times V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a_{\hat{g}}|_{W^{1,p_j}(\Omega_j) \times W^{1,p_j}(\Omega_j)}(\cdot, \cdot) = a_{\hat{g}}^j(\cdot, \cdot)$ für $j \in \{1, 2\}$, durch:

$$a_{\hat{g}}(u^0, v^0) = \sum_{j=1}^2 a_{\hat{g}}^j(u_j^0, v_j^0) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\delta_j}} \mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} (\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j) \nabla v_j^0 \, dx$$

für alle $v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ und $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Bemerkung 2.1.2

Wegen $\tilde{h} = 0$ auf $(R_{\delta_1} \cup R_{\delta_2})$ ist $\langle \tilde{h}, v^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} = \langle h, v^0 \rangle_{\Gamma_N}$ für alle $v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Offensichtlich hängen der Operator $A_{\hat{g}}$ und die Biform $a_{\hat{g}}$ von den Materialparametern μ_j, p_j und κ_j für $j \in \{1, 2\}$, sowie von der Fortsetzung \hat{g} ab. Mit der soeben geführten Herleitung ist klar, dass $A_{\hat{g}}$ und $a_{\hat{g}}$ bei gegebenem $h \in W^{-\frac{1}{q}, \vec{q}}(\Omega_\delta)$ wie folgt zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \langle A_{\hat{g}} u^0, v^0 \rangle &= a_{\hat{g}}(u^0, v^0) + \langle \tilde{h}, v^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \\ &= a_{\hat{g}}(u^0, v^0) + \langle h, v^0 \rangle_{\Gamma_N} \quad \text{für alle } u^0, v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Im folgenden Abschnitt wird näher auf die funktionalanalytischen Eigenschaften der Menge der Operatoren $A_{\hat{g}}$ eingegangen.

2.2 Analysis der auftretenden Operatoren

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Operatoren $A_{\hat{g}}$ im Hinblick auf Definitions- und Wertebereich, Koerzitivität, Monotonie und Stetigkeit. Diese Eigenschaften sind hinreichend zum Nachweis der Existenz einer eindeutigen Lösung $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ der Operatorgleichung

$$\langle A_{\hat{g}} u^0, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} = \langle f, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} \quad \text{für alle } v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \text{ bei gegebenem } f \in \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)'$$

Aus Formel (2.19) wissen wir, dass

$$\langle A_{\hat{g}} u^0, v^0 \rangle = a_{\hat{g}}(u^0, v^0) + \langle \tilde{h}, v^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \quad \text{für alle } u^0, v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$$

ist für gegebene Funktionen $\hat{g} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$, $\tilde{h} \in W^{-\frac{1}{q}, \vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})$. Dabei ist $\langle \tilde{h}, \dots \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}}$ ein von u^0 unabhängiger Operator. Wir sehen daher, dass es gleichbedeutend ist, die oben genannten Eigenschaften für die Biform $a_{\hat{g}}$ nachzuweisen. Zunächst werden jedoch einige Ungleichungen vorgestellt, die für die anschließenden funktionalanalytischen Untersuchungen hilfreich sein werden.

2.2.1 Nützliche Ungleichungen

Im Folgenden führen wir nützliche Schreibweisen ein und beweisen einige Ungleichungen, die in den weiteren Untersuchungen, sowie zum Beweis der Griffithschen Formel verwendet werden.

Aus [1] S.23, ff ist die Hölder-Ungleichung entnommen:

Satz 2.2.1 (Hölder-Ungleichung)

Sei Ω ein Gebiet im \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$.

1. Sei $1 < p < \infty$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Ist $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$, so ist $(uv) \in L^1(\Omega)$ und es gilt

$$\int_{\Omega} |uv| \, d\mathbf{x} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \quad . \quad (2.20)$$

2. Sei $0 < p < 1$ und $q = \frac{p}{p-1} < 0$. Für $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$ ist $(uv) \in L^1(\Omega)$ und es gilt

$$\int_{\Omega} |uv| \, d\mathbf{x} \geq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \quad . \quad (2.21)$$

Aus [11] werden folgende Abschätzungen für Summen reeller Zahlen zitiert:

Satz 2.2.2 ([11], S. 25)

Für $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \geq 0$ gilt für $1 \leq i \leq n$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^{\alpha} \leq n^{\alpha-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i^{\alpha} \right) \quad \text{falls } \alpha \geq 1 \text{ und} \quad (2.22)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^{\alpha} \geq n^{\alpha-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i^{\alpha} \right) \quad \text{falls } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ ist.} \quad (2.23)$$

Aus Kapitel 1.3 ist bekannt:

Definition 2.2.1

Für festgewählte Parameter $p \in (1, \infty)$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ und $\kappa \in [0, 1]$ ist die elastische Verzerrungsenergiedichte gegeben durch die Funktion

$$W_{el} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\xi} \mapsto \frac{\mu}{p} (\kappa + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{p}{2}} \quad (2.24)$$

und die Spannung ist definiert durch die Ableitung

$$DW_{el} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\xi} \mapsto \mu (\kappa + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{p-2}{2}} \boldsymbol{\xi} \quad (2.25)$$

Die Funktion DW_{el} erfüllt die folgende Ungleichung:

Lemma 2.2.1

Sei DW_{el} wie oben definiert. Dann gilt für $p \geq 2$

$$|DW_{el}(\boldsymbol{\xi})| \leq \mu (1 + |\boldsymbol{\xi}|)^{p-1} \quad (2.26)$$

und für $1 < p < 2$

$$|DW_{el}(\boldsymbol{\xi})| \leq \mu |\boldsymbol{\xi}|^{p-1} \quad (2.27)$$

Beweis

Zunächst sei $p \geq 2$. Dann ergibt sich

$$|DW_{el}(\boldsymbol{\xi})| = \left| \mu(\kappa + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{p-2}{2}} \boldsymbol{\xi} \right| \leq \mu(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{p-2}{2}} (1 + |\boldsymbol{\xi}|) \leq \mu(1 + |\boldsymbol{\xi}|)^{p-1}.$$

Im Falle $1 < p < 2$ gilt

$$|DW_{el}(\boldsymbol{\xi})| = \left| \frac{\mu \boldsymbol{\xi}}{(\kappa + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right| \leq \frac{\mu |\boldsymbol{\xi}|}{(0 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{2-p}{2}}} = \mu |\boldsymbol{\xi}|^{p-1}.$$

■

Das nächste Lemma gibt Aufschluß über den Bildraum von DW_{el} .

Lemma 2.2.2

Sei $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \in (L^p(\Omega))^2$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $DW_{el}(\boldsymbol{\xi}) \in (L^q(\Omega))^2$.

Beweis

Es ist

$$\|DW_{el}(\boldsymbol{\xi})\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_{\Omega} |DW_{el}(\boldsymbol{\xi})|^q \, d\mathbf{x}. \quad (2.28)$$

Mit $p = (p-1)q$ ergibt sich aus Lemma 2.2.1 im Falle $p \geq 2$ die Abschätzung

$$(2.28) \leq \int_{\Omega} \mu^q (1 + |\boldsymbol{\xi}|)^{(p-1)q} \, d\mathbf{x} = \mu^q \int_{\Omega} (1 + |\boldsymbol{\xi}|)^p \, d\mathbf{x} \stackrel{(2.22)}{\leq} \mu^q 2^{p-1} \int_{\Omega} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^p) \, d\mathbf{x} < \infty.$$

Für den Fall $1 < p < 2$ folgt mit Lemma 2.2.1

$$(2.28) \leq \int_{\Omega} \mu^q |\boldsymbol{\xi}|^{(p-1)q} \, d\mathbf{x} = \mu^q \int_{\Omega} |\boldsymbol{\xi}|^p \, d\mathbf{x} < \infty.$$

■

Für die Ableitung von DW_{el} lässt sich folgende Abschätzung nachweisen:

Lemma 2.2.3

Die Ableitung von DW_{el} , die gegeben ist durch

$$D_{\boldsymbol{\xi}}(DW_{el}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mu(p-2)(\kappa + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{p-4}{2}} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \mu(\kappa + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{p-2}{2}} (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\nu}) \quad (2.29)$$

für $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^2$, erfüllt für $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a}$ und $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\nu} = \mathbf{b}$ folgende Bedingung:

Es existieren Konstanten $c > 0$ und $\tilde{k} \in \{0, 1\}$, sodass für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{a} \neq 0$ gilt:

$$D(DW_{el}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mu(p-2)(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-4}{2}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \mu(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\mathbf{b}|^2 \geq c \left(\tilde{k} + |\mathbf{a}| \right)^{p-2} |\mathbf{b}|^2, \quad (2.30)$$

mit $\tilde{k} = 0$ für $p \geq 2$ und $\tilde{k} = 1$ für $1 < p < 2$.

Beweis

Für $p \geq 2$ ist $\mu(p-2)(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-4}{2}}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \geq 0$ und mit $\kappa \geq 0$ folgt sofort

$$D(DW_{el}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} \geq \mu(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\mathbf{b}|^2 \geq c|\mathbf{a}|^{p-2} |\mathbf{b}|^2 .$$

In diesem Fall ist also $c = \mu$ und $\tilde{k} = 0$.

Im Falle $1 < p < 2$ wird die rechte Seite von (2.30) zunächst umgeformt zu

$$c(1 + |\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{b}|^2 = c(1 + |\mathbf{a}|)^{\frac{2(p-4)}{2}} |\mathbf{b}|^2 (1 + |\mathbf{a}|)^2 . \quad (2.31)$$

Für die linke Seite von (2.30) ist wegen $(p-2) < 0$ und $\kappa \in [0, 1]$ folgende Abschätzung gültig:

$$D(DW_{el}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} \geq \mu(p-2)|\mathbf{a}|^{p-4}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \mu(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\mathbf{b}|^2 . \quad (2.32)$$

Bei Division von Ausdruck (2.32) durch $(1 + |\mathbf{a}|)^{\frac{2(p-4)}{2}}$ erhält man:

$$\begin{aligned} & \mu(p-2) \frac{|\mathbf{a}|^{p-4}}{(1 + |\mathbf{a}|)^{\frac{2(p-4)}{2}}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \mu \frac{(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}}}{(1 + |\mathbf{a}|)^{\frac{2(p-4)}{2}}} |\mathbf{b}|^2 \\ \geq & \underbrace{\mu(p-2) \frac{|\mathbf{a}|^{p-4}}{|\mathbf{a}|^{p-4}}}_{=1} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \mu (1 + |\mathbf{a}|)^2 \underbrace{\left(\frac{(1 + |\mathbf{a}|)^2}{(\kappa + |\mathbf{a}|^2)} \right)^{\frac{2-p}{2}}}_{>1} |\mathbf{b}|^2 . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Wir schätzen die beiden unterklammerten Ausdrücke durch 1 nach unten ab und erhalten

$$\begin{aligned} (2.33) & \geq \mu(p-2) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \mu(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^2 |\mathbf{b}|^2 \\ & \geq \mu(p-2) |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 + \mu(\kappa^2 |\mathbf{b}|^2 + 2\kappa |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2) \\ & = \mu((p-1)|\mathbf{a}|^2 + 2\kappa |\mathbf{a}| + \kappa^2) |\mathbf{b}|^2 \\ & \geq \min\{\mu(p-1), \mu\kappa, \mu\kappa^2\} (|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}| + 1) |\mathbf{b}|^2 \\ & = c(1 + |\mathbf{a}|)^2 |\mathbf{b}|^2 \geq c(1 + |\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{b}|^2 . \end{aligned}$$

wegen $(1 + |\mathbf{a}|) > 1$ und $p-2 < 0$. ■

Aus [19], Formel(2.20) stammt folgender nützliche Trick:

Lemma 2.2.4

Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}|$ und $t \in [0, \frac{1}{4}]$ gilt:

$$|\mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})| \geq \frac{1}{4} (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|) . \quad (2.34)$$

Diese Abschätzung wird zum Beweis des folgenden Lemmas verwendet.

Lemma 2.2.5

Seien $W_{el} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $DW_{el} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie oben definiert. Dann existieren Konstanten $c > 0$ und $\tilde{k} \in \{0, 1\}$, sodass für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$W_{el}(\mathbf{a}) - W_{el}(\mathbf{b}) \geq DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c(\tilde{k} + |\mathbf{b}| + |\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 . \quad (2.35)$$

Beweis

Für $t \in [0, 1]$ und $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$\begin{aligned} W(t) &= W_{el}(\mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})) \quad \text{und} \\ w(t) &= DW_{el}(\mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})). \end{aligned}$$

Wir nehmen zunächst an, dass $(\mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})) \neq 0$ ist für jedes $t \in [0, 1]$.

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} W_{el}(\mathbf{a}) - W_{el}(\mathbf{b}) &= W(1) - W(0) = W'(0) + \int_0^1 W''(t) (1-t) dt \\ &= DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \int_0^1 (1-t) D_{\xi} (DW_{el}(\mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b}))) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) dt \\ &\stackrel{(2.30)}{\geq} DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \int_0^1 (1-t) c \left(\tilde{k} + |\mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})| \right)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 dt. \end{aligned}$$

Für $1 < p < 2$ ist

$$\begin{aligned} W_{el}(\mathbf{a}) - W_{el}(\mathbf{b}) &\geq DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c \int_0^1 (1-t) \frac{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2}{(1 + |(1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{a}|)^{2-p}} dt \\ &\geq DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c \int_0^1 (1-t) \frac{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2}{(1 + |\mathbf{b}| + |\mathbf{a}|)^{2-p}} dt \\ &= DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c(1 + |\mathbf{b}| + |\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{c}{2} (1 + |\mathbf{b}| + |\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2. \end{aligned}$$

Für $p \geq 2$ ist

$$W_{el}(\mathbf{a}) - W_{el}(\mathbf{b}) \geq DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c \int_0^1 (1-t) (|\mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 dt \quad (2.36)$$

Sei zunächst $|\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}|$, dann ergibt sich durch Anwendung von Lemma 2.2.4:

$$\begin{aligned} W_{el}(\mathbf{a}) - W_{el}(\mathbf{b}) &\geq DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c \int_0^{\frac{1}{4}} (1-t) \left(\frac{1}{4} (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|) \right)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 dt \\ &\geq DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{c}{4^{p-2}} (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{7c}{2^{2p+1}} (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2. \end{aligned}$$

Falls $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$, wird eine Variablentransformation im Integral von (2.36) durchgeführt, sodass $s = (1-t)$, also $t = 1-s$, $dt = -ds$ ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} W_{el}(\mathbf{a}) - W_{el}(\mathbf{b}) &= DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c \int_0^1 s (|\mathbf{s}\mathbf{b} + (1-s)\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 ds \\ &\geq DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c \int_0^{\frac{1}{4}} s (|\mathbf{s}\mathbf{b} + (1-s)\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 ds. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.4 folgt:

$$\begin{aligned} W_{el}(\mathbf{a}) - W_{el}(\mathbf{b}) &\geq DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{c}{4^{p-2}} (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \left[\frac{1}{2} s^2 \right]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{c}{2^{2p+1}} (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2. \end{aligned}$$

Falls ein $t_0 \in [0, 1]$ existiert, sodass $(\mathbf{b} + t_0(\mathbf{a} - \mathbf{b})) = 0$ ist, so wählen wir einen von \mathbf{b} linear unabhängigen Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ und setzen $\mathbf{a}_\varepsilon = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{z}$ mit $\varepsilon > 0$. Dann ist $(\mathbf{b} + t(\mathbf{a}_\varepsilon - \mathbf{b})) \neq 0$ für alle $t \in [0, 1]$ und der Beweis kann für \mathbf{b} und \mathbf{a}_ε wie oben geführt werden. Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man schließlich die Ungleichung (2.35) für \mathbf{b} und \mathbf{a} . ■

Mithilfe des Lemmas 2.2.5 lässt sich eine weitere Abschätzung für DW_{el} beweisen.

Lemma 2.2.6

Sei $DW_{el} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie oben definiert. Dann existieren Konstanten $\bar{c} > 0$ und $\tilde{k} \in \{0, 1\}$, sodass für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(DW_{el}(\mathbf{a}) - DW_{el}(\mathbf{b})) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \geq \bar{c}(\tilde{k} + |\mathbf{b}| + |\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \quad (2.37)$$

mit $\tilde{k} = 0$ für $p \geq 2$ und $\tilde{k} = 1$ für $1 < p < 2$.

Beweis

Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich aus Lemma 2.2.5

$$W_{el}(\mathbf{a}) - W_{el}(\mathbf{b}) \geq DW_{el}(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + c(\tilde{k} + |\mathbf{b}| + |\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$$

sowie durch Vertauschung von \mathbf{a} und \mathbf{b}

$$W_{el}(\mathbf{b}) - W_{el}(\mathbf{a}) \geq DW_{el}(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + c(\tilde{k} + |\mathbf{b}| + |\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2.$$

Die Addition dieser beiden Ungleichungen liefert

$$(DW_{el}(\mathbf{a}) - DW_{el}(\mathbf{b})) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \geq 2c(\tilde{k} + |\mathbf{b}| + |\mathbf{a}|)^{p-2} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$$

und mit $\bar{c} = 2c$ folgt die Behauptung. ■

Aus [6] S.39 wird verwendet:

Satz 2.2.3

Sind x und y positiv und ungleich, dann ist:

$$rx^{r-1}(x - y) > x^r - y^r > ry^{r-1}(x - y) \quad \text{für } r < 0 \text{ oder } r > 1, \text{ sowie} \quad (2.38)$$

$$rx^{r-1}(x - y) < x^r - y^r < ry^{r-1}(x - y) \quad \text{für } 0 < r < 1. \quad (2.39)$$

Damit lässt sich folgende Abschätzung beweisen.

Satz 2.2.4

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.

Für $p > 2$ ist

$$W_{el}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - W_{el}(\mathbf{a}) - DW_{el}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \leq c(1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{b}|^2 \quad (2.40)$$

und für $1 < p \leq 2$ ist

$$W_{el}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - W_{el}(\mathbf{a}) - DW_{el}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \leq c|\mathbf{a}|^{p-2} |\mathbf{b}|^2. \quad (2.41)$$

Beweis

Es ist

$$W_{el}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - W_{el}(\mathbf{a}) - DW_{el}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \frac{\mu}{p} \left((\kappa + |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2)^{\frac{p}{2}} - (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p}{2}} - p(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \right) \quad (2.42)$$

Nun wird Satz 2.2.3 angewendet mit $x = (\kappa + |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2)$, $y = (\kappa + |\mathbf{a}|^2)$ und $r = \frac{p}{2}$.

$p > 2$:

Für $p > 2$ gilt mit (2.38)

$$\begin{aligned} (2.42) &\leq \frac{\mu}{p} \left(\frac{p}{2} (\kappa + |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2)^{\frac{p-2}{2}} (|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2) - p(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \right) \\ &= \frac{\mu}{p} \left(\frac{p}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2)^{\frac{p-2}{2}} (2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2) - p(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} (2.43) &= \frac{\mu}{p} \left(\frac{p}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\mathbf{b}|^2 \right. \\ &\quad \left. + p \underbrace{\left((\kappa + |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2)^{\frac{p-2}{2}} - (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} \right)}_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \right) \\ &= \frac{\mu}{p} \left(\frac{p}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\mathbf{b}|^2 + A \right) \\ &\leq \frac{\mu}{2} (1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{b}|^2 + \frac{\mu}{p} A \end{aligned}$$

Ist $0 < \frac{p-2}{2} < 1$, so folgt mit (2.39)

$$\begin{aligned} A &\leq p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \left(\frac{p-2}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-4}{2}} (2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2) \right) \\ &\leq \frac{p(p-2)}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-4}{2}} (2|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})|\mathbf{b}|^2) \\ &\leq \frac{p(p-2)}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-4}{2}} (2(\kappa + |\mathbf{a}|^2)|\mathbf{b}|^2 + (1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2|\mathbf{b}|^2) \\ &\leq \frac{p(p-2)}{2} \left(2(\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\mathbf{b}|^2 + (1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{b}|^2 \right) \leq \frac{3p(p-2)}{2} (1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{b}|^2 . \end{aligned}$$

Im Falle $\frac{p-2}{2} > 1$ ist $p-4 > 0$ und es ergibt sich mit (2.38)

$$\begin{aligned} A &\leq p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \frac{p-2}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2)^{\frac{p-4}{2}} (2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2) \\ &\leq \frac{p(p-2)}{2} (1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-4} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) (2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2) \\ &\leq \frac{p(p-2)}{2} (1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-4} (2(1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) |\mathbf{b}|^2) \\ &\leq \frac{p(p-2)}{2} (1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-4} (2(1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 |\mathbf{b}|^2 + (1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 |\mathbf{b}|^2) \\ &= \frac{3p(p-2)}{2} (1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{b}|^2 . \end{aligned}$$

Also ist

$$W_{el}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - W_{el}(\mathbf{a}) - DW_{el}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \leq c(1 + |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2} |\mathbf{b}|^2$$

mit $c = \frac{\mu}{2}(3p - 5)$.

$1 < p \leq 2$:

Im Falle $1 < p \leq 2$ erhält man durch Anwendung von (2.39)

$$\begin{aligned} (2.42) &\leq \frac{\mu}{p} \left(\frac{p}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} (|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2) - p (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \right) \\ &\leq \frac{\mu}{p} \left(\frac{p}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} (2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2) - p (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \right) \\ &= \frac{\mu}{2} (\kappa + |\mathbf{a}|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\mathbf{b}|^2 \leq \frac{\mu}{2} |\mathbf{a}|^{p-2} |\mathbf{b}|^2 . \end{aligned}$$

Hier ist $c = \frac{\mu}{2}$. ■

2.2.2 Definitions-und Wertebereich

Aus der schwachen Formulierung in Definition 2.1.7 folgt, dass der Raum $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ über dem zulässigen Gebiet Ω_δ der Definitionsbereich der Operatoren $A_{\hat{g}}$ ist. Der folgende Satz gibt Aufschluss über deren Bildraum.

Satz 2.2.5

Für $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1$ mit $j \in \{1, 2\}$ und das zulässige Gebiet Ω_δ gilt:

$$A_{\hat{g}} : V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)' . \quad (2.44)$$

Beweis

Für $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ ist zu zeigen, dass $(A_{\hat{g}}u^0) \in \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)'$, dem Dualraum von $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$, ist.

Wegen $\tilde{h} : \Gamma_{\tilde{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, $v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ sowie

$$DW_{el_j}(\nabla u_j^0) \cdot \nabla v_j^0 = \left(\mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j^0|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j^0 \cdot \nabla v_j^0 \right) \in \mathbb{R} \text{ für } j \in \{1, 2\}$$

ist $\langle A_{\hat{g}}u^0, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} \in \mathbb{R}$. Da Gradientenbildung und Integration lineare Abbildungen sind, überträgt sich diese Eigenschaft auf $(A_{\hat{g}}u^0)$. Daher ist die Anwendung von $(A_{\hat{g}}u^0)$ auf eine Funktion $v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ linear. Die Stetigkeit von $(A_{\hat{g}}u^0)$ ist deshalb äquivalent zur Beschränktheit. Unter Beachtung von Definition 2.1.6 ist

$$\|v^0\|_{\widetilde{W}^{1-\frac{1}{p}, \vec{p}}(\Gamma_{\tilde{N}})} = \inf_{\substack{v \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta) \\ v|_{\Gamma_{\tilde{N}}} = v^0|_{\Gamma_{\tilde{N}}}, v|_{\partial\Omega_\delta \setminus \Gamma_{\tilde{N}}} = 0}} \|v\|_{W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)} \leq \|v^0\|_{W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)} .$$

Damit lässt sich nun die Beschränktheit von $(A_{\hat{g}}u^0)$ nachweisen:

$$\begin{aligned}
\|A_{\hat{g}}u^0\|_{(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta))'} &= \sup_{\|v^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}=1} \langle A_{\hat{g}}u^0, v^0 \rangle \\
&= \sup_{\|v^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}=1} \left(\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} DW_{elj} (\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j) \nabla v_j^0 \, d\mathbf{x} + \langle \tilde{h}, v \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \right) \\
&\stackrel{(2.20)}{\leq} \sup_{\|v^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}=1} \left(\sum_{j=1}^2 \|DW_{elj} (\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j)\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \|\nabla v_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \\
&\quad + \sup_{\|v^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}=1} \left(\|h\|_{W^{-\frac{1}{q},\vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})} \|v^0\|_{\widetilde{W}^{1-\frac{1}{p},\vec{p}}(\Gamma_{\tilde{N}})} \right) \\
&\leq \left(\|DW_{el} (\nabla u^0 + \nabla \hat{g})\|_{L^{\vec{q}}(\Omega_\delta)} + \|h\|_{W^{-\frac{1}{q},\vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})} \right) \|v^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)} < \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist $(A_{\hat{g}}u^0)$ linear und stetig und daher ein Element aus $(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta))'$. \blacksquare

2.2.3 Koerzitivität

Die Koerzitivität von Operatoren $A : X \rightarrow X'$, die von einem Banachraum X in dessen Dualraum X' abbilden, ist eine Verallgemeinerung der Koerzitivität von Funktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. So wird eine Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als koerzitiv bezeichnet, falls $F(x) \rightarrow \pm\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$. Analog dazu lautet die Definition der Koerzitivität für Operatoren, vgl. [16] S.56:

Definition 2.2.2

Ein Operator $A : X \rightarrow X'$, $u \mapsto Au$ ist koerzitiv, falls

$$\frac{\langle Au, u \rangle_X}{\|u\|_X} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \|u\|_X \rightarrow \infty. \quad (2.45)$$

Im Folgenden weisen wir diese Eigenschaft für die Menge der Operatoren $A_{\hat{g}}$ nach auf dem Banachraum $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Satz 2.2.6

Die Operatoren $A_{\hat{g}}$ sind koerzitiv auf $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Beweis

Die Operatoren $A_{\hat{g}}$ sind genau dann koerzitiv, wenn für jede Folge $\{u_n^0\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $\|u_n^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ nachgewiesen werden kann, dass

$$\frac{\langle A_{\hat{g}}u_n^0, u_n^0 \rangle}{\|u_n^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Dabei ist

$$\frac{\langle A_{\hat{g}}u_n^0, u_n^0 \rangle}{\|u_n^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}} = \frac{a_{\hat{g}}(u_n^0, u_n^0) + \langle \tilde{h}, u_n^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}}}{\|u_n^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}}.$$

Wir greifen auf diese Darstellung zurück und überlegen uns zunächst, dass es ausreicht, die Koerzitivität der Biformen $a_{\hat{g}}$ zu zeigen.

Damit gliedert sich der Beweis der Koerzitivität in folgende Schritte:

1. Schritt: Nachweis der Äquivalenz der Koerzitivität von Operator und Biform.
2. Schritt: Beweis zweier Lemmata zur Abschätzung der Biformen nach unten und oben.
3. Schritt: Untersuchung der Biformen auf Koerzitivität.

Wir führen nun den 1. Schritt aus.

1. Schritt: Nachweis der Äquivalenz der Koerzitivität von Operator und Biform

Satz 2.2.7

Die Operatoren $A_{\hat{g}}$ sind genau dann koerzitiv, wenn die Biformen $a_{\hat{g}}$ es sind.

Beweis

Es sei daran erinnert, dass nach Definition 2.1.6

$$\|u_n^0\|_{\widetilde{W}^{1-\frac{1}{\bar{p}}}, \bar{p}}(\Gamma_{\widetilde{N}})} = \inf_{\substack{v \in W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta) \\ v|_{\Gamma_{\widetilde{N}}}=u_n^0|_{\Gamma_{\widetilde{N}}}, v|_{\partial\Omega_\delta \setminus \Gamma_{\widetilde{N}}}=0}} \|v\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)} \leq \|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)} \quad (2.46)$$

ist. Damit läßt sich $\frac{\langle A_{\hat{g}}u_n^0, u_n^0 \rangle}{\|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)}}$ in beide Richtungen abschätzen.

Unter Berücksichtigung von (2.46) wird zunächst die Abschätzung nach unten durchgeführt:

$$\begin{aligned} \frac{\langle A_{\hat{g}}u_n^0, u_n^0 \rangle}{\|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)}} &\geq \frac{a_{\hat{g}}(u_n^0, u_n^0)}{\|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)}} - \frac{\|\tilde{h}\|_{W^{-\frac{1}{\bar{q}}}, \bar{q}}(\Gamma_{\widetilde{N}})} \|u_n^0\|_{\widetilde{W}^{1-\frac{1}{\bar{p}}}, \bar{p}}(\Gamma_{\widetilde{N}})}{\|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)}} \\ &\geq \frac{a_{\hat{g}}(u_n^0, u_n^0)}{\|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)}} - \|\tilde{h}\|_{W^{-\frac{1}{\bar{q}}}, \bar{q}}(\Gamma_{\widetilde{N}})}. \end{aligned}$$

Ebenso läßt sich mit (2.46) eine Abschätzung nach oben finden:

$$\begin{aligned} \frac{\langle A_{\hat{g}}u_n^0, u_n^0 \rangle}{\|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)}} &\leq \frac{a_{\hat{g}}(u_n^0, u_n^0)}{\|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)}} + \frac{\|\tilde{h}\|_{W^{-\frac{1}{\bar{q}}}, \bar{q}}(\Gamma_{\widetilde{N}})} \|u_n^0\|_{\widetilde{W}^{1-\frac{1}{\bar{p}}}, \bar{p}}(\Gamma_{\widetilde{N}})}{\|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)}} \\ &\leq \frac{a_{\hat{g}}(u_n^0, u_n^0)}{\|u_n^0\|_{W^{1, \bar{p}}(\Omega_\delta)}} + \|\tilde{h}\|_{W^{-\frac{1}{\bar{q}}}, \bar{q}}(\Gamma_{\widetilde{N}})}. \end{aligned}$$

Damit ist die Äquivalenz bewiesen. ■

Die Biformen $a_{\hat{g}}$ sind nach Definition (2.1.9) darstellbar durch:

$$a_{\hat{g}}(u_n^0, u_n^0) = \sum_{j=1}^2 a_{\hat{g}}^j(u_{n_j}^0, u_{n_j}^0).$$

Um ihre Koerzitivität nachzuweisen, ist es daher nötig, die beiden Summanden geeignet nach oben und unten abzuschätzen.

Die folgenden beiden Lemmata enthalten diese Abschätzungen.

Schritt 2: Beweis zweier Lemmata zur Abschätzung der Biformen

Lemma 2.2.7 (Abschätzung nach unten)

Sei $u^0 \in V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta)$ und $u = (u^0 + \hat{g}) \in V_{(g)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta)$ mit $u|_{\Omega_j} = u_j = u_j^0 + \hat{g}_j$ für $j \in \{1, 2\}$.

Für $p_j \geq 2$ ist

$$a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) \geq \mu_j \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - 2^{p_j-2} \left(|\Omega_j|^{p_j-1} + \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \quad (2.47)$$

und für $1 < p_j < 2$ gilt

$$a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) \geq \mu_j \left(\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1 \right) |\Omega_j| + 2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right). \quad (2.48)$$

Zusammenfassend gilt für $p_j \in (1, \infty)$:

$$a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) \geq \tilde{k}_{1j} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \tilde{k}_{\hat{g}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} - K_j. \quad (2.49)$$

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned} a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) &= \int_{\Omega_j} DW_{el,j}(\nabla u_j) \cdot \nabla u_j^0 \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_j} \mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \cdot \nabla (u_j - \hat{g}_j) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_j} \mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} |\nabla u_j|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_j} \mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \cdot \nabla \hat{g}_j \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

$p_j \geq 2$:

Ist $p_j \geq 2$, so folgt wegen $\kappa_j \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} (2.50) &\geq \mu_j \left(\int_{\Omega_j} |\nabla u_j|^{p_j} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_j} (1 + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} |\nabla u_j| |\nabla \hat{g}_j| \, d\mathbf{x} \right) \\ &\geq \mu_j \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \int_{\Omega_j} (1 + |\nabla u_j|)^{p_j-2} (1 + |\nabla u_j|) |\nabla \hat{g}_j| \, d\mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Auf das Integral in (2.51) wird die Hölder-Ungleichung (2.20) angewendet und wir erhalten

$$\begin{aligned} (2.51) &\geq \mu_j \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \|1 + |\nabla u_j|\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \\ &\geq \mu_j \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \left(|\Omega_j| + \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \\ &\geq \mu_j \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - 2^{p_j-2} \left(|\Omega_j|^{p_j-1} + \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt (2.22) angewendet wurde.

Also ergibt sich für $p_j \geq 2$:

$$a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) \geq \mu_j \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - 2^{p_j-2} \left(|\Omega_j|^{p_j-1} + \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)$$

$1 < p_j < 2$:

Im Falle $1 < p_j < 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (2.50) &\geq \mu_j \left(\int_{\Omega_j} \frac{|\nabla u_j|^2}{(1 + |\nabla u_j|^2)^{\frac{2-p_j}{2}}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_j} \frac{|\nabla u_j| |\nabla \hat{g}_j|}{|\nabla u_j|^{2-p_j}} \, d\mathbf{x} \right) \\ &= \mu_j \left(\int_{\Omega_j} \frac{(|\nabla u_j|^2 + 1)}{(1 + |\nabla u_j|^2)^{\frac{2-p_j}{2}}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_j} |\nabla u_j|^{p_j-1} |\nabla \hat{g}_j| \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_j} \frac{1}{(1 + |\nabla u_j|^2)^{\frac{2-p_j}{2}}} \, d\mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Wieder wird die Hölder-Ungleichung (2.20) auf das zweite Integral angewendet:

$$\begin{aligned} (2.52) &\geq \mu_j \left(\int_{\Omega_j} (1 + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{x} - \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - |\Omega_j| \right) \\ &\geq \mu_j \left(\int_{\Omega_j} 2^{\frac{p_j}{2}-1} (1 + |\nabla u_j|^{p_j}) \, d\mathbf{x} - \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - |\Omega_j| \right) \\ &= \mu_j \left(\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1 \right) |\Omega_j| + 2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right). \end{aligned}$$

Folglich ist im Falle $1 < p_j < 2$:

$$a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) \geq \mu_j \left(\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1 \right) |\Omega_j| + 2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right).$$

Ungleichung (2.49) folgt aus den Abschätzungen (2.47) und (2.48). ■

Lemma 2.2.8 (Abschätzung nach oben)

Sei $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ und $u = (u^0 + \hat{g}) \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $u|_{\Omega_j} = u_j = u_j^0 + \hat{g}_j$ für $j \in \{1, 2\}$.

Für $p_j \in (1, \infty)$ ist

$$a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) \leq k_1(p_j) \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} + k_{\hat{g}}(p_j) \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + K_{\hat{g}}(p_j). \quad (2.53)$$

Beweis

Es ist

$$a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) = \int_{\Omega_j} DW_{el_j}(\nabla u_j) \cdot \nabla u_j^0 \, d\mathbf{x}.$$

Nun sind die Fälle $p_j \geq 2$ und $1 < p_j < 2$ zu unterscheiden.

$p_j \geq 2$:

Hierfür wenden wir die Abschätzung (2.26) aus Lemma 2.2.1 an. Durch Ausnutzung der Hölder-Ungleichung (2.20) und der Ungleichung (2.22) erhalten wir unter Beachtung der Normäquivalenz 2.1.2:

$$\begin{aligned}
a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) &\leq \int_{\Omega_j} \mu_j (1 + |\nabla u_j|)^{p_j-1} |\nabla u_j^0| \, d\mathbf{x} \\
&\leq \mu_j \|1 + |\nabla u_j|\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \\
&\leq 2^{p_j-2} \mu_j \left(\|1 + |\nabla \hat{g}_j|\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} + \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} \right) \\
&\leq 2^{p_j-2} \mu_j \left(\|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} + \|1 + |\nabla \hat{g}_j|\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \\
&\leq k_1(p_j) \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} + k_{\hat{g}}(p_j) \|\nabla u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}.
\end{aligned}$$

$1 < p_j < 2$:

In diesem Fall wenden wir zunächst Abschätzung (2.27) aus Lemma 2.2.1 an. Ebenso folgt mithilfe der Hölder-Ungleichung (2.20) unter Ausnutzung der Normäquivalenz 2.1.2:

$$\begin{aligned}
a_{\hat{g}}^j(u_j^0, u_j^0) &\leq \int_{\Omega_j} \mu_j |\nabla u_j|^{p_j-1} |\nabla u_j^0| \, d\mathbf{x} \\
&\leq \int_{\Omega_j} \mu_j (|\nabla u_j^0| + |\nabla \hat{g}_j|)^{p_j-1} |\nabla u_j^0| \, d\mathbf{x} \\
&\leq \int_{\Omega_j} \mu_j (|\nabla u_j^0| + |\nabla \hat{g}_j|)^{p_j} \frac{|\nabla u_j^0|}{(|\nabla u_j^0| + 0)} \, d\mathbf{x} \\
&\leq 2^{p_j-1} \mu_j \left(\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} + \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} \right) \\
&\leq 2^{p_j-1} \mu_j \left(\|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} + \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} \right) \\
&= k_1(p_j) \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} + K_{\hat{g}}(p_j).
\end{aligned}$$

■

Nun kann die Koerzitivität der Biformen $a_{\hat{g}}$ bewiesen werden.

3. Schritt: Untersuchung der Biformen auf Koerzitivität

Sei $\{u_n^0\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ eine Folge mit $\|u_n^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und $u_n = u_n^0 + \hat{g}$ für festes $\hat{g} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$. Wegen

$$\|u_n^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)} = \|u_{n1}^0\|_{W^{1,p_1}(\Omega_{\Omega_1})} + \|u_{n2}^0\|_{W^{1,p_2}(\Omega_{\Omega_2})} \rightarrow \infty$$

folgt, dass mindestens eine der beiden Normen gegen ∞ streben muss.

Daher untersuchen wir die Fälle:

1. Fall: $\|u_{n,j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} < k < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei j entweder 1 oder 2 ist.
2. Fall: $\|u_{n,j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, wobei j sowohl 1 als auch 2 ist.

1. Fall:

Mit Abschätzung (2.53) aus Lemma 2.2.8 folgt sofort für alle $p_j \in (1, \infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{a_{\hat{g}}^j(u_{n_j}^0, u_{n_j}^0)}{\|u_{n_j}^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}} &\leq \frac{k_1(p_j) \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} + k_{\hat{g}}(p_j) \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + K_{\hat{g}}(p_j)}{\|u_{n_j}^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}} \\ &< \frac{k_1(p_j)k^{p_j} + k_{\hat{g}}(p_j)k + K_{\hat{g}}(p_j)}{\|u_{n_j}^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Fall:

In diesem Fall soll der Ausdruck $a_{\hat{g}}^j(u_{n_j}^0, u_{n_j}^0)$ nach unten abgeschätzt werden. Unter Verwendung von Abschätzung (2.49) aus Lemma 2.2.7 und Ausnutzung der Normäquivalenz erhält man:

$$\begin{aligned} a_{\hat{g}}^j(u_{n_j}^0, u_{n_j}^0) &\geq \tilde{k}_{1j} \|\nabla u_{n_j}\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \tilde{k}_{\hat{g}} \|\nabla u_{n_j}\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} - K_j \\ &\geq \tilde{k}_{1j} \left| \|\nabla u_{n_j}^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right|^{p_j} - \tilde{k}_{\hat{g}} \left(\|\nabla u_{n_j}^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} + \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} - K_j \\ &\geq \tilde{k}_{1j} \left| \frac{1}{c_j} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right|^{p_j} - \tilde{k}_{\hat{g}} \left(\|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} - K_j. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Wegen $\|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \rightarrow \infty$ existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \geq 2c_j \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad \text{ist.} \tag{2.55}$$

Damit ist $\|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq \frac{1}{2c_j} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}$ und es folgt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{c_j} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right| &= \frac{1}{c_j} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \\ &\geq \frac{1}{c_j} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \frac{1}{2c_j} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \\ &= \frac{1}{2c_j} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} (2.54) &\geq \frac{\tilde{k}_{1j}}{(2c_j)^{p_j}} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \tilde{k}_{\hat{g}} \left(1 + \frac{1}{2c_j} \right)^{p_j-1} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} - K_j \\ &= k_{1j} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - k_{\hat{g}} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} - K_j. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Weil $\|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \rightarrow \infty$ strebt, existiert ein Index $m_0 \geq n_0$, sodass für alle $n \geq m_0$

$$k_{1j} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - k_{\hat{g}} \|u_{n_j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} > 0 \quad \text{ist.} \tag{2.58}$$

Wir setzen $a_n = \max \left\{ \|u_{n1}^0\|_{W^{1,p_1}(\Omega_1)}, \|u_{n2}^0\|_{W^{1,p_2}(\Omega_2)} \right\}$, dann ist für alle $n \geq m_0$:

$$\frac{a_{\hat{g}}^j(u_{n,j}^0, u_{n,j}^0)}{\|u_n^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}} \geq k_{1j} \frac{\|u_{n,j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j}}{2a_n} - k_{\hat{g}} \frac{\|u_{n,j}^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1}}{\|u_n^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}} - \frac{K_j}{\|u_n^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}}. \quad (2.59)$$

Setzt man nun $b_n = \min \left\{ \|u_{n1}^0\|_{W^{1,p_1}(\Omega_1)}, \|u_{n2}^0\|_{W^{1,p_2}(\Omega_2)} \right\}$, so ist ersichtlich, dass

$$\begin{aligned} \frac{a_{\hat{g}}(u_n^0, u_n^0)}{\|u_n^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}} &\geq \\ &\geq \underbrace{\frac{k_1^{[a_n]} a_n^{p_{[a_n]}-1} - k_{\hat{g}}^{[a_n]} a_n^{p_{[a_n]}-2}}{2}}_{A_n} + \underbrace{k_1^{[b_n]} \frac{b_n^{p_{[b_n]}}}{\|u_n^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}} - k_{\hat{g}}^{[b_n]} \frac{b_n^{p_{[b_n]}-1}}{\|u_n^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}}}_{B_n} - \underbrace{\frac{K(p_1, p_2)}{\|u_n^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}}}_{C_n} \end{aligned}$$

ist. Dabei strebt $A_n \rightarrow \infty$ und $C_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Wegen $b_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt sicherlich

$$B_n > 0 \quad \text{für große } n.$$

Insgesamt folgt nun:

$$\frac{a_{\hat{g}}(u_n^0, u_n^0)}{\|u_n^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)}} \geq A_n + B_n - C_n \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also sind die Biformen $a_{\hat{g}}$ koerzitiv und damit auch die Operatoren $A_{\hat{g}}$. ■

2.2.4 Monotonie

Analog zur Definition der Monotonie für Funktionen ist die Monotonie für Operatoren $A : X \rightarrow X'$ auf reellen, reflexiven Banachräumen X definiert, vgl. [23] S.500, Def.25.2:

Definition 2.2.3

Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und sei

$$A : X \rightarrow X'$$

ein Operator. Dann heißt A

1. *monoton*, wenn für alle $u, v \in X$ gilt:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X \geq 0. \quad (2.60)$$

2. *streng monoton*, falls für alle $u, v \in X$ mit $u \neq v$ gilt:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X > 0. \quad (2.61)$$

3. *gleichmäßig monoton*, wenn für alle $u, v \in X$

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq b(\|u - v\|_X) \|u - v\|_X \quad (2.62)$$

erfüllt wird. Dabei ist $b : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine streng monoton wachsende, stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$b(0) = 0 \quad \text{und } b(t) \rightarrow \infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

4. stark monoton, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass für alle $u, v \in X$ die folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X \geq c \|u - v\|_X^2. \quad (2.63)$$

Nun soll die Menge der Operatoren $A_{\hat{g}}$ auf obige Monotonie-Begriffe untersucht werden.

Satz 2.2.8

Für $p_j \in (1, \infty)$ mit $j \in \{1, 2\}$ sind die Operatoren $A_{\hat{g}}$ streng monoton. Für $p_1 = p_2 > 2$ ist $A_{\hat{g}}$ gleichmäßig monoton und für $p_1 = p_2 = 2$ sogar stark monoton auf $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Beweis

Seien $u = (u^0 + \hat{g})$ und $v = (v^0 + \hat{g})$ aus dem Raum $V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $u^0, v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ und $\hat{g} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$. Es ist

$$\begin{aligned} & \langle A_{\hat{g}}u^0 - A_{\hat{g}}v^0, u^0 - v^0 \rangle \\ &= a_{\hat{g}}(u^0, u^0 - v^0) + \langle \tilde{h}, u^0 - v^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} - \left(a_{\hat{g}}(v^0, u^0 - v^0) + \langle \tilde{h}, u^0 - v^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \right) \\ &= a_{\hat{g}}(u^0, u^0 - v^0) - a_{\hat{g}}(v^0, u^0 - v^0). \end{aligned}$$

Daher läßt sich $\langle A_{\hat{g}}u^0 - A_{\hat{g}}v^0, u^0 - v^0 \rangle$ mit Lemma 2.2.6 wie folgt nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} & \langle A_{\hat{g}}u^0 - A_{\hat{g}}v^0, u^0 - v^0 \rangle \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} (DW_{elj}(\nabla u_j) - DW_{elj}(\nabla v_j)) \cdot \nabla(u_j^0 + \hat{g}_j - (v_j^0 + \hat{g}_j)) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} (DW_{elj}(\nabla u_j) - DW_{elj}(\nabla v_j)) \cdot (\nabla u_j - \nabla v_j) \, d\mathbf{x} \\ &\stackrel{(L.2.2.6)}{\geq} \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \tilde{c}_j \left(\tilde{k} + |\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j| + |\nabla v_j^0 + \nabla \hat{g}_j| \right)^{p_j-2} |\nabla u_j^0 - \nabla v_j^0|^2 \, d\mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Ist $\langle A_{\hat{g}}u^0 - A_{\hat{g}}v^0, u^0 - v^0 \rangle = 0$, so ist ersichtlich, dass $\nabla u_j^0 = \nabla v_j^0$, für $j = 1, 2$ sein muss. Mit der Normäquivalenz 2.1.2 auf Ω_j folgt

$$\|u^0 - v^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)} = \sum_{j=1}^2 \|u_j^0 - v_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \leq \sum_{j=1}^2 c_j \|\nabla u_j^0 - \nabla v_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = 0,$$

also $u^0 = v^0$ in $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$. Damit ist $A_{\hat{g}}$ streng monoton auf $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Mit der Dreiecksungleichung gilt für $p_j \geq 2$, $j \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned}
& \langle A_{\hat{g}}u^0 - A_{\hat{g}}v^0, u^0 - v^0 \rangle \\
& \geq \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \tilde{c}_j \left(\tilde{k} + |\nabla u_j + \nabla \hat{g}_j| + |\nabla v_j + \nabla \hat{g}_j| \right)^{p_j-2} |\nabla u_j^0 - \nabla v_j^0|^2 \, d\mathbf{x} \\
& \geq \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \tilde{c}_j |\nabla u_j^0 - \nabla v_j^0|^{p_j} \, d\mathbf{x} \geq \tilde{c}_{\min} \left(\sum_{j=1}^2 \|\nabla u_j^0 - \nabla v_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} \right) \\
& \stackrel{(\text{Satz 2.1.2})}{\geq} \tilde{c}_{\min} \left(\sum_{j=1}^2 \frac{1}{c_j} \|u_j^0 - v_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j} \right) \geq \frac{\tilde{c}_{\min}}{c_{\max}} \sum_{j=1}^2 \|u_j^0 - v_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j},
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{c}_{\min} = \min\{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2\}$ und $c_{\max} = \max\{c_1, c_2\}$.

Ist $p_1 = p_2 = 2$, dann ist $A_{\hat{g}}$ sogar stark monoton:

$$\begin{aligned}
\langle A_{\hat{g}}u^0 - A_{\hat{g}}v^0, u^0 - v^0 \rangle & \geq \frac{\tilde{c}_{\min}}{c_{\max}} \sum_{j=1}^2 \|u_j^0 - v_j^0\|_{W^{1,2}(\Omega_j)}^2 \stackrel{(2.22)}{\geq} \frac{\tilde{c}_{\min}}{c_{\max}} \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \|u_j^0 - v_j^0\|_{W^{1,2}(\Omega_j)} \right)^2 \\
& = \frac{\tilde{c}_{\min}}{c_{\max}} \frac{1}{2} \|u^0 - v^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}^2 \quad \text{mit } \vec{p} = (2, 2)^\top.
\end{aligned}$$

Im Falle $p_1 = p_2 = p > 2$ ist $A_{\hat{g}}$ gleichmäßig monoton:

$$\begin{aligned}
\langle A_{\hat{g}}u^0 - A_{\hat{g}}v^0, u^0 - v^0 \rangle & \geq \frac{\tilde{c}_{\min}}{c_{\max}} \sum_{j=1}^2 \|u_j^0 - v_j^0\|_{W^{1,p}(\Omega_j)}^p \\
& \geq \frac{\tilde{c}_{\min}}{c_{\max}} \frac{1}{2^{p-1}} \left(\sum_{j=1}^2 \|u_j^0 - v_j^0\|_{W^{1,p}(\Omega_j)} \right)^p \\
& = \frac{\tilde{c}_{\min}}{c_{\max}} \frac{1}{2^{p-1}} \|u^0 - v^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}^p,
\end{aligned}$$

wobei $b(t) = \frac{\tilde{c}_{\min}}{c_{\max}} \frac{1}{2^{p-1}} \|u^0 - v^0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}^{p-1}$ und $\vec{p} = (p, p)^\top$ zu setzen ist. ■

2.2.5 Stetigkeit

Die Stetigkeit von Operatoren $A : X \rightarrow Y$, über den Banachräumen X und Y ist auf ähnliche Weise definiert, wie die Stetigkeit von Funktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 2.2.4 (Stetigkeit von Operatoren, [23] S.597)

Seien X, Y Banachräume über \mathbb{R} . Ein Operator $A : X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn aus

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } X \quad \text{auch} \quad Au_n \rightarrow Au \quad \text{in } Y \quad \text{folgt.} \quad (2.64)$$

Die Eigenschaft (2.64) ist für nichtlineare Operatoren auf direktem Wege jedoch oftmals schwer nachzuweisen. Man bedient sich daher des Umwegs über Nemyckii-Operatoren.

Definition 2.2.5 (Nemyckii-Operator, [23] S.561)

Ein Nemyckii-Operator F wird definiert durch die Beziehung

$$(F\mathbf{u})(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad \text{mit } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \text{ und } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m. \quad (2.65)$$

Dabei muss die Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ folgende Bedingungen erfüllen:

1. Caratheodory-Bedingung:

$$f(\cdot, \mathbf{u}) : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{ist messbar auf } \Omega \text{ für alle } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.66)$$

$$f(\mathbf{x}, \cdot) : \mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{ist stetig auf } \mathbb{R}^n \text{ für fast alle } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.67)$$

2. Wachstumsbedingung:

für alle $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{u})| \leq |a(\mathbf{x})| + b \sum_{j=1}^n |u_j|^{\frac{p_j}{q}} \quad \text{mit } b > 0 \text{ und } a \in L^q(\Omega) \quad (2.68)$$

für $q \geq 1$ und $p_j < \infty$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Kann man für einen Operator nachweisen, dass er ein Nemyckii-Operator ist, so erhält man seine Stetigkeit durch folgendes Lemma.

Lemma 2.2.9 ([23] Prop. 26.6)

Unter der Voraussetzung der Bedingungen 1 und 2 ist der Nemyckii-Operator

$$F : \prod_{j=1}^n L^{p_j}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega) \quad (2.69)$$

stetig und beschränkt durch

$$\|F\mathbf{u}\|_{L^q(\Omega)} \leq c \left(\|a\|_{L^q(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|u_j\|_{L^{p_j}(\Omega)}^{\frac{p_j}{q}} \right) \quad \text{mit } c > 0. \quad (2.70)$$

Unter Ausnutzung dieses Lemmas weisen wir nun die Stetigkeit der Operatoren $A_{\hat{g}}$ nach.

Satz 2.2.9

Die Operatoren $A_{\hat{g}}$ sind stetig auf $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Beweis

Sei $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ ein konstanter, fest gewählter Vektor mit $z_j \neq 0$ für $j \in \{1, 2\}$ und $|\mathbf{z}| = 1$. Für $j \in \{1, 2\}$ definieren wir den Operator

$$N_j^{\mathbf{z}} : (L^{p_j})^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad N_j^{\mathbf{z}}(\nabla u_j^0(\mathbf{x})) = (\text{DW}_{elj}(\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j) \cdot \mathbf{z}) = f_j(\mathbf{x}, \nabla u_j^0(\mathbf{x}))$$

und zeigen, dass dieser ein Nemyckii-Operator ist. Dazu weisen wir für die Funktion f_j zunächst die Bedingungen 1 und 2 aus Definition 2.2.5 nach.

Zu 1.:

Nach Voraussetzung ist $\nabla(u_j^0 + \hat{g}_j) \in (L^{p_j}(\Omega_j))^2$. Aus Lemma 2.2.2 wissen wir, dass

$DW_{elj} : (L^{p_j}(\Omega_j))^2 \rightarrow (L^{q_j}(\Omega_j))^2$ gilt. Also ist $(DW_{elj}(\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j) \cdot \mathbf{z}) \in L^{q_j}(\Omega_j)$ und damit messbar. Da $(DW_{elj}(\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j) \cdot \mathbf{z}) = \left(\mu_j(\kappa_j + |\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} (\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j) \cdot \mathbf{z} \right)$ eine Verknüpfung stetiger Operationen ist, folgt die Stetigkeit bezüglich ∇u_j^0 .

Zu 2.:

Es ist

$$|f_j(\mathbf{x}, \nabla u_j^0(\mathbf{x}))| \leq |DW_{elj}(\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j)| |\mathbf{z}|. \quad (2.71)$$

Mit Lemma 2.2.1 und der Dreiecksungleichung ergibt sich im Falle $p_j \geq 2$

$$(2.71) \leq \mu_j(1 + |\nabla u_j^0| + |\nabla \hat{g}_j|)^{p_j-1} \mathbf{1} \stackrel{(2.22)}{\leq} \mu_j 3^{p_j-2}(1 + |\nabla u_j^0|^{p_j-1} + |\nabla \hat{g}_j|^{p_j-1}).$$

Für $1 < p_j < 2$ ergibt sich unter Verwendung von Lemma 2.2.1 bei analoger Vorgehensweise

$$(2.71) \leq \mu_j(|\nabla u_j^0| + |\nabla \hat{g}_j|)^{p_j-1} \mathbf{1} = \mu_j \frac{(|\nabla u_j^0| + |\nabla \hat{g}_j|)^{p_j}}{|\nabla u_j^0| + |\nabla \hat{g}_j|} \stackrel{(2.22)}{\leq} \mu_j \frac{2^{p_j-1}(|\nabla u_j^0|^{p_j} + |\nabla \hat{g}_j|^{p_j})}{|\nabla u_j^0| + |\nabla \hat{g}_j|} \\ \leq 2^{p_j-1} \mu_j (|\nabla u_j^0|^{p_j-1} + |\nabla \hat{g}_j|^{p_j-1}).$$

Weiter gilt für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$

$$|\mathbf{a}|^{p_j-1} = \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^2 a_i^2 \right)^{p_j}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(2.22)}{\leq} 2^{\frac{p_j-1}{2}} \left(\frac{\sum_{i=1}^2 a_i^{2p_j}}{\sum_{i=1}^2 a_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{p_j-1}{2}} \left(\sum_{i=1}^2 a_i^{2(p_j-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{p_j-1}{2}} \sum_{i=1}^2 |a_i|^{\frac{p_j}{q_j}}$$

mit $q_j = \frac{p_j}{p_j-1}$. Wir setzen

$$a_{p_j} = \begin{cases} 2^{p_j-1} \mu_j |\nabla \hat{g}_j|^{p_j-1} & \text{für } 1 < p_j < 2 \\ 3^{p_j-2} \mu_j (1 + |\nabla \hat{g}_j|^{p_j-1}) & \text{für } p_j \geq 2 \end{cases}, \quad b_{p_j} = \begin{cases} 2^{\frac{p_j-1}{2}} 2^{p_j-1} \mu_j & \text{für } 1 < p_j < 2 \\ 2^{\frac{p_j-1}{2}} 3^{p_j-2} \mu_j & \text{für } p_j \geq 2 \end{cases}.$$

Somit ist

$$|f_j(\mathbf{x}, \nabla u_j^0(\mathbf{x}))| \leq a_{p_j}(\mathbf{x}) + b_{p_j} \sum_{i=1}^2 (\partial_{x_i} u_j^0)^{\frac{p_j}{q_j}}$$

und aus $\int_{\Omega_j} |\nabla \hat{g}_j|^{(p_j-1)q_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_j} |\nabla \hat{g}_j|^{p_j} d\mathbf{x} = \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} < \infty$ folgt $a_{p_j} \in L^{q_j}(\Omega_j)$ für alle $p_j \in (1, \infty)$ mit $j \in \{1, 2\}$. Daher ist $N_j^{\mathbf{z}}$ ein Nemyckii-Operator und damit stetig und beschränkt durch (2.70). Zum Nachweis der Stetigkeit der Operatoren $A_{\hat{g}}$ wählen wir nun eine Folge $\{u_n^0\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $u_n^0 \rightarrow u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ für $n \rightarrow \infty$. Insbesondere gilt dann $\nabla u_n^0 \rightarrow \nabla u^0 \in (L^{\vec{p}}(\Omega_\delta))^2$ für $n \rightarrow \infty$. Ferner ist für alle $v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$

$$\begin{aligned} & |\langle A_{\hat{g}} u_n^0 - A_{\hat{g}} u^0, v^0 \rangle| \\ &= \left| \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} (DW_{elj}(\nabla u_{n_j}^0 + \nabla \hat{g}_j) - DW_{elj}(\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j)) \cdot \nabla v_j^0 d\mathbf{x} + \left(\langle \tilde{h}, v^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} - \langle \tilde{h}, v^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \left| N_j^{\mathbf{z}}(\nabla u_{n_j}^0) - N_j^{\mathbf{z}}(\nabla u_j^0) \right| |\nabla v_j^0| d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

wobei $N_j^z : (L^{p_j}(\Omega_j))^2 \rightarrow (L^{q_j}(\Omega_j))^2$ für $j \in \{1, 2\}$ ein Nemyckii-Operator ist. Aufgrund seiner Stetigkeit folgt deshalb

$$N_j^z(\nabla u_{n_j}^0) \rightarrow N_j^z(\nabla u_j^0) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also gilt mit der Hölderschen Ungleichung und der Normäquivalenz auf $W^{1,p_j}(\Omega_j)$, $j \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} |\langle A_{\hat{g}} u_n^0 - A_{\hat{g}} u^0, v^0 \rangle| &\leq \sum_{j=1}^2 \left\| N_j^z(\nabla u_{n_j}^0) - N_j^z(\nabla u_j^0) \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \|v_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \\ &\leq \|v^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)} \sum_{j=1}^2 \left\| N_j^z(\nabla u_{n_j}^0) - N_j^z(\nabla u_j^0) \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit gilt für die Operatornorm

$$\begin{aligned} \|A_{\hat{g}} u_n^0 - A_{\hat{g}} u^0\|_{(V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta))'} &= \sup_{\substack{v^0 \in V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta) \\ \|v^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)} = 1}} |\langle A_{\hat{g}} u_n^0 - A_{\hat{g}} u^0, v^0 \rangle| \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \left\| N_j^z(\nabla u_{n_j}^0) - N_j^z(\nabla u_j^0) \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

und $A_{\hat{g}} : V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow V_{(0)}^{\bar{q}}(\Omega_\delta)$ ist stetig. ■

2.3 Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösungen

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass die schwache Formulierung aus Definition 2.1.7 für alle Funktionen $f \in (V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta))'$, $\tilde{h} \in W^{-\frac{1}{\bar{q}}, \bar{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})$, mit $\tilde{h} = 0$ auf $R_{\delta_1} \cup R_{\delta_2}$, und $g \in W^{1-\frac{1}{\bar{p}}, \bar{p}}(\Gamma_D)$ unabhängig von der gewählten Fortsetzung $\hat{g} \in W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)$ eine eindeutige Lösung $u = (u^0 + \hat{g}) \in V_{(g)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta)$ besitzt. Dazu weisen wir zunächst die Existenz einer eindeutigen Lösung $u^0 \in V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta)$ der schwachen Formulierung 2.1.7 nach. Hier ist die Fortsetzung \hat{g} der Dirichlet-Bedingung g als gegeben anzusehen. Da die schwache Formulierung mit folgender Operatorgleichung übereinstimmt

$$\langle A_{\hat{g}} u^0, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} = \langle f, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} \quad \text{für jedes } v^0 \in V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta) \quad \text{und beliebiges } f \in (V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta))', \quad (2.72)$$

ist es gleichbedeutend, die Existenz einer eindeutigen Lösung $u^0 \in V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta)$ dieser Operatorgleichung für beliebiges $f \in (V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_\delta))'$ zu zeigen. In der Theorie der linearen Operatoren wäre hierzu auf den Satz von Lax-Milgram zurückzugreifen [22] S.68, Th. 18E. Für einen nichtlinearen Operator $A : X \rightarrow X'$ kann aus $\langle Av, v \rangle_X$ jedoch keine Bilinearform gewonnen werden, sodass dieser Satz nicht gültig ist. Um die Existenz einer eindeutigen Lösung für eine nichtlineare Operatorgleichung zu zeigen, kann häufig der Hauptsatz über monotone Operatoren angewendet werden [23] Th. 26A, S.557:

Satz 2.3.1 (Hauptsatz über monotone Operatoren von Browder und Minty 1963)
 Es sei $A : V \rightarrow V'$ ein monotoner, koerzitiver und stetiger Operator, V ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum mit Basis $\{w_1, w_2, \dots\}$ und V' sei der Dualraum von V . Für die Operatorgleichung

$$Au = b \quad (2.73)$$

und die Galerkingleichungen

$$a(u_n, w_k) = \langle Au_n, w_k \rangle = \langle b, w_k \rangle \quad k = 1, \dots, n; \quad u_n \in V_n = \text{span}\{w_1, \dots, w_n\} \quad (2.74)$$

gelten folgende Aussagen:

1. Galerkin-Methode:

Falls $\dim V = \infty$, dann hat (2.74) eine Lösung $u_n \in V_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine schwach konvergente Teilfolge $\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$, sodass $u_{n'} \rightharpoonup u$ in V für $n' \rightarrow \infty$ und u ist Lösung von (2.73).

2. Lösungsmenge $S = \{u \in V \mid Au = b\}$ von (2.73):

Für jedes $b \in V'$ hat (2.73) eine Lösung. S ist beschränkt, konvex und abgeschlossen.

3. Eindeutigkeit:

Ist A streng monoton, so sind (2.73), (2.74) eindeutig lösbar in V bzw. V_n .

4. Inverser Operator:

Ist A streng monoton, so existiert $A^{-1} : V' \rightarrow V$ und A^{-1} ist streng monoton und beschränkt.

Ist A gleichmäßig monoton, dann ist A^{-1} stetig.

Ist A stark monoton, so ist A^{-1} Lipschitz-stetig.

5. Starke Konvergenz der Galerkin-Methode:

Sei $\dim V = \infty$.

Ist A streng monoton, so konvergiert die Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Galerkin-Lösungen schwach in V zur eindeutig bestimmten Lösung u von (2.73).

Ist A gleichmäßig monoton, so konvergiert $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stark in V zu der eindeutig bestimmten Lösung u von (2.73).

6. Nichtseparable Räume:

Ist V nicht separabel, dann gelten 2., 3., 4. .

Wir wenden den Hauptsatz auf die Operatorgleichung (2.72) an. Aus Lemma 2.1.3 ist bekannt, dass der Raum $V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)}$ ein reflexiver, separabler Banachraum ist. In Kapitel 2.2 wurden die Voraussetzungen des Hauptsatzes an die Operatoren $A_{\vec{g}}$ überprüft. Damit lässt sich folgender Satz formulieren:

Satz 2.3.2

Sei Ω_δ ein zulässiges Gebiet. Für alle $f \in \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)\right)'$ besitzt die Operatorgleichung

$$\langle A_{\vec{g}} u^0, v \rangle_{\Omega_\delta} = \langle f, v \rangle_{\Omega_\delta} \quad \forall v \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$$

eine eindeutige Lösung $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Wir untersuchen nun, ob die Funktion $u = (u^0 + \hat{g}) \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ tatsächlich von der Wahl der Fortsetzung \hat{g} der Dirichlet-Bedingung g abhängt.

Lemma 2.3.1

Seien $\hat{g}^1, \hat{g}^2 \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ zwei verschiedene Fortsetzungen der Dirichlet-Bedingung $g \in W^{1-\frac{1}{\vec{p}}, \vec{p}}(\Gamma_D)$ und $u^{01}, u^{02} \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ die Lösungen der Operatorgleichungen

$$\left\langle A_{\hat{g}^k} u^{0k}, v^0 \right\rangle_{\Omega_\delta} = \langle f, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} \quad \text{für jedes } v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \quad \text{mit } f \in \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)' . \quad (2.75)$$

Dann ist $u^1 = u^2$ in $W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)$, wobei $u^k = u^{0k} + \hat{g}^k$ für $k \in \{1, 2\}$.

Beweis

Aus Gleichung (2.75) folgt $\langle A_{\hat{g}^1} u^{01} - A_{\hat{g}^2} u^{02}, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} = 0$ für alle $v \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Wegen $u^k \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ ist $(u^1 - u^2) \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$. Also gilt mit Lemma 2.2.6 insbesondere

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A_{\hat{g}^1} u^{01} - A_{\hat{g}^2} u^{02}, (u^1 - u^2) \rangle_{\Omega_\delta} \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} (DW_{elj}(\nabla u_j^1) - DW_{elj}(\nabla u_j^2)) \cdot (\nabla u_j^1 - \nabla u_j^2) \, d\mathbf{x} + \left\langle \tilde{h}, \nabla(u_j^1 - u_j^2) - \nabla(u_j^1 - u_j^2) \right\rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \\ &\geq \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \bar{c}_j \left(\tilde{k}_j + |\nabla u_j^1| + |\nabla u_j^2| \right)^{p_j-2} |\nabla u_j^1 - \nabla u_j^2|^2 \, d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (2.76)$$

Ist $p_j \geq 2$, so erhalten wir mit $\tilde{k} = 0$ und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} \bar{c}_j (|\nabla u_j^1| + |\nabla u_j^2|)^{p_j-2} |\nabla u_j^1 - \nabla u_j^2|^2 \, d\mathbf{x} &\geq \int_{\Omega_j} \bar{c}_j |\nabla u_j^1 - \nabla u_j^2|^{p_j} \, d\mathbf{x} \\ &= \bar{c}_j \|\nabla u_j^1 - \nabla u_j^2\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} . \end{aligned}$$

Im Falle $1 < p_j < 2$ ist $\tilde{k} = 1$. Hier wenden wir die Hölder-Ungleichung (2.21) für $p < 1$ an mit $p = \frac{p_j}{2}$ und $q = \frac{p}{p-1} = \frac{p_j}{p_j-2}$ und erhalten folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_j} \bar{c}_j (1 + |\nabla u_j^1| + |\nabla u_j^2|)^{p_j-2} |\nabla u_j^1 - \nabla u_j^2|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\geq \bar{c}_j \|1 + |\nabla u_j^1| + |\nabla u_j^2|\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-2} \|\nabla u_j^1 - \nabla u_j^2\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^2 . \end{aligned}$$

Wir setzen

$$c_{p_j} = \begin{cases} \bar{c}_j \|1 + |\nabla u_j^1| + |\nabla u_j^2|\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-2} & \text{für } 1 < p_j < 2 \\ \bar{c}_j & \text{für } p_j \geq 2 \end{cases} , \quad \tilde{p}_j = \begin{cases} 2 & \text{für } 1 < p_j < 2 \\ p_j & \text{für } p_j \geq 2 \end{cases} .$$

Dann ist $0 \geq (2.76) \geq \sum_{j=1}^2 c_{p_j} \|\nabla u_j^1 - \nabla u_j^2\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{\tilde{p}_j} \geq 0$. Für $j \in \{1, 2\}$ folgt somit

$\|\nabla u_j^1 - \nabla u_j^2\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = 0$ und mit der Normäquivalenz 2.1.2 ist $\|u_j^1 - u_j^2\|_{W^{1, p_j}(\Omega_j)} = 0$. Damit ergibt sich $\|u^1 - u^2\|_{W^{1, \vec{p}}(\Omega_\delta)} = 0$. ■

Wir können nun eine allgemeinere schwache Formulierung des Transmissions-Randwertproblems aus Definition 1.3.2 angeben:

Definition 2.3.1 (schwache Formulierung über $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$)

Finde $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $\gamma_{\Gamma_D} u = g$ für vorgegebene Funktionen $g \in W^{1-\frac{1}{\vec{p}},\vec{p}}(\Gamma_D)$,

$f \in \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)\right)'$, $\tilde{h} \in W^{-\frac{1}{\vec{q}},\vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})$ mit $q_j = \frac{p_j}{p_j-1}$ und $j \in \{1, 2\}$, sodass für alle $v^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $v_j^0 = v^0|_{\Omega_j}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \mu_j (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \cdot \nabla v_j^0 \, d\mathbf{x} = \langle f, v^0 \rangle_{\Omega_\delta} + \langle \tilde{h}, v^0 \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \quad (2.77)$$

mit $p_j \in (1, \infty)$, $\mu_j \in \mathbb{R}^+$, $\kappa_j \in [0, 1]$ für $j \in \{1, 2\}$.

Aufgrund des oben bewiesenen Lemmas 2.3.1 und Satz 2.3.2 ist nun folgender Satz gültig:

Satz 2.3.3

Sei Ω_δ ein zulässiges Gebiet, d. h. insbesondere $\text{meas } \Gamma_D > 0$. Für alle Funktionen

$g \in W^{1-\frac{1}{\vec{p}},\vec{p}}(\Gamma_D)$, $f \in \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)\right)'$, $\tilde{h} \in W^{-\frac{1}{\vec{q}},\vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})$ mit $q_j = \frac{p_j}{p_j-1}$ und $j \in \{1, 2\}$ besitzt die schwache Formulierung aus Definition 2.3.1 eine eindeutige Lösung $u \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \subset W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

2.4 Ein äquivalentes Minimierungsproblem

Sei Ω_δ ein zulässiges Gebiet. Gemäß Formel (1.27) ist die elastische Verzerrungsenergiedichte über dem Teilgebiet Ω_j gegeben durch:

$$W_{elj}(\nabla u_j) = \frac{\mu_j}{p_j} (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j}{2}}. \quad (2.78)$$

Nach Formel (1.21) lautet die elastische Verzerrungsenergie damit:

$$J_{el}(\Omega_\delta, u) = \sum_{j=1}^2 J_{elj}(\Omega_j, u_j) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} W_{elj}(\nabla u_j) \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{x}. \quad (2.79)$$

Unter Beachtung des Ausdrucks für die Arbeit der äußeren Kräfte (1.22) ergibt sich mit Formel (1.23) die folgende potentielle Energie:

$$\begin{aligned} E(\Omega_\delta, u) &= J_{el}(\Omega_\delta, u) - W(\Omega_\delta, u) \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{x} - \langle f_j, u_j \rangle_{\Omega_j} - \langle \tilde{h}_j, u_j \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}_j}} \right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Es ist unklar, wie die dissipative Energie $D(\Omega_\delta)$ für einen Verbund dargestellt werden kann. In Körpern, die aus einem Material bestehen, geht man in einem einfachen Modell davon aus, dass $D(\Omega_\delta)$ proportional ist zur Bildung der neuen Rissoberfläche. Somit ist $D(\Omega_\delta)$ nur abhängig von der Risslänge sowie von einer Materialkonstanten. Analog dazu setzen wir voraus, dass

die dissipative Energie eines Verbundes bei fester Risslänge konstant ist und bezeichnen die dissipative Energie des Verbundes im Folgenden mit $D_V(\Omega_\delta)$.

Nun erhalten wir mit Formel (1.25) die totale Energie in der Form

$$\begin{aligned} \Pi(\Omega_\delta, u) &= J_{el}(\Omega_\delta, u) - W(\Omega_\delta, u) + D_V(\Omega_\delta) = E(\Omega_\delta, u) + D_V(\Omega_\delta) \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{x} - \langle f_j, u_j \rangle_{\Omega_j} - \langle \tilde{h}_j, u_j \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}_j}} \right) + D_V(\Omega_\delta). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Wir wollen uns nun überlegen, dass die schwache Lösung $u \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ aus Definition 2.3.1 gleichzeitig die totale Energie minimiert. Dazu wird folgendes Minimierungsproblem formuliert:

Definition 2.4.1 (Minimierungsproblem)

Finde $u \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$, sodass

$$\Pi(\Omega_\delta, u) \leq \Pi(\Omega_\delta, v) \quad \text{für alle } v \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \quad (2.82)$$

ist.

Um das Energieminimum zu erhalten, muss folglich die Funktion $u \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ so bestimmt werden, dass gilt:

$$\langle D\Pi(\Omega_\delta, u), v \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta).$$

Deshalb untersuchen wir im nächsten Abschnitt, ob Π Fréchet-differenzierbar ist und wie die Fréchet-Ableitungen der einzelnen Energieanteile aussehen.

2.4.1 Untersuchungen zur Differenzierbarkeit

Für Operatoren $F : Z \subset X \rightarrow Y$, die von einer Teilmenge Z eines normierten linearen Raumes X in den normierten linearen Raum Y abbilden, ist die Fréchet-Differenzierbarkeit die Verallgemeinerung der klassischen Differenzierbarkeit für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 2.4.2 (Fréchet-Differenzierbarkeit)

Seien X, Y normierte, lineare Räume und $\mathcal{L}(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y, A \text{ ist linear und stetig}\}$. Sei $F : Z \subset X \rightarrow Y$ ein Operator über einer Teilmenge $Z \subset X$. Dann ist F Fréchet-differenzierbar, falls ein Funktional $DF \in \mathcal{L}(X, Y)$ existiert, sodass gilt:

$$F(a + h) = F(a) + \langle DF(a), h \rangle + o(h) \quad \text{für alle } h \in X \text{ mit } (a + h) \in Z. \quad (2.83)$$

Dabei ist

$$o(h) = \|h\|_X \varepsilon(h) \quad \text{mit } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ in } Y. \quad (2.84)$$

Wir wollen im Folgenden die Fréchet-Ableitung der totalen Energie des Verbunds mit Riss $\Pi(\Omega_\delta, u) = J_{el}(\Omega_\delta, u) - W(\Omega_\delta, u) + D_V(\Omega_\delta)$ ermitteln. Dazu untersuchen wir die Energien $J_{el}(\Omega_\delta, u)$, $W(\Omega_\delta, u)$, $D_V(\Omega_\delta)$ einzeln auf deren Fréchet-Differenzierbarkeit. Zunächst zeigen wir für die elastische Verzerrungsenergie:

Satz 2.4.1

Sei $\xi = (\xi^0 + \hat{g}) \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $\xi^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ und $\hat{g} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Für die elastische Verzerrungsenergie des Verbundes $J_{el}(\Omega_\delta, \xi)$ aus Formel (2.79) ist die Fréchet-Ableitung $DJ_{el}(\Omega_\delta, \xi)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} DJ_{el}(\Omega_\delta, \dots + \hat{g}) : V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) &\rightarrow \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)' \times W^{-\frac{1}{q}, \vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}}), \\ \langle DJ_{el}(\Omega_\delta, \xi), \eta \rangle &= \sum_{j=1}^2 \langle DJ_{elj}(\Omega_j, \xi_j), \eta_j \rangle = \sum_{j=1}^2 \left(\langle A_{\hat{g}}^j(\xi_j - \hat{g}_j), \eta_j \rangle_{\Omega_j} - \langle \tilde{h}_j, \eta_j \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}_j}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^2 a_{\hat{g}}^j((\xi_j - \hat{g}_j), \eta_j) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} DW_{elj}(\nabla \xi_j) \cdot \nabla \eta_j \, dx \end{aligned} \quad (2.85)$$

für alle $\xi \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta), \eta \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Beweis

Sei $\xi = (\xi^0 + \hat{g}) \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $\xi^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ und $\hat{g} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Gemäß Gleichung (2.19) ist

$$\langle A_{\hat{g}} \xi^0, \eta \rangle_{\Omega_\delta} = a_{\hat{g}}(\xi^0, \eta) + \langle \tilde{h}, \eta \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}}.$$

Dabei gilt $A_{\hat{g}} : V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)'$ und $\tilde{h} \in W^{-\frac{1}{q}, \vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}})$.

Wegen $DJ_{el}(\Omega_\delta, \dots + \hat{g}) = A_{\hat{g}} - \tilde{h}$, folgt

$$DJ_{el}(\Omega_\delta, \dots + \hat{g}) : V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)' \times W^{-\frac{1}{q}, \vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}}).$$

Nach (2.19) kann $DJ_{el}(\Omega_\delta, \cdot)$ nun definiert werden als

$$\langle DJ_{el}(\Omega_\delta, \xi), \eta \rangle = a_{\hat{g}}(\xi^0, \eta) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} DW_{elj}(\nabla \xi_j) \cdot \nabla \eta_j \, dx.$$

Hierauf wenden wir Definition 2.4.2 an und zeigen

$$J_{elj}(\Omega_j, \xi_j + \eta_j) - J_{elj}(\Omega_j, \xi_j) - \langle DJ_{elj}(\Omega_j, \xi_j), \eta_j \rangle = o(\eta_j) \quad \text{für } \eta_j \rightarrow 0.$$

Es ist nach Definition (1.21) und (2.85):

$$\begin{aligned} &|J_{elj}(\Omega_j, \xi_j + \eta_j) - J_{elj}(\Omega_j, \xi_j) - \langle DJ_{elj}(\Omega_j, \xi_j), \eta_j \rangle| \\ &\leq \int_{\Omega_j} |W_{elj}(\nabla(\xi_j + \eta_j)) - W_{elj}(\nabla \xi_j) - DW_{elj}(\nabla \xi_j) \cdot \nabla \eta_j| \, dx. \end{aligned} \quad (2.86)$$

$p_j \geq 2$:

Unter Anwendung des Satzes 2.2.4 erhält man:

$$(2.86) \leq c \int_{\Omega_j} |(1 + |\nabla \xi_j| + |\nabla \eta_j|)|^{p_j-2} |\nabla \eta_j|^2 \, dx \quad (2.87)$$

Mithilfe der Hölder-Ungleichung (2.21) mit $p = \frac{p_j}{2}$ und $q = \frac{p_j/2}{(p_j/2)-1} = \frac{p_j}{p_j-2}$ ergibt sich:

$$(2.87) \leq c \|1 + |\nabla \xi_j| + |\nabla \eta_j|\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-2} \|\nabla \eta_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^2 \leq a_{p_j} \|\nabla \eta_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^2 .$$

$1 < p_j < 2$:

Ist $1 < p_j < 2$, so gilt mit Satz 2.2.4

$$(2.86) \leq c \int_{\Omega_j} |\nabla \xi_j|^{p_j-2} |\nabla \eta_j|^2 \, d\mathbf{x} . \quad (2.88)$$

Wie oben wird die Hölder-Ungleichung (2.21) angewendet:

$$(2.88) \leq c \|\nabla \xi_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-2} \|\nabla \eta_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^2 \leq a_{p_j} \|\nabla \eta_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^2 .$$

Wegen $\frac{a_{p_j} \|\nabla \eta_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^2}{\|\nabla \eta_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} \rightarrow 0$ für $\|\nabla \eta_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \rightarrow 0$ für alle $p_j \in (1, \infty)$ ist nach (2.84)

$$J_{el,j}(\Omega_j, \xi_j + \eta_j) - J_{el,j}(\Omega_j, \xi_j) - \langle DJ_{el,j}(\Omega_j, \xi_j), \eta_j \rangle = o(\eta_j) \quad \text{für } \eta_j \rightarrow 0 .$$

Summation über $j \in \{1, 2\}$ ergibt

$$J_{el}(\Omega_\delta, \xi + \eta) - J_{el}(\Omega_\delta, \xi) - \langle DJ_{el}(\Omega_\delta, \xi), \eta \rangle = o(\eta) \quad \text{für } \eta \rightarrow 0 .$$

■

Nun untersuchen wir die Arbeit der äußeren Kräfte auf Fréchet-Differenzierbarkeit.

Satz 2.4.2

Sei $\xi = (\xi^0 + \hat{g}) \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ mit $\xi^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ und $\hat{g} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Für die Arbeit der äußeren Kräfte

$$W(\Omega_\delta, \xi) = \sum_{j=1}^2 W_j(\Omega_j, \xi_j) = \sum_{j=1}^2 \left(\langle f_j, \xi_j \rangle_{\Omega_j} + \langle \tilde{h}_j, \xi_j \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}_j}} \right)$$

ist die Fréchet-Ableitung $DW(\Omega_\delta, \xi)$ gegeben durch

$$DW(\Omega_\delta, \dots + \hat{g}) : V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)' \times W^{-\frac{1}{q}, \vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}}) ,$$

$$\langle DW(\Omega_\delta, \xi), \eta \rangle = \sum_{j=1}^2 \left(\langle f_j, \eta_j \rangle_{\Omega_j} + \langle \tilde{h}_j, \eta_j \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}_j}} \right)$$

für alle $\xi \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta), \eta \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$.

Beweis

Analog zu Definition 2.4.2 zeigen wir

$$W_j(\Omega_j, \xi_j + \eta_j) - W_j(\Omega_j, \xi_j) - DW_j(\Omega_j, \xi_j) = o(\eta_j) \quad \text{für } \eta_j \rightarrow 0 .$$

Es ist

$$\begin{aligned}
& W_j(\Omega_j, \xi_j + \eta_j) - W_j(\Omega_j, \xi_j) - DW_j(\Omega_j, \xi_j) \\
& \leq \left(\langle f_j, (\xi_j + \eta_j) \rangle_{\Omega_j} + \langle \tilde{h}_j, (\xi_j + \eta_j) \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \right) \\
& \quad - \left(\langle f_j, \xi_j \rangle_{\Omega_j} + \langle \tilde{h}_j, \xi_j \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \right) - \left(\langle f_j, \eta_j \rangle_{\Omega_j} + \langle \tilde{h}_j, \eta_j \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}} \right) = 0
\end{aligned}$$

für alle η . ■

Im Hinblick auf die dissipative Energie ist zu vermerken, dass diese unabhängig von $\xi \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ ist. Folglich ist $\langle DD_V(\Omega_\delta), \eta \rangle = 0$ für alle $\eta \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$. Aus den vorausgehenden Sätzen schließen wir nun:

Satz 2.4.3

Für die totale Energie $\Pi(\Omega_\delta, \xi)$ und für die potentielle Energie $E(\Omega_\delta, \xi)$ sind die Fréchet-Ableitungen $D\Pi(\Omega_\delta, \xi)$, bzw. $DE(\Omega_\delta, \xi)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\langle D\Pi(\Omega_\delta, \xi), \eta \rangle &= \langle DE(\Omega_\delta, \xi), \eta \rangle \\
&= \langle DJ_{el}(\Omega_\delta, \xi), \eta \rangle - \langle DW(\Omega_\delta, \xi), \eta \rangle \\
&= \sum_{j=1}^2 \left(\int_{\Omega_j} DW_{el,j}(\nabla \xi_j) \cdot \nabla \eta_j \, d\mathbf{x} - \langle f_j, \eta_j \rangle_{\Omega_j} - \langle \tilde{h}_j, \eta_j \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}_j}} \right) \quad (2.89) \\
&= \langle DW_{el}(\nabla \xi) - f, \eta \rangle_{\Omega_\delta} - \langle \tilde{h}, \eta \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}}}
\end{aligned}$$

für alle $\xi \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta), \eta \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
D\Pi(\Omega_\delta, \dots + \hat{g}) &: V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)' \times W^{-\frac{1}{q}, \vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}}), \\
DE(\Omega_\delta, \dots + \hat{g}) &: V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \rightarrow \left(V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta) \right)' \times W^{-\frac{1}{q}, \vec{q}}(\Gamma_{\tilde{N}}).
\end{aligned}$$

2.4.2 Energieminimierung und schwache Formulierung

Entsprechend dem Minimierungsproblem 2.4.1 wird zur Minimierung der totalen Energie $\Pi(\Omega_\delta, \cdot)$ eine Funktion $u \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ gesucht, sodass

$$\langle D\Pi(\Omega_\delta, u), v \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta).$$

Aus Satz 2.4.3 folgt somit

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} DW_{el,j}(\nabla u_j) \cdot \nabla v_j \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^2 \left(\langle f_j, v_j \rangle_{\Omega_j} - \langle \tilde{h}_j, v_j \rangle_{\Gamma_{\tilde{N}_j}} \right) \quad \text{für alle } v \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta).$$

Dies entspricht der schwachen Formulierung 2.3.1. Also gilt folgender Satz:

Satz 2.4.4

Die Minimierung der totalen Energie gemäß Definition 2.4.1 ist äquivalent zur Minimierung der potentiellen Energie, sowie zum Lösen der schwachen Formulierung 2.3.1.

Folglich minimiert die schwache Lösung $u \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_\delta)$ gleichzeitig die totale Energie $\Pi(\Omega_\delta, \cdot)$ und die potentielle Energie $E(\Omega_\delta, \cdot)$.

Kapitel 3

Energiefreisetzungsrate und Griffithsche Formel für den Verbund

Die Energiefreisetzungsrate kann nach Kapitel 1.2.1 zur Vorhersage von Risswachstum herangezogen werden. Sie ist über das Griffithsche Bruchkriterium mit der für Risswachstum kritischen Größe, der dissipativen Energie, verknüpft:

$$\text{Ist } ERR(\Omega_{\delta_0}) > \left. \frac{dD(\Omega_{\delta_0+\delta})}{d\delta} \right|_{\delta=0}, \text{ so wächst der Riss.}$$

Die Berechnung der Energiefreisetzungsrate durch Grenzwertbildung

$$ERR(\Omega_{\delta_0}) = \lim_{0 < \delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta})}{\delta}$$

ist jedoch unpraktikabel. Eine Alternative hierzu stellt die Griffithsche Formel dar. Bei ihrer Berechnung sind nur Größen zu verwenden, die nach dem Lösen der schwachen Formulierung bekannt sind: die schwache Lösung, die Verzerrungsenergie, die Spannungen, die Volumenkräftdichte. Außerdem geht die Rissfortschrittsrichtung explizit in die Griffithsche Formel ein.

In diesem Kapitel soll die Griffithsche Formel für den Verbund aus Materialien vom Potenztyp formuliert und bewiesen werden:

Satz 3.0.5 (Griffithsche Formel für den Verbund)

Sei Ω_{δ_0} ein zulässiges Gebiet mit Riss $R_{\delta_0} \subset \{\mathbf{x} \in \Omega_{\delta_0} : x_2 = 0\}$, dessen Rissausbreitungsrichtung entlang des Richtungsvektors $\mathbf{y} = (1, 0)^\top$ ist, und der Rissspitze S_{δ_0} . Sei $\theta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ mit $\theta \equiv 1$ in B_1 und $\theta \equiv 0$ in $\bar{\Omega} \setminus B_2$. Dabei sei B_k für $k \in \{1, 2\}$ ein zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet um S_{δ_0} mit $\bar{B}_1 \subset B_2 \subset \text{int } \bar{\Omega}_{\delta_0} = \Omega$. Für die schwache Lösung $u_{[\delta_0]} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$ des Transmissions-Randwertproblems auf Ω_{δ_0} mit Volumenkräftdichte $f \in C^1(\Omega_{\delta_0})$ und Oberflächenkräftdichte $h \in L^{\vec{q}}(\Gamma_N)$ lautet die Griffithsche Formel:

$$\begin{aligned} ERR(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) &= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} DW_{elj}(\nabla u_{[\delta_0]j}) \partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \cdot \nabla \theta \, dy \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} W_{elj}(\nabla u_{[\delta_0]j}) \partial_{y_1} \theta \, dy + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} u_{[\delta_0]j} \partial_{y_1} (f_j \theta) \, dy. \end{aligned} \tag{3.1}$$

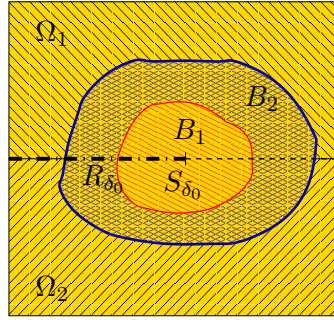


Abb. 3.1: Zur Griffithschen Formel

3.1 Beweis der Griffithschen Formel

Die Beweisidee zur Griffithschen Formel wurde zum ersten Mal 1999 von Khludnev und Sokolowski für linear elastische Materialien angewendet [7], [8]. Frau Dr. Knees hat mit dieser Beweismethode die Griffithsche Formel für Ramberg-Osgood-Materialien verifiziert [10].

Der Beweis der Griffithschen Formel ist sehr lang und technisch aufwändig. Wir skizzieren zunächst die Vorgehensweise. Die einzelnen Schritte werden in den nachfolgenden Kapiteln ausgeführt.

Beweisidee:

Für $\delta \in [0, a]$ wird ein Diffeomorphismus $T_\delta : \Omega_{\delta_0+\delta} \rightarrow \Omega_{\delta_0}$ eingeführt, der die aktuelle Konfiguration $\Omega_{\delta_0+\delta}$ auf das Referenzgebiet Ω_{δ_0} überführt. Dadurch kann $E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0]})$ nach Ω_{δ_0} transformiert werden und der Grenzübergang

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]})}{\delta} \quad (3.2)$$

kann auf dem Referenzgebiet Ω_{δ_0} durchgeführt werden. Der Beweis lässt sich in mehrere Schritte unterteilen:

1. Schritt: Die Transformation T_δ

- Definition von T_δ
- Untersuchung der Eigenschaften von T_δ
- Untersuchung der Eigenschaften der transformierten Funktionen

2. Schritt: Beschränktheit und Konvergenz der transformierten Lösungen für $\delta \rightarrow 0$

- Nachweis der gleichmäßigen Beschränktheit der Lösungen $u_{[\delta_0+\delta]}$ in $W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$, bzw. der transformierten Lösungen $u^{[\delta_0+\delta]}$ in $W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$
- Nachweis der Konvergenz der Lösungen in $W^{1,\vec{p}}(\Omega_\delta)$ für $\delta \rightarrow 0$

3. Schritt: Durch Energieminimierung zur Griffithschen Formel

- Durchführung des Grenzübergangs $\delta \rightarrow 0$ an Formel (3.2) unter Ausnutzung der Energieminimierungseigenschaften schwacher Lösungen

Bemerkung 3.1.1

Im Folgenden ist $\Omega = \text{int } \Omega_{\delta_0+\delta}$ für alle $\delta \in [0, a]$.

3.1.1 Die Transformation T_δ

Definition 3.1.1

Sei $\delta \in [0, a]$. Dabei sei a vorgegeben durch $P_a = S_{\delta_0} + a\mathbf{y}$ mit $P_a \in \Omega$ und $P_a \cap \partial\Omega = \emptyset$. Sei $\theta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ wie in Satz 3.0.5 gegeben. Siehe hierzu Abbildung 3.2. Dann definieren wir die Abbildung

$$T_\delta : \Omega_{\delta_0+\delta} \rightarrow \Omega_{\delta_0}, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = T_\delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \delta \begin{pmatrix} \theta(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Die Jakobi-Matrix der Abbildung lautet

$$J_{T_\delta}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} y_1 & \partial_{x_2} y_1 \\ \partial_{x_1} y_2 & \partial_{x_2} y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \delta \partial_{x_1} \theta(\mathbf{x}) & -\delta \partial_{x_2} \theta(\mathbf{x}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

und die Jakobi-Determinante ergibt sich als

$$\det J_{T_\delta}(\mathbf{x}) = 1 - \delta \partial_{x_1} \theta(\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

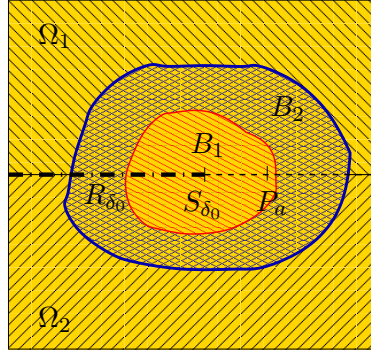


Abb. 3.2: Zur Transformation T_δ

Nun ist zu überprüfen, dass T_δ ein Diffeomorphismus ist.

Lemma 3.1.1

T_δ ist ein Diffeomorphismus.

Beweis

T_δ kann aufgefasst werden als Summe zweier C^∞ -Funktionen. So ist $\text{Id} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \in (C^\infty(\overline{\Omega}_{\delta_0+\delta}))^2$ und wegen $\theta \in C^\infty(\overline{\Omega}_{\delta_0+\delta})$ ist auch $-\delta(\theta(\mathbf{x}), 0)^\top \in (C^\infty(\overline{\Omega}_{\delta_0+\delta}))^2$. Damit ist $T_\delta \in (C^\infty(\overline{\Omega}_{\delta_0+\delta}))^2$. Wird a genügend klein gewählt, so gilt für alle $\delta \in [0, a]$, dass $\det J_{T_\delta} > 0$ ist. Gemäß [21] S. 53 folgt daraus, dass T_δ ein Diffeomorphismus ist. ■

Wir berechnen jetzt die Darstellung der Ableitung einer über $\Omega_{\delta_0+\delta}$ definierten Funktion $v_{[\delta_0+\delta]} : \Omega_{\delta_0+\delta} \rightarrow \mathbb{R}$ im Referenzgebiet Ω_{δ_0} .

Definition 3.1.2

Sei $\mathbf{x} \in \Omega_{\delta_0+\delta}$ und $\mathbf{y} \in \Omega_{\delta_0}$. Für $v_{[\delta_0+\delta]} : \Omega_{\delta_0+\delta} \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$v^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) = v_{[\delta_0+\delta]}(T_\delta^{-1}(\mathbf{y})) = v_{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{y} \in \Omega_{\delta_0}. \quad (3.6)$$

Die Ableitung dieser transformierten Funktion berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} v^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) &= \nabla_{\mathbf{x}} v_{[\delta_0+\delta]}(T_\delta^{-1}(\mathbf{y})) = (\nabla_{\mathbf{y}} v^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}))^\top \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{y} \\ &= (\nabla_{\mathbf{y}} v^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}))^\top J_{T_\delta} = \nabla_{\mathbf{y}} v^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) - \delta \partial_{y_1} v^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} \theta(T_\delta^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \nabla_{\mathbf{y}} v^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) - \delta \partial_{y_1} v^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta(\mathbf{y}).\end{aligned}\quad (3.7)$$

Nun untersuchen wir die Eigenschaften der transformierten Funktionen.

Lemma 3.1.2

Sei $u_{[\delta_0+\delta]} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$ die schwache Lösung des Transmissions-Randwertproblems auf $\Omega_{\delta_0+\delta}$, wobei $u_{[\delta_0+\delta]} = u_{[\delta_0+\delta]}^0 + \hat{g}_{[\delta_0+\delta]}$ mit $u_{[\delta_0+\delta]}^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$ und $\hat{g}_{[\delta_0+\delta]} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$ ist. Dann gilt für alle $\delta \in [0, a]$:

$$u^{[\delta_0+\delta]} = u_{[\delta_0+\delta]} \circ T_\delta^{-1} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0}).$$

Sei $u_{[\delta_0]} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$ die schwache Lösung des Transmissions-Randwertproblems auf Ω_{δ_0} , wobei $u_{[\delta_0]} = u_{[\delta_0]}^0 + \hat{g}_{[\delta_0]}$ mit $u_{[\delta_0]}^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$ und $\hat{g}_{[\delta_0]} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$. Dann gilt für alle $\delta \in [0, a]$:

$$u_{[\delta_0]} \circ T_\delta \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta}).$$

Beweis

Nach Voraussetzung ist $u_{[\delta_0+\delta]} \in W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$. Für jedes $\mathbf{y} \in \Omega_{\delta_0}$ ist $T_\delta^{-1}(\mathbf{y}) \in \Omega_{\delta_0+\delta}$ und wegen $u^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) = u_{[\delta_0+\delta]}(T_\delta^{-1}(\mathbf{y}))$ folgt $u^{[\delta_0+\delta]} \in W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$, zumal T_δ ein Diffeomorphismus ist. Da $\text{supp } \theta \cap \partial\Omega = \emptyset$, ist im speziellen $\text{supp } \theta \cap \Gamma_D = \emptyset$ und somit $T_\delta(\mathbf{y}) = \mathbf{y} = T_\delta^{-1}(\mathbf{y})$ für jedes $\mathbf{y} \in \Gamma_D$. Wegen $u_{[\delta_0+\delta]} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$ und $u^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) = u_{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$ für $\mathbf{y} \in \Gamma_D$ ist $u^{[\delta_0+\delta]} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$.

Genauso lässt sich $u_{[\delta_0]} \circ T_\delta \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$ zeigen. ■

3.1.2 Beschränktheit und Konvergenz der Lösungen

Wir weisen zunächst die gleichmäßige Beschränktheit der Lösungen $u_{[\delta_0+\delta]}$ in $W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$ und $u^{[\delta_0+\delta]}$ in $W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$ nach.

Lemma 3.1.3

Seien die Funktionen f, h wie in Satz 3.0.5 und $g \in W^{1-\frac{1}{\vec{p}},\vec{p}}(\Gamma_D)$ gegeben. Die schwache Lösung des Transmissions-Randwertproblems auf dem aktuellen Gebiet $\Omega_{\delta_0+\delta}$ ist für alle $\delta \in [0, a]$ beschränkt durch eine Konstante $c > 0$:

$$\|u_{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})} < c. \quad (3.8)$$

Für die auf das Referenzgebiet Ω_{δ_0} transformierte schwache Lösung gilt ebenso:

$$\|u^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})} < c. \quad (3.9)$$

Beweis

Wir machen zunächst Aussagen über die Normen der vorgegebenen Funktionen f, h, g auf

den Gebieten Ω_{δ_0} und $\Omega_{\delta_0+\delta}$ mit den Risslängen δ_0 und $\delta_0 + \delta$.

Die Differenz zweier Gebiete mit unterschiedlicher Risslänge besteht allein aus der Differenz der beiden Interfaces:

$$\Omega_{\delta_0} \setminus \Omega_{\delta_0+\delta} = (\Gamma_{T_{\delta_0}} \setminus \Gamma_{T_{\delta_0+\delta}}) \subset \partial\Omega_j \quad \text{für } j \in \{1, 2\}.$$

Daher ist für die Normen von f leicht einzusehen:

$$\|f\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})} = \sum_{j=1}^2 \|f_j\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} = \|f\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})}$$

Da $\text{supp } h \subset \partial\Omega$, ist $\|h\|_{L^q(\Gamma_N)}$ unabhängig von der Risslänge, sowie von T_δ .

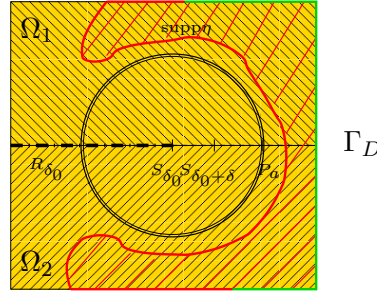


Abb. 3.3: Zur Abschneidefunktion η

Im Hinblick auf die gleichmäßige Beschränktheit der Fortsetzungen von g stellen wir folgende Überlegungen an: Per Definition existiert für $g \in W^{1-\frac{1}{\vec{p}},\vec{p}}(\Gamma_D)$ eine Fortsetzung $\hat{g}_{[\delta_0+\delta]}^* \in W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$ für $\delta \in [0, a]$. Multipliziert man $\hat{g}_{[\delta_0+\delta]}^*$ mit einer Funktion $\eta \in C^\infty(\bar{\Omega})$, so ist $(\hat{g}_{[\delta_0+\delta]}^* \eta) \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ mit $\text{supp}(\hat{g}_{[\delta_0+\delta]}^* \eta) = \text{supp} \hat{g}_{[\delta_0+\delta]}^* \cap \text{supp} \eta$. Sei $B_a = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - S_{\delta_0}| \leq a\}$. Wählt man η so, dass $B_a \cap \text{supp} \eta = \emptyset$, $\eta \equiv 1$ auf Γ_D , dann ist $\hat{g} = (\hat{g}_{[\delta_0+\delta]}^* \eta)$ eine zulässige Fortsetzung für jedes $\delta \in [0, a]$. Siehe hierzu Abbildung 3.3. Wie für die Funktion f gilt dann:

$$\|\hat{g}_{[\delta_0+\delta]}^*\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})} = \|\hat{g}_{[\delta_0]}^*\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})}.$$

Im Folgenden bezeichnet $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$ die schwache Lösung des Transmissions-Randwert-Problems auf $\Omega_{\delta_0+\delta}$ für beliebiges $\delta \in [0, a]$, also:

$$u_j^0 = u_{[\delta_0+\delta]j}^0 = u_{[\delta_0+\delta]}^0 \Big|_{\Omega_j} \quad \text{und} \quad u_j = u_{[\delta_0+\delta]j} = u_{[\delta_0+\delta]} \Big|_{\Omega_j}.$$

Es gilt $\|u_j\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \leq \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \|\hat{g}_j\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}$. Daher zeigen wir im Folgenden die Beschränktheit von $\|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}$. Wir gehen von der schwachen Formulierung mit u^0 als

spezielle Testfunktion aus:

$$\sum_{j=1}^2 \mu_j \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} (\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j) \nabla u_j^0 \, d\mathbf{x} \quad (3.10)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \left(\int_{\Omega_j} f_j u_j^0 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} h_j u_j^0 \, ds \right). \quad (3.11)$$

Ausdruck (3.10) kann mit Lemma 2.2.7 nach unten abgeschätzt werden. Ausdruck (3.11) wird nun nach oben abgeschätzt.

Abschätzung von Ausdruck (3.11):

Für $j \in \{1, 2\}$ erhalten wir durch Anwendung der Hölder-Ungleichung (2.20)

$$\int_{\Omega_j} f_j u_j^0 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} h_j u_j^0 \, ds \leq \|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \|u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} \|u_j^0\|_{L^{p_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)}. \quad (3.12)$$

Dabei ist $\|u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}$ und nach Definition 2.1.6 gilt

$$\begin{aligned} \|u_j^0\|_{L^{p_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} &\leq \|u_j^0\|_{W^{1-\frac{1}{p_j}, p_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} = \inf_{\substack{v_j^0 \in W^{1,p_j}(\Omega_j) \\ v_j^0|_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} = u_j^0|_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j}}} \|v_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \\ &\leq \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}. \end{aligned}$$

Also ist

$$(3.12) \leq \|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}. \quad (3.13)$$

Ausnutzung der Normäquivalenz aus Lemma 2.1.2 ergibt

$$(3.13) \leq \left(\|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} \right) c_j \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}. \quad (3.14)$$

Abschätzung von Ausdruck (3.10):

Nun sollen die Integrale in Ausdruck (3.10) abgeschätzt werden. Es ist

$$\mu_j \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} (\nabla u_j^0 + \nabla \hat{g}_j) \nabla u_j^0 \, d\mathbf{x} = a_{\hat{g}}(u_j^0, u_j^0). \quad (3.15)$$

$p_j \geq 2$:

Daher erhalten wir mit Abschätzung (2.47) aus Lemma 2.2.7 im Fall $p_j \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mu_j &\left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - 2^{p_j-2} \left(|\Omega_j|^{p_j-1} + \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \\ &\leq \left(\|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} \right) c_j \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Da $u^0 \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$ ist, folgt aus $\nabla u_j^0 = 0$ sofort $u_j^0 = 0$. Wir gehen also von $\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \neq 0$ aus und dividieren Ungleichung (3.16) durch $\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$:

$$\frac{\mu_j \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - 2^{p_j-2} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) - 2^{p_j-2} |\Omega_j|^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)}{\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} \quad (3.17)$$

$$\leq \left(\|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} \right) c_j. \quad (3.18)$$

Mithilfe der Ungleichung (3.17) \leq (3.18) soll die Beschränktheit von $\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$ nachgewiesen werden. Dazu wird Ausdruck (3.17) genauer untersucht. Wir unterscheiden dabei die Fälle $\left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - 2^{p_j-2} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) < 0$, sowie $\left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - 2^{p_j-2} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \geq 0$.

Fall 1: $\left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - 2^{p_j-2} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) < 0$

In diesem Fall ist $\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq 2^{p_j-2} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$. Wir wenden die Dreiecksungleichung an und erhalten

$$\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq 2^{p_j-2} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}.$$

Folglich ist

$$\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq (2^{p_j-2} + 1) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}. \quad (3.19)$$

Fall 2: $\left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - 2^{p_j-2} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \geq 0$

Dann ist $\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \geq 2^{p_j-2} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$ und wir finden eine Konstante $m \in \mathbb{R}_0^+$, sodass

$$\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = (1 + m) 2^{p_j-2} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad (3.20)$$

ist. Wir untersuchen nun die Fälle $0 \leq m < 1$, bzw. $m \geq 1$.

Fall 2.1: $0 \leq m < 1$

Für $0 \leq m < 1$ sehen wir sofort, dass

$$\begin{aligned} \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} &\leq \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq 2^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad \text{und} \\ \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} &\leq (2^{p_j-1} + 1) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad \text{ist.} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Fall 2.2: $m \geq 1$

Hierfür folgt aus (3.20), dass $\|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = \frac{2^{2-p_j}}{(1+m)} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$ ist. Damit lässt sich (3.17) wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} (3.17) &= \frac{\mu_j \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \left(\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \frac{1}{(1+m)} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) - \frac{|\Omega_j|^{p_j-1}}{(1+m)} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)}{\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} \\ &= \frac{\mu_j \left(\left(\frac{m}{1+m} \right) \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \frac{|\Omega_j|^{p_j-1}}{(1+m)} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)}{\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Wegen $m \geq 1$ ist $\frac{m}{1+m} \geq \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
(3.22) &\geq \frac{\mu_j \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - |\Omega_j|^{p_j-1} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)}{\left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} \\
&\geq \frac{\mu_j \left(\frac{1}{2} \left| \left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right|^{p_j} - |\Omega_j|^{p_j-1} \left(\left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} + \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \right)}{\left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Zum Einen kann hier

$$\left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad \text{sein.} \tag{3.24}$$

Ist $\left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \geq \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$, so existiert eine Konstante $b \in \mathbb{R}_0^+$, sodass

$$\left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = (1+b) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad \text{ist.} \tag{3.25}$$

Jetzt sind die beiden Fälle $0 \leq b < 1$ und $b \geq 1$ zu untersuchen.

Fall 2.2.1: $0 \leq b < 1$

Für $0 \leq b < 1$ folgt sofort

$$\left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq 2 \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad . \tag{3.26}$$

Fall 2.2.2: $b \geq 1$

Aus (3.25) erhalten wir $\|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = \frac{1}{1+b} \left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$. Deshalb folgt für Ausdruck (3.23):

$$\begin{aligned}
(3.23) &= \frac{\mu_j \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{1+b} \right)^{p_j} \left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - |\Omega_j|^{p_j-1} \frac{b+2}{b+1} \left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)}{\left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} \\
&= \mu_j \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{1+b} \right)^{p_j} \left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} - \frac{b+2}{b+1} |\Omega_j|^{p_j-1} \right).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Mit $b \geq 1$ ist $\frac{b}{b+1} \geq \frac{1}{2}$ und $\frac{b+2}{b+1} \leq 1 + \frac{b}{b+1} < 2$ und wir erhalten:

$$(3.27) \geq \mu_j \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{p_j+1} \left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} - 2 |\Omega_j|^{p_j-1} \right) \tag{3.28}$$

Wegen (3.28) \leq (3.18) erhalten wir durch Auflösen nach $\left\| \nabla u_j^0 \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$ und Ausnutzung der Normäquivalenz 2.1.2:

$$\left\| u_j^0 \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \leq c_j \left(\left(\frac{c_j}{\mu_j} \left(\|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \Omega_j)} \right) + 2 |\Omega_j|^{p_j-1} \right) 2^{p_j+1} \right)^{\frac{1}{p_j-1}}. \tag{3.29}$$

Damit ist $\left\| u_j^0 \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}$ für den Fall 2.2.2 nach oben beschränkt.

Um die Abschätzungen aus den übrigen Fällen zu berücksichtigen, werden die Ungleichungen (3.19), (3.21), (3.24), sowie (3.26) addiert:

$$\|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} < c_j \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq c_j \frac{3 \cdot 2^{p_j-2} + 5}{4} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad . \quad (3.30)$$

Durch Addition der Ungleichungen (3.29), (3.30) werden nun alle Fälle berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} &< 2^{\frac{p_j+1}{p_j-1}} c_j \left(\frac{c_j}{\mu_j} \left(\|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \Omega_j)} \right) + 2|\Omega_j|^{p_j-1} \right)^{\frac{1}{p_j-1}} \\ &\quad + c_j \frac{3 \cdot 2^{p_j-2} + 5}{8} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \\ &= C \left(p_j, \|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)}, \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \Omega_j)}, \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}, |\Omega_j|, c_j \right) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Damit sind die Untersuchungen für $p_j \geq 2$ abgeschlossen. Wir widmen uns nun dem Fall $1 < p_j < 2$.

$1 < p_j < 2$:

Die Vorgehensweise ist analog wie für $p_j \geq 2$.

So erhalten wir für $1 < p_j < 2$ mithilfe von Abschätzung (2.48) aus Lemma 2.2.7:

$$\begin{aligned} \mu_j \left(\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1 \right) |\Omega_j| + 2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} - \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \\ \leq \left(\|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} \right) c_j \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Durch Division von Ungleichung (3.32) durch $\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \neq 0$ ergibt sich:

$$\frac{\mu_j \left(\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1 \right) |\Omega_j| + \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \left(2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \right)}{\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} \quad (3.33)$$

$$\leq c_j \left(\|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} \right) . \quad (3.34)$$

Wieder untersuchen wir Ausdruck (3.33) genauer und unterscheiden dabei zunächst die Fälle $\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) < 0$ und $\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \geq 0$.

Fall 1: $\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) < 0$

Hier ist $\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq 2^{\frac{2-p_j}{2}} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$ und durch Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq \left(2^{\frac{2-p_j}{2}} + 1 \right) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad . \quad (3.35)$$

Fall 2: $\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right) \geq 0$

Dabei ist $2^{\frac{p_j-2}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \geq \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$ und es existiert eine Konstante $k \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = (1+k) 2^{\frac{2-p_j}{2}} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad . \quad (3.36)$$

Nun sind die Fälle $0 \leq k < 1$ und $k \geq 1$ zu unterscheiden.

Fall 2.1: $0 \leq k < 1$

Für $0 \leq k < 1$ ist $\|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} < 2^{\frac{4-p_j}{2}} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$ und wir ermitteln durch Anwendung der Dreiecksungleichung:

$$\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} < \left(2^{\frac{4-p_j}{2}} + 1\right) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}. \quad (3.37)$$

Fall 2.2: $k \geq 1$

Aus (3.36) erhalten wir $\|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = \frac{2^{\frac{p_j-2}{2}}}{1+k} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$. Damit ist

$$(3.33) = \frac{\mu_j \left(\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1\right) |\Omega_j| + \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \left(2^{\frac{p_j-2}{2}} \left(\frac{k}{1+k}\right) \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}\right) \right)}{\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}}. \quad (3.38)$$

Wegen $k \geq 1$, ist $\frac{k}{1+k} \geq \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$ und es folgt

$$(3.38) \geq \frac{\mu_j \left(\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1\right) |\Omega_j| + 2^{\frac{p_j-4}{2}} \|\nabla u_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j} \right)}{\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} \geq \frac{\mu_j \left(\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1\right) |\Omega_j| + 2^{\frac{p_j-4}{2}} \left| \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right|^{p_j} \right)}{\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}}. \quad (3.39)$$

Dabei kann

$$\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad \text{sein.} \quad (3.40)$$

Ist dagegen $\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \geq \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$, so finden wir eine Konstante $l \in \mathbb{R}_0^+$, sodass

$$\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = (1+l) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \quad (3.41)$$

ist. Wie oben müssen nun die Fälle $0 \leq l < 1$ und $l \geq 1$ unterschieden werden.

Fall 2.2.1: $0 \leq l < 1$

Hier folgt sofort

$$\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} < 2 \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}. \quad (3.42)$$

Fall 2.2.2: $l \geq 1$:

Gemäß (3.41) ist $\|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} = \frac{1}{1+l} \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$ und damit erhalten wir

$$(3.39) \geq \mu_j \left(\frac{\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1\right) |\Omega_j|}{(1+l) \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} + 2^{\frac{p_j-4}{2}} \left(\frac{l}{1+l}\right)^{p_j} \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right). \quad (3.43)$$

Wegen $l \geq 1$ gilt $\frac{l}{1+l} \geq \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$ und es folgt

$$(3.43) \geq \mu_j \left(\frac{\left(2^{\frac{p_j-2}{2}} - 1\right) |\Omega_j|}{\|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} + 2^{\frac{-p_j-4}{2}} \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right). \quad (3.44)$$

Zumal (3.44) \leq (3.34) ist, erhalten wir durch Auflösen nach $\|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$ und Ausnutzung der Normäquivalenz aus Lemma 2.1.2:

$$\|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \leq 2^{\frac{p_j+4}{2p_j-2}} c_j \left(\frac{c_j}{\mu_j} \left(\|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Omega_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j})} \right) + \frac{\left(1 - 2^{\frac{p_j-2}{2}}\right) |\Omega_j|}{\|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} \right)^{\frac{1}{p_j-1}}. \quad (3.45)$$

Hiermit haben wir für $\|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}$ mit $1 < p_j < 2$ im Fall 2.2.2 eine Abschätzung gefunden.

Zur Berücksichtigung der anderen Fälle addieren wir die Ungleichungen (3.35), (3.37), (3.40), sowie (3.42) und erhalten die Abschätzung:

$$\|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \leq c_j \|\nabla u_j^0\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} < c_j \frac{3 \cdot 2^{\frac{2-p_j}{2}} + 5}{4} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}. \quad (3.46)$$

Addition der Ungleichungen (3.45) und (3.46) berücksichtigt nun alle Fälle:

$$\begin{aligned} \|u_j^0\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} &< 2^{\frac{-p_j+6}{2p_j-2}} c_j \left(\frac{c_j}{\mu_j} \left(\|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)} \right) + \frac{\left(1 - 2^{\frac{p_j-2}{2}}\right) |\Omega_j|}{\|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}} \right)^{\frac{1}{p_j-1}} \\ &\quad + c_j \frac{3 \cdot 2^{\frac{2-p_j}{2}} + 5}{8} \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \\ &= C \left(p_j, \|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)}, \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)}, \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}, |\Omega_j|, c_j \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Damit gilt für alle $p_j \in (1, \infty)$:

$$\|u^0\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_\delta)} < \sum_{j=1}^2 C \left(p_j, \|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)}, \|h_j\|_{L^{q_j}(\Gamma_N \cap \partial\Omega_j)}, \|\nabla \hat{g}_j\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}, |\Omega_j|, c_j \right) = c. \quad (3.48)$$

Dabei sind die Konstanten c_j aus der Normäquivalenz 2.1.2 für $j \in \{1, 2\}$ gegeben durch

$$c_j = \left(1 + c_{PF_j}^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}.$$

Weil wir einen Interfaceriss behandeln, sind die Konstanten $c_{PF_j}^{p_j}$ aus der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung 2.1.3 unabhängig von der Risslänge $\delta \in [0, a]$. Folglich ist auch die Konstante c unabhängig von der Risslänge δ .

Nun ist gezeigt, dass $\left\| u_{[\delta_0+\delta]}^0 \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})}$ für alle $\delta \in [0, a]$ durch Gleichung (3.48) gleichmäßig nach oben beschränkt ist. Wegen $\left\| u_{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})} \leq \left\| u_{[\delta_0+\delta]}^0 \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})} + \|\hat{g}\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})}$ lässt sich dies auf $\left\| u_{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})}$ übertragen. Weil T_δ ein Diffeomorphismus ist, gilt $T_\delta^{-1}(\Omega_{\delta_0}) = \Omega_{\delta_0+\delta}$. Wegen $u^{[\delta_0+\delta]} = u_{[\delta_0+\delta]} \circ T_\delta^{-1}$ ist $\left\| u^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0})} = \left\| u_{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})}$. Daher sind die transformierten Lösungen ebenfalls gleichmäßig beschränkt. ■

Mithilfe des soeben bewiesenen Lemmas lässt sich nun die Konvergenz der auf das Referenzgebiet Ω_{δ_0} transformierten schwachen Lösung $u^{[\delta_0+\delta]}$ des Transmissions-Randwertproblems auf $\Omega_{\delta_0+\delta}$ gegen die schwache Lösung $u_{[\delta_0]}$ des Transmissions-Randwertproblems auf Ω_{δ_0} zeigen.

Satz 3.1.1

Ist $u^{[\delta_0+\delta]}$ die auf das Referenzgebiet Ω_{δ_0} transformierte schwache Lösung des Transmissions-Randwertproblems auf $\Omega_{\delta_0+\delta}$ und $u_{[\delta_0]}$ die schwache Lösung des Transmissions-Randwertproblems auf Ω_{δ_0} , so gilt:

$$\left\| u^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]} \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0})} \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0. \quad (3.49)$$

Beweis

In diesem Beweis wird wie folgt vorgegangen:

Wir stellen die schwachen Formulierungen auf $\Omega_{\delta_0+\delta}$ und Ω_{δ_0} auf. Die schwache Formulierung auf $\Omega_{\delta_0+\delta}$ wird nach Ω_{δ_0} transformiert. Anschließend wird die Differenz beider Formulierungen gebildet und die Funktion $(u^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]}) \in V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_{\delta_0})$ als spezielle Testfunktion eingesetzt. Die rechte Gleichungsseite, die die Randbedingungen enthält, wird nach oben abgeschätzt. Die linke Seite wird so lange nach unten abgeschätzt, bis der Term $\left\| u^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]} \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0})}$ entsteht.

Wir stellen also zunächst die schwache Formulierung auf $\Omega_{\delta_0+\delta}$ auf:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \mu_j \int_{\Omega_j} (\kappa_j + \left| \nabla u_{[\delta_0+\delta]j}(\mathbf{x}) \right|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_{[\delta_0+\delta]j}(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_{[\delta_0+\delta]j}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(\int_{\Omega_j} f_j(\mathbf{x}) v_{[\delta_0+\delta]j}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} h_j(\mathbf{x}) v_{[\delta_0+\delta]j}(\mathbf{x}) \, ds \right) \quad \text{für alle } v_{[\delta_0+\delta]} \in V_{(0)}^{\bar{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta}). \end{aligned}$$

Dabei gilt mit Formel (3.7):

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} u_{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{x}) &= (\nabla_{\mathbf{y}} u^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}))^\top \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{y} = (\nabla_{\mathbf{y}} u^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}))^\top J_{T_\delta} \\ &= \nabla_{\mathbf{y}} u^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) - \delta \partial_{y_1} u^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta(\mathbf{y}) = \mathfrak{I}_u^\delta(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nun lässt sich die schwache Formulierung auf das Referenzgebiet Ω_{δ_0} transformieren:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \mu_j \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\mathfrak{T}_u^\delta(\mathbf{y})|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{T}_u^\delta(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathfrak{T}_v^\delta(\mathbf{y})}{\det J_{T_\delta}^\delta(\mathbf{y})} d\mathbf{y} \\
&= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} f_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) v_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) \frac{1}{\det J_{T_\delta}^\delta(\mathbf{y})} d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} h_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) v_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) \frac{1}{\det J_{T_\delta}^\delta(\mathbf{y})} ds \quad (3.51) \\
&= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} f_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) v_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) \frac{1}{\det J_{T_\delta}^\delta(\mathbf{y})} d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} h_j(\mathbf{y}) v_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) \frac{1}{\det J_{T_\delta}^\delta(\mathbf{y})} ds.
\end{aligned}$$

Die schwache Formulierung des Transmissions-Randwert-Problems auf Ω_{δ_0} lautet:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \mu_j \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}(\mathbf{y})|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \left(\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}(\mathbf{y}) \right) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} v_{[\delta_0]j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} f_j(\mathbf{y}) v_{[\delta_0]j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} h_j(\mathbf{y}) v_{[\delta_0]j}(\mathbf{y}) ds. \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.1.2 ist $u^{[\delta_0+\delta]} \in V_{(g)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$. Damit ist $(u^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]})|_{\Gamma_D} = 0$. Also gilt $(u^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]}) \in V_{(0)}^{\vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$. Die Funktion $(u^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]})$ wird in den Gleichungen (3.51) und (3.52) als Testfunktion eingesetzt. Wir bilden jetzt die Differenz der beiden Gleichungen. Dabei lautet die rechte Seite von ((3.51) - (3.52)):

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \left(\frac{f_j^{[\delta_0+\delta]} \left(u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right)}{\det J_{T_\delta}^\delta} - f_j \left(u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right) \right) d\mathbf{y} \quad (3.53)$$

mit $\det J_{T_\delta}^\delta(\mathbf{y}) = 1 - \delta \partial_{x_1} \theta^\delta(\mathbf{y})$.

Abschätzung von ((3.51) - (3.52)) nach oben:

Wir wollen nun (3.53) nach oben abschätzen. Dazu überlegen wir uns folgenden Trick:

$$\frac{A}{1 - \delta Z} - B = A - B + \frac{\delta Z A}{1 - \delta Z} \quad (3.54)$$

Dies wenden wir auf (3.53) an:

$$(3.53) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \left(u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right) \left(f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j \right) d\mathbf{y} \quad (3.55)$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \frac{\delta \partial_{x_1} \theta^\delta(\mathbf{y})}{\det J_{T_\delta}^\delta} \left(u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right) f_j^{[\delta_0+\delta]} d\mathbf{y}. \quad (3.56)$$

Auf die Integrale in (3.55) wird die Hölder-Ungleichung (2.20) angewendet. Wegen $\theta^\delta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, ist $(\partial_{x_1} \theta^\delta) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ und $(1 - \partial_{x_1} \theta^\delta) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Insbesondere gilt $\det J_{T_\delta}^\delta > 0$ für

$\delta \in [0, a]$. Also ist die Supremum-Norm

$$\left\| \frac{\partial_{x_1} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} \right\|_\infty = \sup_{\mathbf{y} \in \Omega_j} \left| \frac{\partial_{x_1} \theta^\delta(\mathbf{y})}{\det J_{T_\delta}^\delta(\mathbf{y})} \right| = \mathfrak{s} < \infty. \quad (3.57)$$

Wir ziehen die Supremum-Norm aus den Integralen in (3.56) heraus und wenden auch die Hölder-Ungleichung (2.20) an. Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} (3.53) &\leq |(3.55) + (3.56)| \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \left(\left\| f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \delta \mathfrak{s} \left\| f_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \left(\left\| f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \delta \mathfrak{s} \left\| f_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \left(\left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \\ &\quad \left(\left\| f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \delta \mathfrak{s} \left\| f_j \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

In Lemma 3.1.3 haben wir nachgewiesen, dass die Normen $\left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}$, $\left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}$ gleichmäßig beschränkt sind. Wegen $f_j \in C^1(\Omega_j)$, ist -wie wir später noch genauer zeigen werden, auch $\left\| f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)}$ gleichmäßig beschränkt. Damit ist Ausdruck (3.58) endlich und gleichmäßig beschränkt für alle $\delta \in [0, a]$.

Abschätzung von Gleichung ((3.51) – (3.52)) nach unten:

Im Folgenden wollen wir Gleichung ((3.51) – (3.52)) nach unten abschätzen. Dazu setzen wir

$$\mathfrak{F}_{u_j}^\delta = \nabla_{\mathbf{y}} u_j^{[\delta_0+\delta]} - \delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \quad (3.59)$$

und

$$\mathfrak{D}_{u_j}^\delta = u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j}. \quad (3.60)$$

Damit lautet die linke Seite von ((3.51) – (3.52)) für $j \in \{1, 2\}$ nach Division durch μ_j :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\mathfrak{F}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{F}_{u_j}^\delta \cdot \left(\frac{\nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} - \frac{\delta \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} \right) \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega_j} \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \cdot \left(\frac{(\kappa_j + |\mathfrak{F}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \mathfrak{F}_{u_j}^\delta - (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\Omega_j} \frac{\delta \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} \cdot (\kappa_j + |\mathfrak{F}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{F}_{u_j}^\delta \mathrm{d}\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Auf die Differenz in der Klammer unter dem ersten Integral wenden wir wieder Formel (3.54) an und erhalten:

$$\begin{aligned}
(3.61) &= \int_{\Omega_j} \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \left((\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{T}_{u_j}^\delta - (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) d\mathbf{y} \\
&\quad + \int_{\Omega_j} \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \frac{\delta \partial_{x_1} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} (\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{T}_{u_j}^\delta d\mathbf{y} \\
&\quad - \int_{\Omega_j} \frac{\delta \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} (\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{T}_{u_j}^\delta d\mathbf{y} \\
&= I_1 + \int_{\Omega_j} \delta \frac{(\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \mathfrak{T}_{u_j}^\delta \cdot \left(\nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \partial_{x_1} \theta^\delta - \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right) d\mathbf{y} \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Omega_j} \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \left((\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{T}_{u_j}^\delta - (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) d\mathbf{y} \quad \text{und} \\
I_2 &= \int_{\Omega_j} \delta \frac{(\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \mathfrak{T}_{u_j}^\delta \cdot \left(\nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \partial_{x_1} \theta^\delta - \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right) d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Abschätzung von I_2 :

Zunächst soll I_2 weiter nach unten abgeschätzt werden. Wir überlegen uns deshalb, dass

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \partial_{x_1} \theta^\delta - \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right) &= \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \partial_{x_1} \theta^\delta - \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \partial_{x_1} \theta^\delta \\ \partial_{y_2} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \partial_{x_1} \theta^\delta - \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \partial_{x_2} \theta^\delta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{y_2} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \partial_{x_1} \theta^\delta - \partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \partial_{x_2} \theta^\delta \end{pmatrix} \tag{3.62} \\
&= \left(\left(\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{y_2} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \\ -\partial_{y_1} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{A}_{u_j}^\delta \end{pmatrix} \quad \text{ist.}
\end{aligned}$$

Dies nutzen wir zur weiteren Abschätzung von I_2 .

Sei $\alpha(\mathbf{y})$ der eingeschlossene Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{T}_{u_j}^\delta(\mathbf{y})$ und $(0, \mathfrak{A}_{u_j}^\delta(\mathbf{y}))^\top$. dann gilt mit dem Cosinussatz und (3.62)

$$\mathfrak{T}_{u_j}^\delta \cdot (0, \mathfrak{A}_{u_j}^\delta)^\top = \cos \alpha(\mathbf{y}) \left| \mathfrak{T}_{u_j}^\delta \right| \left| \mathfrak{A}_{u_j}^\delta \right| \geq (-1) \left| \mathfrak{T}_{u_j}^\delta \right| \left| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right| \left| \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \right|, \tag{3.63}$$

also ist

$$I_2 \geq -\delta \int_{\Omega_j} \frac{(\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \left| \mathfrak{T}_{u_j}^\delta \right| \left| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right| \left| \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \right| d\mathbf{y}. \tag{3.64}$$

$p_j \geq 2$:

Ist $p_j \geq 2$, so gilt:

$$\begin{aligned}
I_2 \geq (3.64) &\geq -\delta \int_{\Omega_j} \frac{(1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}}}{\det J_{T_\delta}^\delta} |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| |\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta| |\nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta| \, d\mathbf{y} \\
&\geq -\delta \int_{\Omega_j} \frac{(1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|)^{p_j-1}}{\det J_{T_\delta}^\delta} |\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta| |\nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta| \, d\mathbf{y}. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Jetzt wird die Hölder-Ungleichung (2.20) angewendet und unter Berücksichtigung der Dreiecksungleichung, sowie der Normäquivalenz 2.1.2 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
I_2 &\geq (3.65) \geq -\frac{\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty}{1 - \delta \|\partial_{x_1} \theta^\delta\|_\infty} \left(|\Omega_j| + \|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} \|\nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \\
&\geq -\frac{\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty}{1 - \delta \|\partial_{x_1} \theta^\delta\|_\infty} \left(|\Omega_j| + \|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} \left(\|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \|u_{[\delta_0]j}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right). \tag{3.66}
\end{aligned}$$

$1 < p_j < 2$:

Im Falle $1 < p_j < 2$, folgt unter Anwendung von Hölder-Ungleichung (2.20), Dreiecksungleichung, sowie der Normäquivalenz:

$$\begin{aligned}
I_2 \geq (3.64) &\geq -\delta \int_{\Omega_j} \frac{|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^{p_j-1}}{\det J_{T_\delta}^\delta} |\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta| |\nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta| \, d\mathbf{y} \\
&\geq -\frac{\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty}{1 - \delta \|\partial_{x_1} \theta^\delta\|_\infty} \|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \|\nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \tag{3.67}
\end{aligned}$$

$$\geq -\frac{\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty}{1 - \delta \|\partial_{x_1} \theta^\delta\|_\infty} \|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \left(\|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \|u_{[\delta_0]j}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right). \tag{3.68}$$

Abschätzung von I_1 :

Im Folgenden wenden wir uns der Abschätzung nach unten von I_1 zu. Unter Berücksichtigung von (3.59) und (3.60) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Omega_j} \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \cdot \left((\kappa_j + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) \, d\mathbf{y} \\
&= \int_{\Omega_j} \left(\mathfrak{I}_{u_j}^\delta - \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) \cdot \left((\kappa_j + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) \, d\mathbf{y} \\
&\quad + \int_{\Omega_j} \delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \cdot \left((\kappa_j + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) \, d\mathbf{y} \\
&= I_3 + I_4,
\end{aligned}$$

mit

$$I_3 = \int_{\Omega_j} \left(\mathfrak{I}_{u_j}^\delta - \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) \cdot \left((\kappa_j + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) d\mathbf{y} \text{ und}$$

$$I_4 = \int_{\Omega_j} \delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \cdot \left((\kappa_j + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) d\mathbf{y} .$$

Abschätzung von I_3 :

Zunächst soll I_3 weiter nach unten abgeschätzt werden. Wir wenden hierzu Lemma 2.2.6 an:

$$I_3 \geq \bar{c} \int_{\Omega_j} \left(\tilde{k} + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}| \right)^{p_j-2} \left| \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right|^2 d\mathbf{y} \quad (3.69)$$

$p_j \geq 2$:

Im Falle $p_j \geq 2$ ist $\tilde{k} = 0$ und es folgt

$$(3.69) \geq \bar{c} \int_{\Omega_j} \left| \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right|^{p_j} d\mathbf{y} = \bar{c} \left\| \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j}$$

$$\geq \bar{c} \left(\left\| \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \delta \left\| \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j} \quad (3.70)$$

Berücksichtigen wir für die erste Norm die Normäquivalenz 2.1.2, so ergibt sich:

$$I_3 \geq (3.70) \geq \bar{c} \left(\frac{1}{c_j} \left\| \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \delta \left\| \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j} \quad (3.71)$$

$$\geq \bar{c} \left(\frac{1}{c_j} \left\| \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j} . \quad (3.72)$$

Dabei ergibt sich die letzte Abschätzung aufgrund folgender Beziehung:

$$\left\| \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \leq \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| \nabla_{\mathbf{y}} u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}$$

$$\leq \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} . \quad (3.73)$$

$1 < p_j < 2$:

Ist $1 < p_j \leq 2$, so ist $\tilde{k} = 1$ und es gilt

$$I_3 \geq \bar{c} \int_{\Omega_j} \left(1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}| \right)^{p_j-2} \left| \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right|^2 d\mathbf{y} . \quad (3.74)$$

Nun wenden wir die Hölder-Ungleichung (2.21) an mit $p = \frac{p_j}{2}$ und $q = \frac{p_j/2}{(p_j/2)-1} = \frac{p_j}{p_j-2} < 0$:

$$\begin{aligned}
(3.74) &\geq \bar{c} \left(\int_{\Omega_j} \left(1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| + |u_{[\delta_0]j}| \right)^{p_j} d\mathbf{y} \right)^{\frac{p_j-2}{p_j}} \left(\int_{\Omega_j} |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta - \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^{p_j} d\mathbf{y} \right)^{\frac{2}{p_j}} \\
&= \bar{c} \left\| 1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| + |u_{[\delta_0]j}| \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-2} \left\| \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^2 \\
&\geq \bar{c} \left\| 1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| + |u_{[\delta_0]j}| \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-2} \left(\left\| \nabla_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} - \delta \left\| \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^2. \quad (3.75)
\end{aligned}$$

Bei der zweiten Norm berücksichtigen wir die Normäquivalenz und erhalten:

$$\begin{aligned}
I_3 &\geq (3.75) \\
&\geq \bar{c} \left\| 1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| + |u_{[\delta_0]j}| \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-2} \left(\frac{1}{c_j} \left\| \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \delta \left\| \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^2 \\
&\geq \bar{c} \left\| 1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| + |u_{[\delta_0]j}| \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-2} \left(\frac{1}{c_j} \left\| \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right)^2. \quad (3.76)
\end{aligned}$$

Hierfür wurde wieder (3.73) verwendet.

Abschätzung von I_4 :

Jetzt schätzen wir I_4 weiter nach unten ab.

$p_j \geq 2$:

Ist $p_j \geq 2$, so gilt:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \delta \int_{\Omega_j} \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \cdot \left((\kappa_j + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|)^{\frac{p_j-2}{2}} \mathfrak{I}_{u_j}^\delta - (\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j} \right) d\mathbf{y} \\
&\geq -\delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \int_{\Omega_j} |\partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]}| \left(\left(1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| \right)^{p_j-2} |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| + \left(1 + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}| \right)^{p_j-2} |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}| \right) d\mathbf{y} \\
&\geq -\delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \int_{\Omega_j} |\partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]}| \left(\left(1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| \right)^{p_j-1} + \left(1 + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}| \right)^{p_j-1} \right) d\mathbf{y}. \quad (3.77)
\end{aligned}$$

Auf (3.77) wenden wir die Hölder-Ungleichung (2.20) an und erhalten

$$\begin{aligned}
I_4 &\geq (3.77) \geq -\delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \left(\left\| 1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} + \left\| 1 + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}| \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right) \\
&\geq -\delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \left(\left\| 1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} + \left(|\Omega_j| + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} \right). \quad (3.78)
\end{aligned}$$

$1 < p_j < 2$:

Im Falle $1 < p_j < 2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \delta \int_{\Omega_j} \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \left(\frac{\mathfrak{I}_{u_j}^\delta}{(\kappa_j + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{2-p_j}{2}}} - \frac{\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}}{(\kappa_j + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{2-p_j}{2}}} \right) \mathrm{d}\mathbf{y} \\
&\geq -\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty \int_{\Omega_j} |\partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]}| \left(\frac{|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|}{|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^{2-p_j}} + \frac{|\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|}{|\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^{2-p_j}} \right) \mathrm{d}\mathbf{y} \\
&\geq -\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty \int_{\Omega_j} |\partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]}| \left(|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta|^{p_j-1} + |\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}|^{p_j-1} \right) \mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{3.79}
\end{aligned}$$

Nun wenden wir die Hölder-Ungleichung (2.20) auf (3.79) an und erhalten:

$$\begin{aligned}
I_4 &\geq (3.79) \geq -\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty \|\partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \left(\|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} + \|\nabla_{\mathbf{y}} u_{[\delta_0]j}\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right) \\
&\geq -\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty \|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \left(\|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} + \|u_{[\delta_0]j}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right). \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$I_2 + I_3 + I_4 = I_2 + I_1 \leq \frac{1}{\mu_j} (3.58) \quad .$$

Für $p_j \geq 2$ erhalten wir daher die Ungleichung (3.66) + (3.72) + (3.78) $\leq \frac{1}{\mu_j} (3.58)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty}{1 - \delta \|\partial_{x_1} \theta^\delta\|_\infty} \left(|\Omega_j| + \|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} \left(\|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \|u_{[\delta_0]j}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \\
&+ \bar{c} \left(\frac{1}{c_j} \|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty \|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j} \\
&-\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty \|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \left(1 + \|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} + \left(|\Omega_j| + \|u_{[\delta_0]j}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} \right) \\
&\leq \frac{1}{\mu_j} \left(\|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \|u_{[\delta_0]j}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \left(\|f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \delta \mathfrak{s} \|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \right). \tag{3.81}
\end{aligned}$$

Im Falle $1 < p_j < 2$ erhalten wir die Ungleichung (3.68) + (3.76) + (3.80) $\leq \frac{1}{\mu_j} (3.58)$ in der Form:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty}{1 - \delta \|\partial_{x_1} \theta^\delta\|_\infty} \|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \left(\|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \|u_{[\delta_0]j}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \\
&+ \bar{c} \left(1 + |\mathfrak{I}_{u_j}^\delta| + \|u_{[\delta_0]j}\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-2} \left(\frac{1}{c_j} \|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} - \delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty \|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \right)^2 \\
&-\delta \|\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta\|_\infty \|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \left(\|\mathfrak{I}_{u_j}^\delta\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} + \|u_{[\delta_0]j}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right) \\
&\leq \frac{1}{\mu_j} \left(\|u_j^{[\delta_0+\delta]}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \|u_{[\delta_0]j}\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \left(\|f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \delta \mathfrak{s} \|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \right). \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Jetzt werden die Ungleichungen (3.81), (3.82) nach $\left\| \mathfrak{D}_{u_j}^\delta \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} = \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}$ aufgelöst. Folglich erhalten wir im Fall $p_j \geq 2$:

$$\begin{aligned}
& \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \\
& \leq \left(\frac{1}{\bar{c}^{p_j}} \left[\frac{1}{\mu_j} \left(\left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \left(\left\| f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \delta \mathfrak{s} \|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \right) \right. \right. \\
& \quad + \frac{\delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty}{1 - \delta \left\| \partial_{x_1} \theta^\delta \right\|_\infty} \left(|\Omega_j| + \left\| \mathfrak{F}_{u_j}^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} \left(\left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \\
& \quad + \delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \left(\left\| 1 + \left| \mathfrak{F}_{u_j}^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} + \left(|\Omega_j| + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right)^{p_j-1} \right) \right]^{\frac{1}{p_j}} \\
& \quad + \delta \left\| \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} c_j.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Im Falle $1 < p_j < 2$ lautet die Ungleichung wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \\
& \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{c}}} \left[\frac{1}{\mu_j} \left(\left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \left(\left\| f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} + \delta \mathfrak{s} \|f_j\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} \right) \right. \right. \\
& \quad + \frac{\delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty}{1 - \delta \left\| \partial_{x_1} \theta^\delta \right\|_\infty} \left\| \mathfrak{F}_{u_j}^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \left(\left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \right) \\
& \quad + \delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} \left(\left\| \mathfrak{F}_{u_j}^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}^{p_j-1} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \cdot \left\| 1 + \left| \mathfrak{F}_{u_j}^\delta \right| + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right\|^{2-p_j} \\
& \quad + \delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)} c_j.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Zur weiteren Vereinfachung der Ausdrücke (3.83) und (3.84) halten wir fest:

1. Für $\delta \rightarrow 0$ gilt $0 < \frac{1}{1 - \delta \left\| \partial_{x_1} \theta^\delta \right\|_\infty} \rightarrow 1$.
2. Gemäß der Ausführungen zu (3.57) ist $\mathfrak{s} < \infty$ für $\delta \in [0, a]$.
3. Es gilt.

$$\left\| 1 + \left| \mathfrak{F}_{u_j}^\delta \right| + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \right\| \leq |\Omega_j| + \left\| \mathfrak{F}_{u_j}^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} + \left\| u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
\left\| \mathfrak{T} u_j^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} &= \left\| \nabla_{\mathbf{y}} u_j^{[\delta_0+\delta]} - \delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \\
&\leq \left\| \nabla_{\mathbf{y}} u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} + \delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \left\| \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} \\
&\leq \left(1 + \delta \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \right\|_\infty \right) \left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} \right\|_{W^{1,p_j}(\Omega_j)}.
\end{aligned}$$

$$\text{Daher ist } \left\| 1 + |\mathfrak{T} u_j^\delta| + |u_{[\delta_0]j} \right\|_{L^{p_j}(\Omega_j)} < \infty.$$

4. Wegen $f_j \in C^1(\Omega_j)$ gilt mit dem nachfolgenden Lemma 3.1.4:

$$\begin{aligned}
\left\| f_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j \right\|_{L^{q_j}(\Omega_j)} &= \delta \left(\int_{\Omega_j} \left| -\partial_{y_1} f_j \left(\mathbf{y} - \delta t_{(\delta,\mathbf{y})} \left(\theta^\delta(\mathbf{y}), 0 \right)^\top \right) \theta^\delta(\mathbf{y}) \right|^{q_j} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{q_j}} \\
&= \delta c_f.
\end{aligned}$$

Also steht vor den ersten drei Summanden von Abschätzung (3.83) der Faktor $\delta^{\frac{1}{p_j}}$, vor dem vierten Summanden sogar der Faktor δ .

Analog dazu finden wir in den ersten drei Summanden von Abschätzung (3.84) den Faktor $\delta^{\frac{1}{2}}$ und vor dem vierten den Faktor δ .

Damit lassen sich die rechten Seiten der Ausdrücke (3.83), (3.84) für $p_j \in (1, \infty)$ zusammenfassen als:

$$(3.83), (3.84) \leq \delta^{\frac{1}{p_j}} c(\delta^{1-\frac{1}{p_j}}, p_j).$$

Setzen wir $p = \max\{p_1, p_2\} \in (1, \infty)$, so folgt:

$$\left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0})} \leq \delta^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^2 c(\delta^{1-\frac{1}{p_j}}, p_j). \quad (3.85)$$

Daher gilt

$$\left\| u_j^{[\delta_0+\delta]} - u_{[\delta_0]j} \right\|_{W^{1,\bar{p}}(\Omega_{\delta_0})} \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0. \quad (3.86)$$

■

Wir tragen nun das im Beweis zitierte Lemma zur Abschätzung von f nach.

Lemma 3.1.4

Sei $f \in C^1(\Omega_{\delta_0})$. Dann gilt über jedem der beiden Teilgebiete Ω_j mit $j \in \{1, 2\}$:

$$f_j(\mathbf{y}) - f_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}) = -\delta \partial_{y_1} f_j \left(\mathbf{y} - \delta t_{(\delta,\mathbf{y})} \left(\theta^\delta(\mathbf{y}), 0 \right)^\top \right) \theta^\delta(\mathbf{y}). \quad (3.87)$$

Beweis

Wir überlegen uns zunächst, dass

$$\mathbf{y} - T_\delta^{-1}(\mathbf{y}) = T_\delta(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = -\delta(\theta^\delta(\mathbf{y}), 0)^\top \quad \text{für } \mathbf{y} \in \Omega_{\delta_0}, \mathbf{x} \in \Omega_{\delta_0+\delta} \quad (3.88)$$

ist. Mit $f \in C^1(\Omega_{\delta_0})$ ist $f_j \in C^1(\Omega_j)$ für $j \in \{1, 2\}$. Daher lässt sich der Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\left(f_j(\mathbf{y}) - f_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y})\right) &= (f_j(\mathbf{y}) - f_j(T_\delta^{-1}(\mathbf{y}))) \\
&= \nabla_{\mathbf{y}} f_j \left(\mathbf{y} - \delta t_{(\delta, \mathbf{y})}(\theta^\delta(\mathbf{y}), 0)^\top\right) \cdot (\mathbf{y} - T_\delta^{-1}(\mathbf{y})) \\
&= -\delta \nabla_{\mathbf{y}} f_j \left(\mathbf{y} - \delta t_{(\delta, \mathbf{y})}(\theta^\delta(\mathbf{y}), 0)^\top\right) \cdot (\theta^\delta(\mathbf{y}), 0)^\top \\
&= -\delta \partial_{y_1} f_j \left(\mathbf{y} - \delta t_{(\delta, \mathbf{y})}(\theta^\delta(\mathbf{y}), 0)^\top\right) \theta^\delta(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

■

Mit dem zuvor bewiesenen Satz 3.1.1 haben wir die nötige Vorarbeit geleistet, um zeigen zu können, dass die Energiefreisetzungsrates der Referenzkonfiguration Ω_{δ_0} mit der Griffithschen Formel ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned}
ERR(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]})}{\delta} \\
&\stackrel{(!)}{=} \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} DW_{elj} \left(\nabla u_{[\delta_0]j}\right) \partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \cdot \nabla \theta \, d\mathbf{y} \\
&\quad - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} W_{elj}(\nabla u_{[\delta_0]j}) \partial_{y_1} \theta \, d\mathbf{y} + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} u_{[\delta_0]j} \partial_{y_1} (f_j \theta) \, d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Diesen Zusammenhang wollen wir im folgenden Abschnitt beweisen.

3.1.3 Durch Energieminimierung zur Griffithschen Formel

In diesem Abschnitt führen wir den Grenzübergang für $\delta \rightarrow 0$ im Ausdruck

$$\frac{E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]})}{\delta} \quad \text{durch.}$$

Dies soll jedoch nicht auf direktem Wege geschehen, sondern wir wollen hierzu die in Abschnitt 2.4.2 erläuterten Energieminimierungseigenschaften der schwachen Lösungen ausnutzen. Aus Satz 2.4.4 wissen wir, dass die Lösung der schwachen Formulierung 2.3.1 zugleich auch die potentielle Energie minimiert. Deshalb stellen wir folgende Minimierungsprobleme auf:

Definition 3.1.3 (Minimierungsproblem auf Ω_{δ_0})

Finde $u_{[\delta_0]} \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_{\delta_0})$, sodass:

$$E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) \leq E(\Omega_{\delta_0}, v) \quad \text{für alle } v \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_{\delta_0}).$$

Definition 3.1.4 (Minimierungsproblem auf $\Omega_{\delta_0+\delta}$)

Finde $u_{[\delta_0+\delta]} \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta})$, sodass:

$$E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]}) \leq E(\Omega_{\delta_0+\delta}, v) \quad \text{für alle } v \in W^{1, \vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta}).$$

Bemerkung 3.1.2

Nach Lemma 3.1.2 ist

$$\begin{aligned} u^{[\delta_0+\delta]} &= u_{[\delta_0+\delta]} \circ T_\delta^{-1} \in W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0}), \\ u^{[\delta_0]} &= u_{[\delta_0]} \circ T_\delta \in W^{1,\vec{p}}(\Omega_{\delta_0+\delta}). \end{aligned}$$

Dabei sind die schwachen Lösungen $u_{[\delta_0+\delta]}$ über dem Gebiet $\Omega_{\delta_0+\delta}$ nach Satz 2.3.3 eindeutig für alle $\delta \in [0, a]$. Im Speziellen ist $u_{[\delta_0]}$ die eindeutige schwache Lösung auf dem Referenzgebiet Ω_{δ_0} .

Daher kann die nach Ω_{δ_0} transformierte schwache Lösung von $\Omega_{\delta_0+\delta}$, $u^{[\delta_0+\delta]}$, nicht die Lösung des Minimierungsproblems 3.1.3 sein. Also ist

$$E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) < E(\Omega_{\delta_0}, u_j^{[\delta_0+\delta]}).$$

Ebenso ist die nach $\Omega_{\delta_0+\delta}$ transformierte schwache Lösung auf Ω_{δ_0} , $u^{[\delta_0]}$, nicht die Lösung des Minimierungsproblems 3.1.4. Deshalb ist

$$E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]}) < E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u^{[\delta_0]}).$$

Aufgrund dieser Überlegungen läßt sich folgender Zusammenhang herstellen:

$$\frac{1}{\delta} (E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u^{[\delta_0]})) \tag{3.89}$$

$$\leq \frac{1}{\delta} (E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]})) \tag{3.90}$$

$$\leq \frac{1}{\delta} (E(\Omega_{\delta_0}, u^{[\delta_0+\delta]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]})) . \tag{3.91}$$

Dabei ist

$$ERR(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (3.90) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]}))$$

der zu berechnende Ausdruck. Wir berechnen jedoch stattdessen den Limes Inferior von Ausdruck (3.89) und den Limes Superior von (3.91) und zeigen, dass diese Ausdrücke beschränkt sind und übereinstimmen:

$$\underbrace{\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u^{[\delta_0]})}{\delta}}_{> -\infty} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}, u^{[\delta_0+\delta]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]})}{\delta} . \tag{3.92}$$

Wir beginnen mit der Berechnung des Limes Superior.

Dazu muss $E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]})$ zunächst auf die Referenzkonfiguration Ω_{δ_0} transformiert werden.

Es ist

$$\begin{aligned} E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]}) &= J_{el}(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]}) - W(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]}) \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0+\delta]j}|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_j} f_j u_{[\delta_0+\delta]j} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} h_j u_{[\delta_0]j} \, ds . \end{aligned}$$

Wir transformieren vom aktuellen Gebiet $\Omega_{\delta_0+\delta}$ auf das Referenzgebiet Ω_{δ_0} und erhalten:

$$\begin{aligned} E_{[\delta_0+\delta]}(\Omega_{\delta_0}, u^{[\delta_0+\delta]}) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j}{2}} \frac{1}{\det J_{T_\delta}^\delta} \, d\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\Omega_j} f_j^{[\delta_0+\delta]} u_j^{[\delta_0+\delta]} \frac{1}{\det J_{T_\delta}^\delta} \, d\mathbf{y} - \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} \frac{h_j u_j^{[\delta_0+\delta]}}{1} \, ds \\ &= E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]}). \end{aligned}$$

Ausdruck (3.91) lautet nun:

$$\begin{aligned} E(\Omega_{\delta_0}, u^{[\delta_0+\delta]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]}) &= E(\Omega_{\delta_0}, u^{[\delta_0+\delta]}) - E_{[\delta_0+\delta]}(\Omega_{\delta_0}, u^{[\delta_0+\delta]}) \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]}|^2)^{\frac{p_j}{2}} - \frac{(\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2)^{\frac{p_j}{2}}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \, d\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\Omega_j} \left(f_j u_j^{[\delta_0+\delta]} - \frac{f_j^{[\delta_0+\delta]} u_j^{[\delta_0+\delta]}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \right) \, d\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} \left(h_j u_j^{[\delta_0+\delta]} - \frac{h_j u_j^{[\delta_0+\delta]}}{1} \right) \, ds \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j}{p_j} I_{1j} - I_{2j} - 0. \end{aligned}$$

Betrachtung von (I_{1j}/δ) :

Für $j \in \{1, 2\}$ können wir Integral I_{1j} mithilfe des Tricks (3.54) umformen:

$$\begin{aligned} I_{1j} &= \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \left(\kappa_j + |\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]}|^2 \right)^{\frac{p_j}{2}} - \left(\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2 \right)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{y} - \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \frac{\delta \partial_{x_1} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} \left(\kappa_j + |\mathfrak{T}_{u_j}^\delta|^2 \right)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{y} \\ &= I_{3j} - I_{4j}. \end{aligned}$$

Betrachtung von (I_{2j}/δ) :

Durch Anwendung des Tricks (3.54) auf I_{2j} erhalten wir für $j \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} I_{2j} &= \int_{\Omega_j} \left(f_j u_j^{[\delta_0+\delta]} - f_j^{[\delta_0+\delta]} u_j^{[\delta_0+\delta]} \right) \, d\mathbf{y} - \int_{\Omega_j} \frac{\delta \partial_{x_1} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} f_j^{[\delta_0+\delta]} u_j^{[\delta_0+\delta]} \, d\mathbf{y} \\ &= I_{5j} - I_{6j}. \end{aligned}$$

Betrachtung von (I_{3j}/δ) :

Im Folgenden untersuchen wir das Integral I_{3j} genauer. Wir stellen fest, dass

$$\begin{aligned} I_{3j} &= \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \left(\kappa_j + |\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]}|^2 \right)^{\frac{p_j}{2}} - \left(\kappa_j + |\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]} - \delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta|^2 \right)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{y} \\ &= J_{elj}(\Omega_j, u_j^{[\delta_0+\delta]}) - J_{elj}(\Omega_j, \tilde{u}_j^{[\delta_0+\delta]}). \end{aligned} \tag{3.93}$$

ist. Aus Satz 2.4.1 wissen wir, dass J_{elj} Fréchet-differenzierbar ist. Wir können daher den Mittelwertsatz für Fréchet-differenzierbare Funktionale anwenden:

Satz 3.1.2 (Mittelwertsatz für Fréchet-differenzierbare Funktionale, [10] S.169)

Sei X ein Banachraum und $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Fréchet-differenzierbares Funktional mit Ableitung $DI \in X'$. Für jedes u und jedes h aus X existiert eine Konstante $t_0 = t_0(u, h) \in [0, 1]$, sodass

$$I(u + h) - I(u) = \langle DI(u + t_0h), h \rangle. \quad (3.94)$$

Durch Anwendung dieses Satzes erhalten wir mit Formel (2.85) aus Satz 2.4.1:

$$\frac{I_{3j}}{\delta} = \frac{\left\langle DJ_{elj}(\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]} - \delta t_\delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta), (\delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta) \right\rangle}{\delta} =$$

$$\mu_j \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]} - \delta t_\delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} (\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]} - \delta t_\delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta) (\partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta) \, d\mathbf{y}$$

Dabei ist $(\partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta) \in (L^{p_j}(\Omega_j))^2$ mit $\nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^2$. Es folgt mit Satz 3.1.1 für $\delta \rightarrow 0$:

$$(\partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta) \rightarrow \partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \nabla_{\mathbf{y}} \theta \quad \text{in } (L^{p_j}(\Omega_j))^2.$$

Ebenso folgt $\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]} \rightarrow \nabla u_{[\delta_0]j}$ in $(L^{p_j}(\Omega_j))^2$. Weil $DJ_{elj}(\cdot)$ stetig ist, gilt:

$$\frac{I_{3j}}{\delta} \longrightarrow \mu_j \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_{[\delta_0]j} (\partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \nabla_{\mathbf{y}} \theta) \, d\mathbf{y} \quad \text{für } \delta \rightarrow 0. \quad (3.95)$$

Betrachtung von (I_{4j}/δ) :

Zur Grenzwertbetrachtung von

$$\frac{I_{4j}}{\delta} = \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \frac{\partial_{x_1} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} (\kappa_j + |\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]} - \delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{y} \quad (3.96)$$

stellen wir folgende Überlegungen an: Wegen $\theta^\delta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ gilt für $\delta \rightarrow 0$

$$\frac{\partial_{x_1} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} \rightarrow \frac{\partial_{y_1} \theta}{1} \quad \text{in } (C^\infty(\Omega_j))^2 \quad \text{und} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta \rightarrow \nabla_{\mathbf{y}} \theta \quad \text{in } (C^\infty(\Omega_j))^2.$$

Da $W_{elj}(\cdot) = (\kappa_j + |\cdot|^2)^{\frac{p_j}{2}}$ stetig ist, gilt:

$$W_{elj}(\nabla u_j^{[\delta_0+\delta]} - \delta \partial_{y_1} u_j^{[\delta_0+\delta]} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta) \rightarrow W_{elj}(\nabla u_{[\delta_0]j}) \quad \text{in } L^{p_j}(\Omega_j).$$

Also ermitteln wir für $\delta \rightarrow 0$:

$$\frac{I_{4j}}{\delta} \longrightarrow \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \partial_{y_1} \theta (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{y}. \quad (3.97)$$

Betrachtung von (I_{5j}/δ) :

Zur Durchführung des Grenzüberganges für $\delta \rightarrow 0$ für

$$\frac{I_{5j}}{\delta} = \int_{\Omega_j} u_j^{[\delta_0+\delta]} \frac{(f_j - f_j^{[\delta_0+\delta]})}{\delta} \, d\mathbf{y}$$

wenden wir Lemma 3.1.4 an, aus welchem folgt:

$$\frac{(f_j(\mathbf{y}) - f_j^{[\delta_0+\delta]}(\mathbf{y}))}{\delta} \rightarrow (\partial_{y_1} f_j(\mathbf{y})) \theta(\mathbf{y}) \quad \text{in } L^\infty(\Omega_j).$$

Mit Satz 3.1.1 gilt nun

$$\frac{I_{5j}}{\delta} \longrightarrow - \int_{\Omega_j} u_{[\delta_0]j} (\partial_{y_1} f_j) \theta \, d\mathbf{y}. \quad (3.98)$$

Betrachtung von (I_{6j}/δ) :

Zuletzt machen wir den Grenzübergang für $\delta \rightarrow 0$ an

$$\frac{I_{6j}}{\delta} = \int_{\Omega_j} \frac{\partial_{x_1} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} f_j^{[\delta_0+\delta]} u_j^{[\delta_0+\delta]} \, d\mathbf{y}.$$

Aufgrund der vorausgehenden Untersuchungen wissen wir, dass:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{x_1} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} &\rightarrow \frac{\partial_{y_1} \theta}{1} \quad \text{in } C^\infty(\Omega_j) \quad \text{sowie} \quad f_j^{[\delta_0+\delta]} \rightarrow f_j \quad \text{in } C^1(\Omega_j) \quad \text{und} \\ u_j^{[\delta_0+\delta]} &\rightarrow u_{[\delta_0]j} \quad \text{in } W^{1,p_j}(\Omega_j) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{I_{6j}}{\delta} \rightarrow \int_{\Omega_j} (\partial_{y_1} \theta) f_j u_{[\delta_0]j} \, d\mathbf{y}. \quad (3.99)$$

Nun können wir feststellen, dass

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{(E(\Omega_{\delta_0}, u_j^{[\delta_0+\delta]}) - E_{[\delta_0+\delta]}(\Omega_{\delta_0}, u_j^{[\delta_0+\delta]}))}{\delta} \\ &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{(I_{3j} - I_{4j})}{\delta} - \frac{(I_{5j} - I_{6j})}{\delta} \right) \\ &= \sum_{j=1}^2 \mu_j \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_{[\delta_0]j} \cdot (\partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \nabla \theta) \, d\mathbf{y} \\ &\quad - \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \partial_{y_1} \theta (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{y} + \int_{\Omega_j} u_{[\delta_0]j} \partial_{y_1} (f_j \theta) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

ist.

Um die Griffithsche Formel komplett zu beweisen, muss im Folgenden noch der Ausdruck

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u^{[\delta_0]})}{\delta}$$

berechnet werden. Dabei ist

$$E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u^{[\delta_0]}) = \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_j^{[\delta_0]}|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{y} - \int_{\Omega_j} f_j u_j^{[\delta_0]} \, d\mathbf{y} - \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} h_j u_j^{[\delta_0]} \, ds .$$

Durch Ausführung der Transformation auf das Referenzgebiet erhalten wir:

$$E^{[\delta_0]}(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \frac{(\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j} - \delta \partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta|^2)^{\frac{p_j}{2}}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \, d\mathbf{y} \right. \\ \left. - \int_{\Omega_j} \frac{f^{[\delta_0+\delta]} u_{[\delta_0]j}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \, d\mathbf{y} - \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} \frac{h_j u_{[\delta_0]j}}{1} \, ds \right) .$$

Ausdruck (3.89) lautet damit:

$$\begin{aligned} & (E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u^{[\delta_0]})) = (E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E^{[\delta_0]}(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]})) \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \left((\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j}{2}} - \frac{(\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j} - \delta \partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta|^2)^{\frac{p_j}{2}}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \right) \, d\mathbf{y} \\ & \quad - \int_{\Omega_j} \left(f_j u_{[\delta_0]j} - \frac{f^{[\delta_0+\delta]} u_{[\delta_0]j}}{\det J_{T_\delta}^\delta} \right) \, d\mathbf{y} - \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_j} \left(h_j u_{[\delta_0]j} - \frac{h_j u_{[\delta_0]j}}{1} \right) \, ds \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j}{p_j} I_{1j} + I_{2j} - 0 . \end{aligned}$$

Das Integral I_{1j} lässt sich aufteilen in:

$$\begin{aligned} I_{1j} &= \int_{\Omega_j} \left((\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j}{2}} - (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j} - \delta \partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta|^2)^{\frac{p_j}{2}} \right) \, d\mathbf{y} \\ & \quad - \int_{\Omega_j} \frac{\delta \partial_{x_1} \theta^\delta}{\det J_{T_\delta}^\delta} (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j} - \delta \partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \nabla_{\mathbf{x}} \theta^\delta|^2)^{\frac{p_j}{2}} \, d\mathbf{y} \\ &= I_{3j} - I_{4j} . \end{aligned}$$

Das Integral I_{2j} unterteilen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} I_{2j} &= \int_{\Omega_j} \left(f_j u_{[\delta_0]j} - f_j^{[\delta_0+\delta]} u_{[\delta_0]j} \right) \, d\mathbf{y} - \int_{\Omega_j} \frac{\delta \partial_{x_1} \theta^\delta}{dJd} f_j^{[\delta_0+\delta]} u_{[\delta_0]j} \, d\mathbf{y} \\ &= I_{5j} - I_{6j} . \end{aligned}$$

Bei analoger Vorgehensweise können wir folgende Grenzwerte für $\delta \rightarrow 0$ ermitteln:

$$\begin{aligned}\frac{I_{3j}}{\delta} &\rightarrow \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_{[\delta_0]j} \left(\partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \nabla_{\mathbf{y}} \theta \right) \mathrm{d}\mathbf{y} , \\ \frac{I_{4j}}{\delta} &\rightarrow \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \partial_{y_1} \theta (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j}{2}} \mathrm{d}\mathbf{y} , \\ \frac{I_{5j}}{\delta} &\rightarrow - \int_{\Omega_j} u_{[\delta_0]j} (\partial_{y_1} f_j) \theta \mathrm{d}\mathbf{y} , \\ \frac{I_{6j}}{\delta} &\rightarrow \int_{\Omega_j} (\partial_{y_1} \theta) f_j u_{[\delta_0]j} \mathrm{d}\mathbf{y} .\end{aligned}$$

Durch Vergleich dieser Grenzwerte mit denen, die bei der Berechnung des Limes Superior von (3.91) entstehen, sehen wir, dass

$$\underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0]})}{\delta} = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0+\delta]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]})}{\delta}$$

ist. Damit haben wir die Griffithsche Formel für die Energiefreisetzungsrate bewiesen:

$$\begin{aligned}ERR(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_{\delta_0}, u_{[\delta_0]}) - E(\Omega_{\delta_0+\delta}, u_{[\delta_0+\delta]})}{\delta} \\ &= \sum_{j=1}^2 \mu_j \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_{[\delta_0]j} \cdot (\partial_{y_1} u_{[\delta_0]j} \nabla \theta) \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &\quad - \frac{\mu_j}{p_j} \int_{\Omega_j} \partial_{y_1} \theta (\kappa_j + |\nabla u_{[\delta_0]j}|^2)^{\frac{p_j}{2}} \mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\Omega_j} u_{[\delta_0]j} \partial_{y_1} (f_j \theta) \mathrm{d}\mathbf{y} .\end{aligned} \tag{3.100}$$

■

Bemerkung 3.1.3

Im Beweis der Griffithschen Formel ist die Funktion $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig, aber fest gewählt und erscheint in der Formel durch die Anwendung des Diffeomorphismus $T_\delta = T_\delta(\theta)$. Da für jede Abschneidefunktion $\tilde{\theta}$, welche die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, ein Diffeomorphismus $T_{\tilde{\delta}}(\tilde{\theta})$ mit $\tilde{\delta} \in [0, \tilde{a}]$ existiert, lässt sich die Beziehung (3.100) für jedes $\tilde{\theta}$ beweisen. Somit ist der Satz bewiesen für alle Abschneidefunktionen $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, welche die Voraussetzungen erfüllen.

Kapitel 4

Numerische Beispiele

Die Energiefreisetzungsrate eignet sich zu Aussagen über die Rissbildung bzw. den Rissfortschritt in Körpern mit bekannter dissipativer Energie. Daher ist es im Ingenieurwesen von Interesse, die Energiefreisetzungsrate für Bauteile zu kennen. Ihre Bestimmung kann experimentell oder numerisch geschehen. Für numerische Rechnungen ist insbesondere die Griffithsche Formel anwendbar. Ihre Auswertung lässt sich leicht in das Postprocessing von Finiten-Element-Programmen integrieren, da alle dafür benötigten Größen, z.B. Verzerrungsenergie-dichte und Spannungen, aus der berechneten Lösung gewonnen werden können.

Für die nachstehenden Beispiele diente zur Berechnung der schwachen Lösung der Randwertprobleme das Programm MyFEM++, welches von Dr. Thomas Merkle geschrieben wurde. MyFEM++ basiert auf der h -Finiten-Elementmethode mit stückweise linearen, stetigen Basisfunktionen. Zum Lösen des dabei entstehenden nichtlinearen Gleichungssystems wird das Newton-Verfahren angewendet.

Im Rahmen der Diplomarbeit war die Griffithsche Formel in den bereits vorhandenen Postprocessing-Code von MyFEM++ zu implementieren. Die numerische Integration wird mit der Sieben-Punkte-Formel von Radon durchgeführt.

In diesem Kapitel soll das Verhalten der Energiefreisetzungsrate für Materialverbände vom Potenztyp mit Mode-III-Riss numerisch studiert werden.

Da die Transmissions-Randwertprobleme in der vorliegenden Arbeit zweidimensional behandelt werden, sind keine Vergleichskurven aus Experimenten mit realen Körpern zu finden, numerische Ergebnisse sind hauptsächlich für Mode-I- und Mode-II-Risse vorhanden. Eine Vergleichsmöglichkeit der Ergebnisse dieser Arbeit bietet der unendlich lange Streifen unter Mode-III-Belastung, der von Charoenphan in [2] behandelt wurde.

4.1 Unendlich langer Streifen unter Mode-III-Belastung

Die Hauptgedanken zur Behandlung eines unendlich langen Streifens unter Mode-III-Belastung sind aus [2] entnommen. Zu betrachten ist ein unendlich langer Streifen eines linear elastischen Materials von endlicher Breite $2h$, der einen semi-infiniten Riss unter Mode-III-Belastung enthält, vgl. Abbildung 4.2. Es wird davon ausgegangen, dass der Riss sich in positiver x_1 -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v ausbreitet.

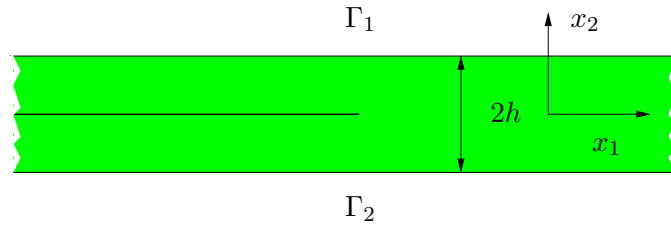


Abb. 4.1: Unendlich langer Streifen mit Riss

Auf beiden Rändern des Streifens werden konstante Verschiebungen in x_3 -Richtung vorgegeben, die eine Mode-III-Belastung hervorrufen:

$$u = w \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (4.1)$$

$$u = -w \in \mathbb{R}_0^- \quad \text{auf } \Gamma_2. \quad (4.2)$$

Die Energiefreisetzungsrate für einen Riss unter Mode-III-Belastung hängt von dem Spannungsintensitätsfaktor K_{III} wie folgt ab [2]:

$$ERR = \frac{1}{2\mu\beta} K_{III}^2. \quad (4.3)$$

Dabei ist μ eine Lamé-Konstante und β die charakteristische Rissgeschwindigkeit. Diese kann berechnet werden durch [2]:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\rho v^2}{\mu}}. \quad (4.4)$$

Die Konstante ρ ist die Massendichte des Materials.

Die konstante Rissgeschwindigkeit v hat bei einem stationären Riss den Wert $v = 0$ und es folgt $\beta = 1$. In diesem Fall kann K_{III} ausgedrückt werden durch [15]:

$$K_{III} = \mu w \sqrt{\frac{2}{h}}. \quad (4.5)$$

Unter Beachtung der Formeln (4.3), (4.5) ergibt sich daher:

$$ERR = ERR(w) = \frac{\mu}{h} w^2. \quad (4.6)$$

Anhand von Formel (4.6) sollen mit MyFEM++ ermittelte Werte der Energiefreisetzungsrate überprüft werden. Die nachfolgenden Rechnungen werden auf dem Gebiet $\Omega = [-5\text{m}, 5\text{m}] \times [-0.5\text{m}, 0.5\text{m}]$ mit der Risspitze in $S = (0\text{m}, 0\text{m})$ durchgeführt.

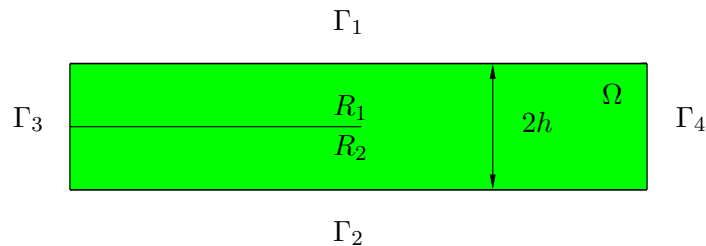


Abb. 4.2: Langer Streifen mit Riss

Um das beschriebene Modell des unendlich langen Streifens möglichst gut wiederzugeben, setzen wir folgendes Randwertproblem an:

$$-\mu \operatorname{div}(\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.7)$$

$$u = w \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (4.8)$$

$$u = -w \quad \text{auf } \Gamma_2, \quad (4.9)$$

$$\mu \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup R_1 \cup R_2. \quad (4.10)$$

Die von MyFEM++ eingesetzte Griffithsche Formel lautet hierfür:

$$ERR(\Omega) = \int_{\Omega} \left(\mu \nabla u \partial_{y_1} u \cdot \nabla \theta - \frac{\mu}{2} (\kappa + |\nabla u|^2) \partial_{y_1} \theta \right) dy, \quad (4.11)$$

mit $\kappa = 10^{-7}$. Für die Rechnungen wird wie in [2] der Lamé-Parameter von Aluminium $\mu = 26.5 \text{ GPa}$ verwendet. Die Größenordnung von w ist auch [2] entnommen.

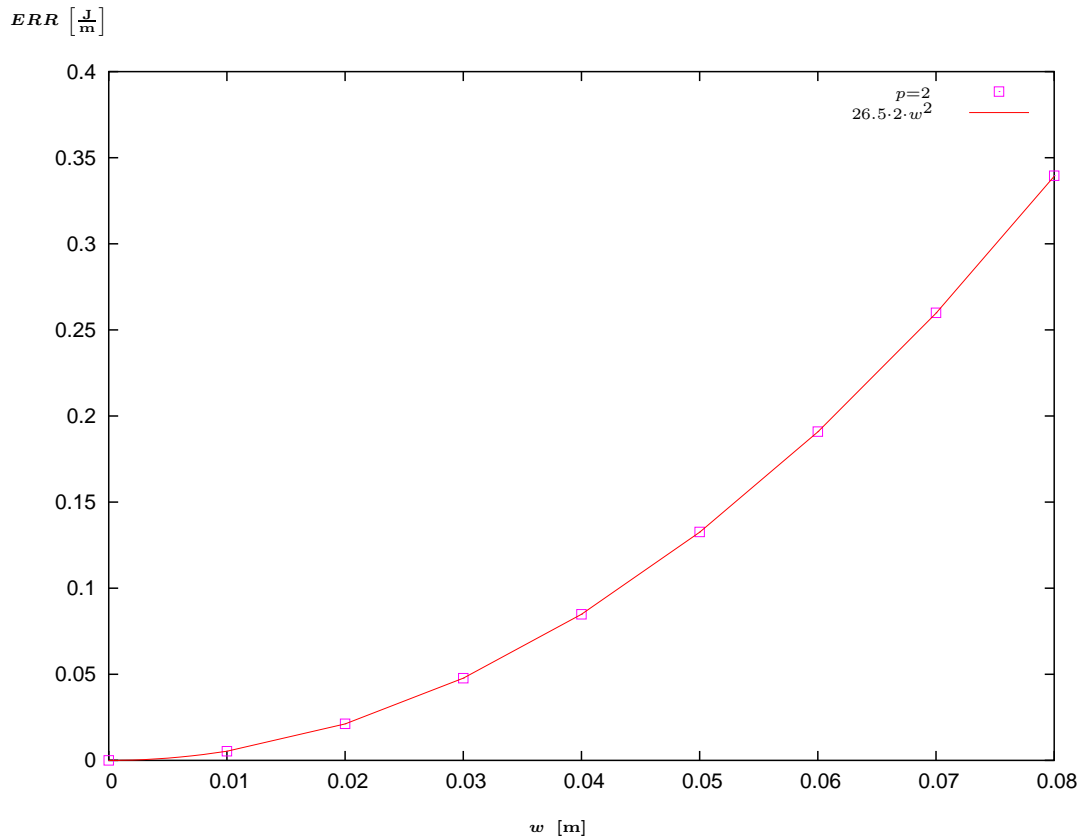


Abb. 4.3: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von w , $p = 2$

An Abbildung 4.3 ist zu erkennen, dass die mit MyFEM++ numerisch berechneten Werte der Energiefreisetzungsrate sehr gut mit dem nach Formel (4.6) analytisch berechneten Kurvenverlauf der Energiefreisetzungsrate übereinstimmen.

Die folgenden Bilder geben einen Eindruck vom Aussehen der Lösung und der in die Griffithsche Formel eingehenden Komponenten bei einer Randverschiebung $w = 0.05 \text{ m}$:

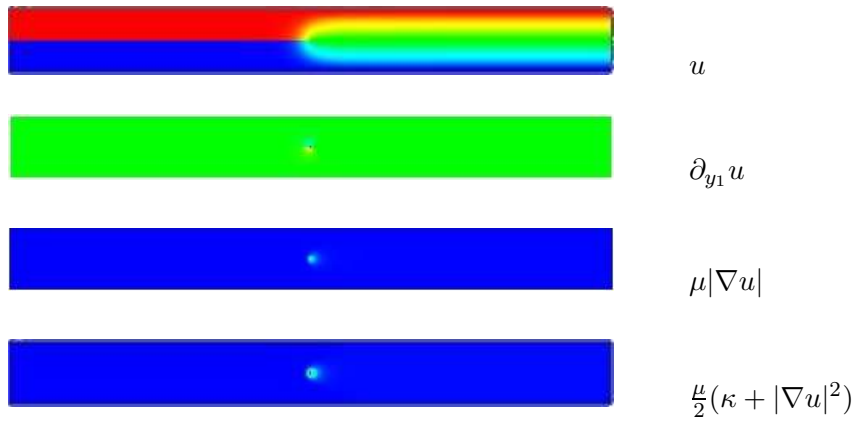


Abb. 4.4: Einige Feldwerte für $w = 0.05\text{m}$

Abbildung 4.5 zeigt das mit MyFEM++ errechnete Verhalten der Energiefreisetzungsrate für Materialien mit $p \neq 2, \mu = 26.5 \text{ GPa}, \kappa = 10^{-7}$.

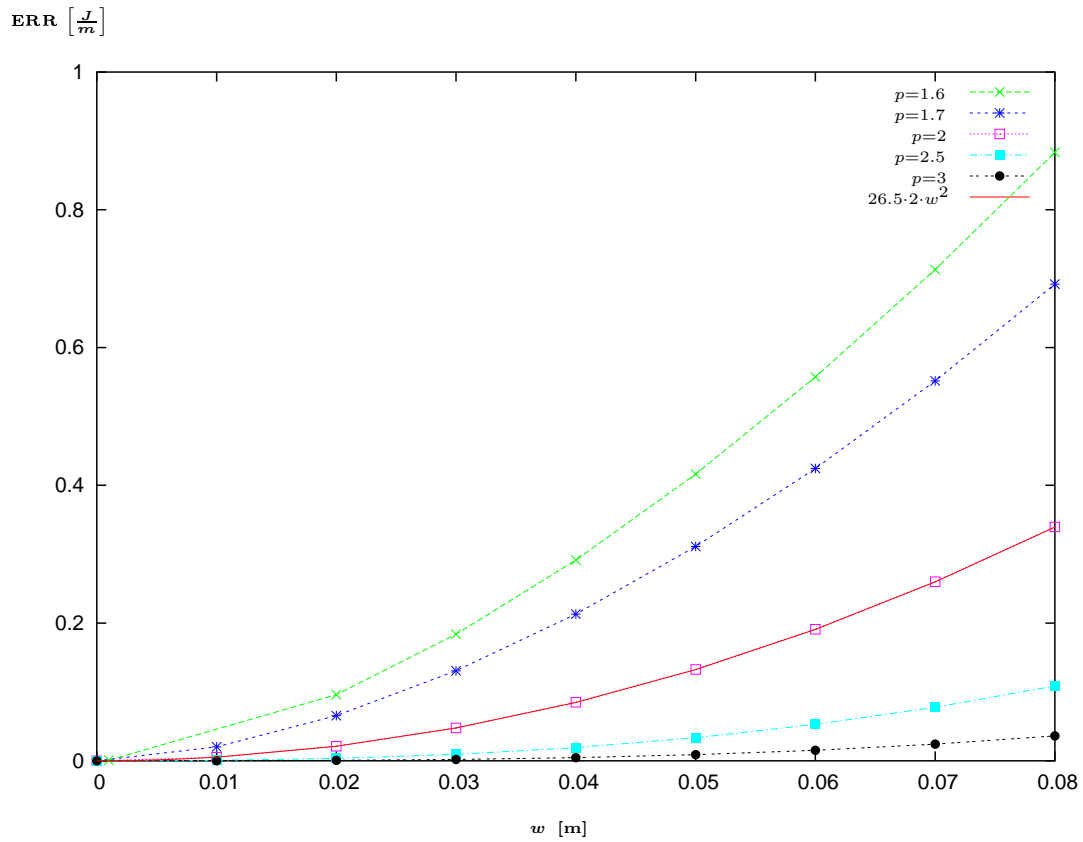


Abb. 4.5: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von w für verschiedene p

Die für Abbildung 4.5 zu lösenden Randwertprobleme lauten:

$$-\mu \operatorname{div} \left((\kappa + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.12)$$

$$u = w \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (4.13)$$

$$u = -w \quad \text{auf } \Gamma_2, \quad (4.14)$$

$$\mu (\kappa + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup R_1 \cup R_2. \quad (4.15)$$

Aus Abbildung 4.5 ist ersichtlich, dass die Kurven der Energiefreisetzungsrate für kleinere Potenzen p steiler und für größere Potenzen p flacher verlaufen, als das von Rice für linear elastische Materialien ermittelte Verhalten der Energiefreisetzungsrate.

4.2 Das Verhalten der Energiefreisetzungsrate ERR

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Energiefreisetzungsrate eines Materialverbundes vom Potenztyp in Abhängigkeit verschiedener Größen, wie

- Risslänge,
- Materialparameter p_1, p_2, μ_1, μ_2 ,
- Dirichlet-Bedingung,
- Gebietsgröße

ermittelt.

4.2.1 ERR in Abhängigkeit von der Risslänge

Im Folgenden wird die Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrate von der Risslänge untersucht. Dazu werden Rechnungen auf dem Gebiet $\Omega = (-5, 5) \times (-5, 5)$ mit variabler Risspitze $S_v = (s_1, 0)$ durchgeführt. Die Koordinate s_1 nimmt dabei Werte aus folgender Menge $\{-5, -4.5, -3, -2, -1.5, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 4.5, 4.7\}$ an.

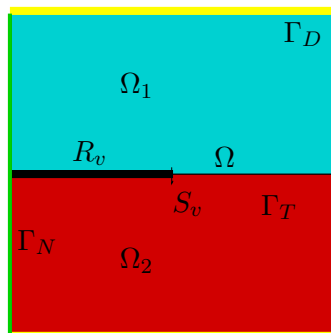


Abb. 4.6: Gebiet mit variabler Risslänge

Auf Ω sind hierzu folgende Transmissions-Randwertprobleme mit MyFEM++ zu lösen für $\kappa_j = 10^{-7}$, $\mu_j = 1$ GPa und verschiedenen p_j für $j = 1, 2$:

Finde $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u|_{\Omega_j} = u_j$, $j = 1, 2$, sodass:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left((\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \right) &= 0 \quad \text{in } \Omega_j, \\ (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \cdot \mathbf{n}_j &= 0 \quad \text{auf } (\Gamma_N \cap \partial\Omega_j) \cup R_{vj}, \end{aligned}$$

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 15 & x_2 = -5, x_1 \in (-5, 5) \\ 0 & x_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 15 & x_2 = 5, x_1 \in (-5, 5) \end{cases} \quad \text{auf } \Gamma_D,$$

mit Transmissionsbedingungen (1.39), (1.40) auf Γ_T .

Die Dirichlet-Bedingung ist so gewählt, dass die Mode-III-Belastung unterstützt wird.

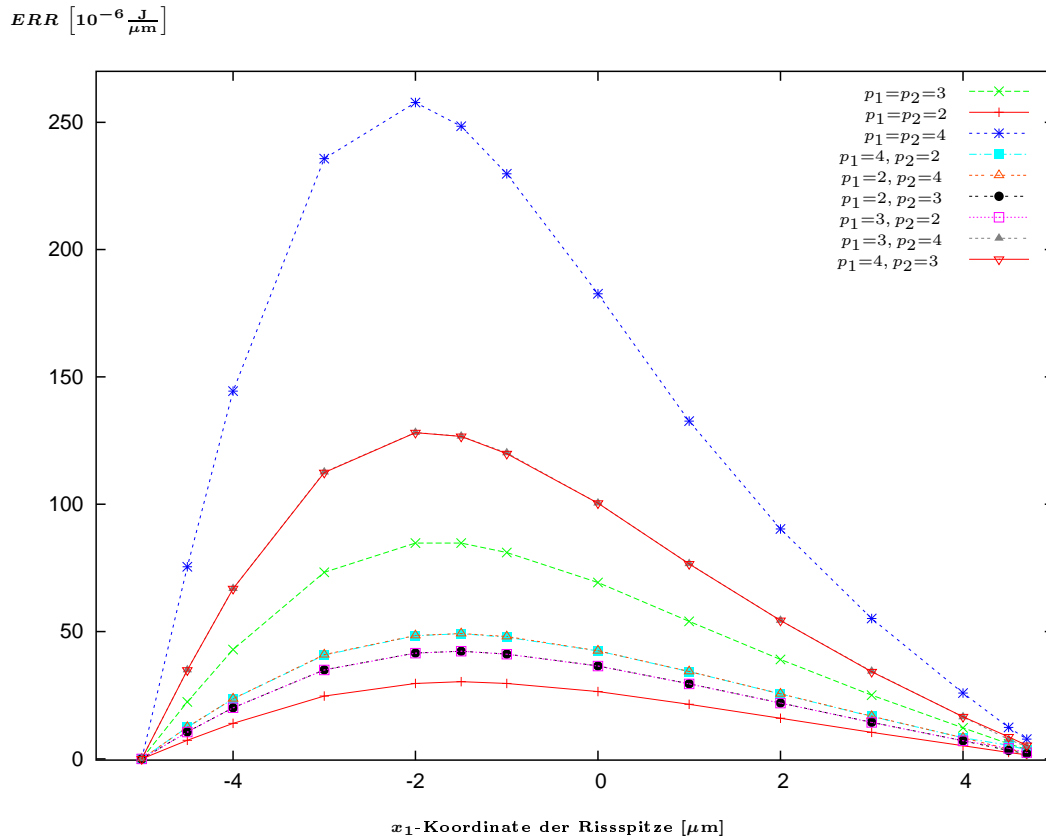


Abb. 4.7: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von p_1 , p_2

Die Energiefreisetzungsraten zeigen bei unterschiedlichen Parametern p_1 , p_2 den gleichen charakteristischen Verlauf. Dieser soll im Folgenden exemplarisch für $p_1 = p_2 = 2$ erläutert werden.

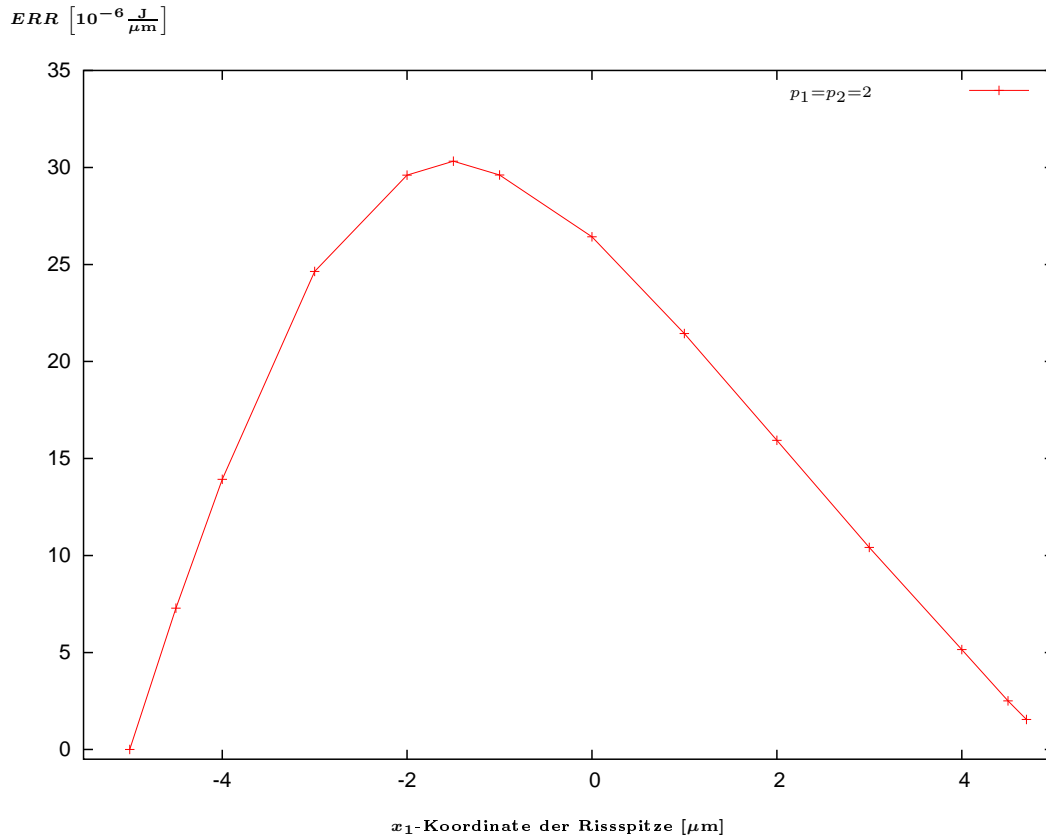


Abb. 4.8: Energiefreisetzungsrates in Abhängigkeit von $p_1 = p_2 = 2$

Liegt die Risspitze in $(-5, 0)$, was einem Gebiet ohne Riss entspricht, so hat die Energiefreisetzungsrates den Wert 0. Der Körper befindet sich hier im Gleichgewicht und es besteht nicht die Gefahr einer Rissbildung. Bei kurzen Risslängen steigt die Energiefreisetzungsrates zunächst steil an, Abbildung 4.8, denn aufgrund der für kleine x_1 großen Verschiebungen auf dem Dirichlet-Rand, die auf den gegenüberliegenden Rändern entgegengesetzt gerichtet sind, bilden sich an der Risspitze große Spannungen aus. Ebenso ist die im Körper gespeicherte potentielle Energie für kurze Risslängen sehr groß.

An Abbildung 4.9 ist zu erkennen, dass die x_1 -Komponente des Verschiebungsgradienten bei einer Rissverlängerung zunimmt. Der Betrag des Verschiebungsgradienten und die elastische Verzerrungsenergiegedichte erreichen jedoch in $(-1.5, 0)$ ihr Maximum. Danach fällt auch die Energiefreisetzungsrates wieder ab. Dies ist dadurch erklärbar, dass die Rissufer bei längeren Rissen unabhängiger von einander werden und die im Körper vorhandene potentielle Energie wesentlich geringer ist, da für große x_1 die Unterschiede in den vorgegebenen Verschiebungen abnehmen.

Die Größenordnung der Energiefreisetzungsrates ist abhängig von den Parametern p_1, p_2 . Die niedrigste Kurve ergibt sich in Abbildung 4.7 für $p_1 = p_2 = 2$ und die höchste für $p_1 = p_2 = 4$. Für Körper mit $p_1 \neq p_2$ liegt die Kurve zwischen der Kurve mit $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \min\{p_1, p_2\}$ und der Kurve mit $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \max\{p_1, p_2\}$.

Es ist auffällig, dass die Kurven für $p_1 \neq p_2$ bei vertauschten p_1, p_2 übereinstimmen. Dies liegt an der Symmetrie in der Dirichlet-Bedingung und an der Wahl von $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Dadurch

sind die in die Berechnung der Griffithschen Formel eingehenden Größen genau spiegelbildlich und führen zu den gleichen Werten der Energiefreisetzungsrate, vgl. Abbildung 4.10.

$$ERR = \int_{\Omega} \nabla u \partial_{x_1} u \nabla \theta - \frac{1}{2}(\kappa + |\nabla u|^2) \partial_{x_1} \theta dx$$

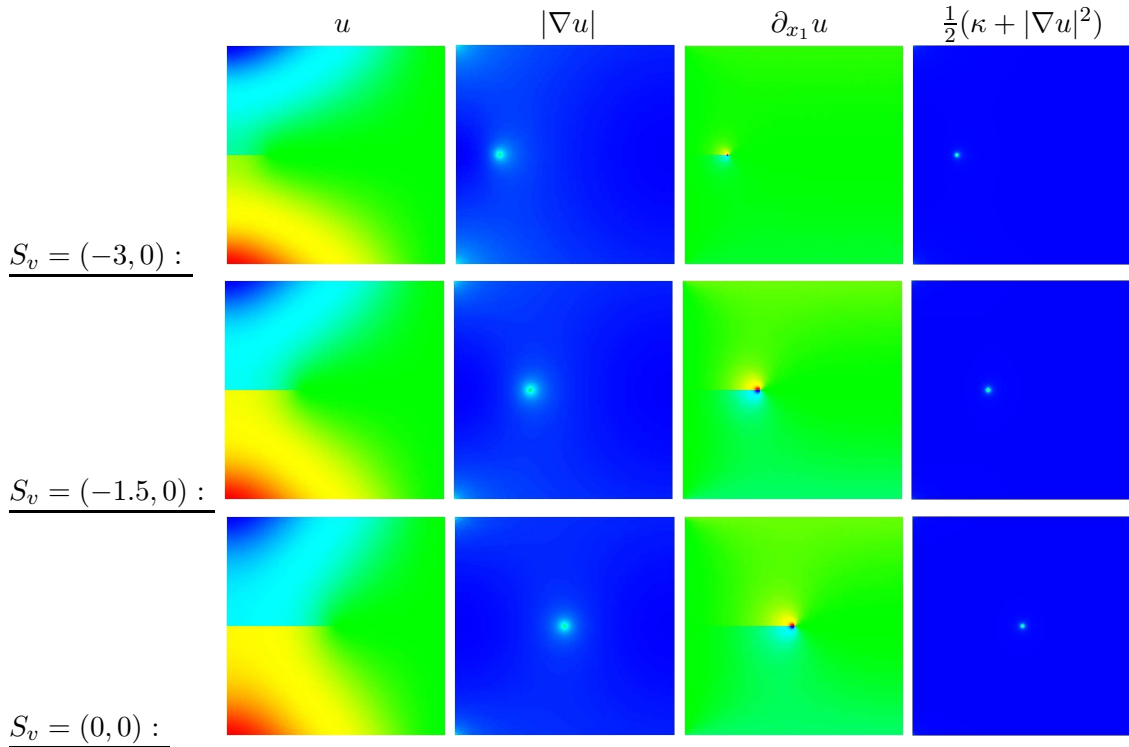


Abb. 4.9: Komponenten aus der Griffithschen Formel

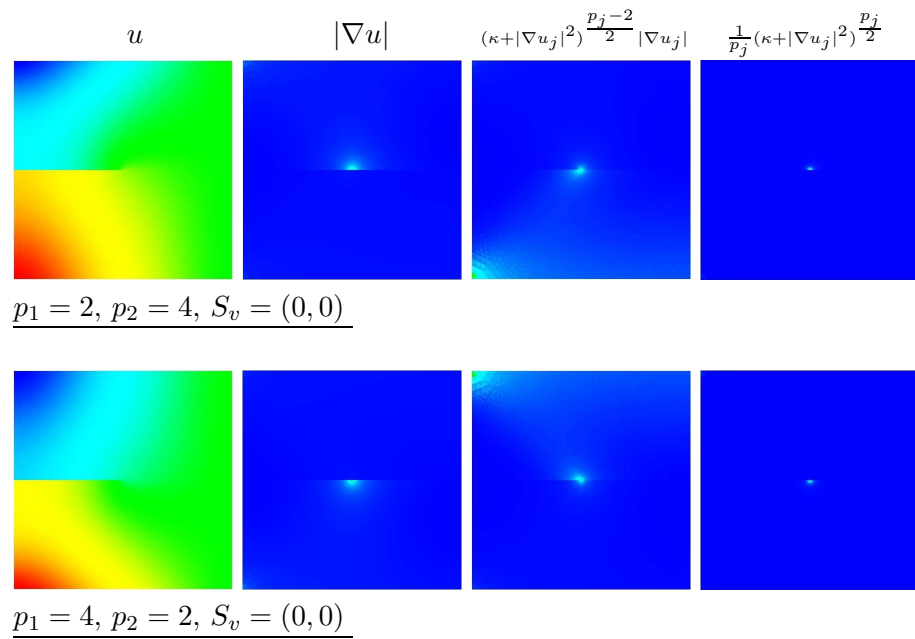


Abb. 4.10: Symmetrie der Komponenten bei vertauschten Parametern p_1, p_2

4.2.2 ERR in Abhängigkeit von p

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrate von den Parametern p_1, p_2 werden Rechnungen auf dem Gebiet $\Omega = (-5, 5) \times (-5, 5)$ mit der Risspitze S in $(0, 0)$ durchgeführt.

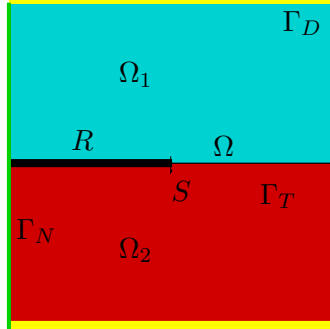


Abb. 4.11: Gebiet Ω

Für $\mu_1 = \mu_2 = 1 \text{ GPa}$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 10^{-7}$ und variable Parameter $p_1, p_2 \in (1, \infty)$ sind zu diesem Zweck mit MyFEM++ folgende Transmissions-Randwertprobleme zu lösen:

Finde $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u|_{\Omega_j} = u_j$, $j = 1, 2$ sodass:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left((\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \right) &= 0 \quad \text{in } \Omega_j, \\ (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \cdot \mathbf{n}_j &= 0 \quad \text{auf } (\Gamma_N \cap \partial\Omega_j) \cup R_j, \\ u(\mathbf{x}) &= \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 15 & x_2 = -5, x_1 \in (-5, 5) \\ 0 & x_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 15 & x_2 = 5, x_1 \in (-5, 5) \end{cases} \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ &\text{mit Transmissionsbedingungen (1.39), (1.40) auf } \Gamma_T. \end{aligned}$$

Die Griffithsche Formel lautet daher:

$$ERR(\Omega) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j-2}{2}} \nabla u_j \partial_{y_1} u_j \cdot \nabla \theta \, \mathbf{d}\mathbf{y} - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_j} \frac{1}{p_j} (\kappa_j + |\nabla u_j|^2)^{\frac{p_j}{2}} \partial_{y_1} \theta \, \mathbf{d}\mathbf{y}.$$

Um die weitgehende Unabhängigkeit der von MyFEM++ errechneten Energiefreisetzungsrate von der Abschneidefunktion θ zu überprüfen, wird θ mit variablen Radien angesetzt, siehe hierzu Abbildung 4.12:

$$\theta(|\mathbf{x}|^2) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathbf{x}| \leq \mathcal{R}_1 \\ \tilde{\theta} = A|\mathbf{x}|^6 + B|\mathbf{x}|^4 + C|\mathbf{x}|^2 + D & \text{für } \mathcal{R}_1 \leq |\mathbf{x}| \leq \mathcal{R}_2, \\ 0 & \text{für } |\mathbf{x}| \geq \mathcal{R}_2 \end{cases},$$

wobei durch die Bedingungen

$$\tilde{\theta}(\mathcal{R}_1^2) = 1, \tilde{\theta}(\mathcal{R}_2^2) = 0, \tilde{\theta}'(\mathcal{R}_1^2) = 0, \tilde{\theta}'(\mathcal{R}_2^2) = 0$$

die Konstanten A, B, C, D bestimmt sind und die stetige Differenzierbarkeit von θ erreicht wird.

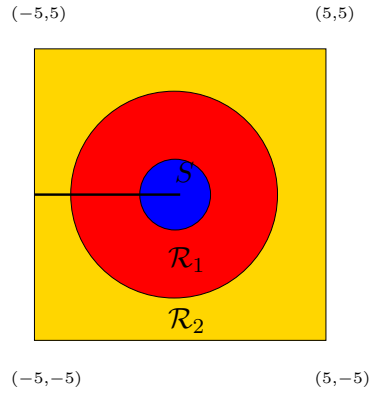


Abb. 4.12: Definitionsbereich von θ

Aus der nachfolgenden Abbildung 4.13 ist ersichtlich, dass die Energiefreisetzungsrates bei festem p_1 mit p_2 wächst. Der Wert der Energiefreisetzungsrates hängt jedoch auch von der Wahl von p_1 ab.

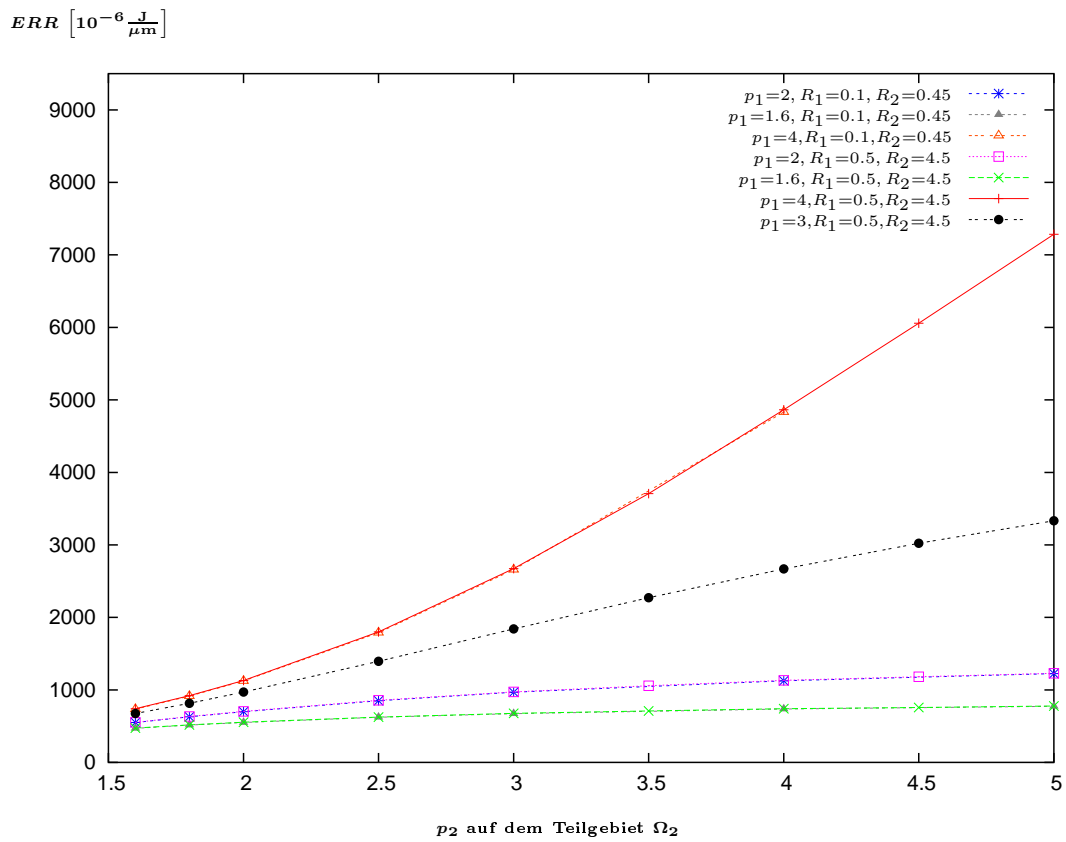


Abb. 4.13: Energiefreisetzungsrates in Abhängigkeit von p_2 mit verschiedenen θ

4.2.3 ERR in Abhängigkeit von μ

Der Kurvenverlauf der Energiefreisetzungsrate wird in Abhängigkeit von μ_2 untersucht. Die Rechnungen dazu werden wieder auf dem Gebiet $\Omega = (-5, 5) \times (-5, 5)$ mit Risspitze S in $(0, 0)$ durchgeführt, vgl. Abbildung 4.11. Feste Parameter sind $\kappa_1 = \kappa_2 = 10^{-7}$, $p_1 = p_2 = 2$ und $\mu_1 = 0.1$ GPa, der Parameter μ_2 bleibt variabel. Die Dirichlet-Bedingung wird wie in den Kapiteln 4.2.1 und 4.2.2 vorgeschrieben.

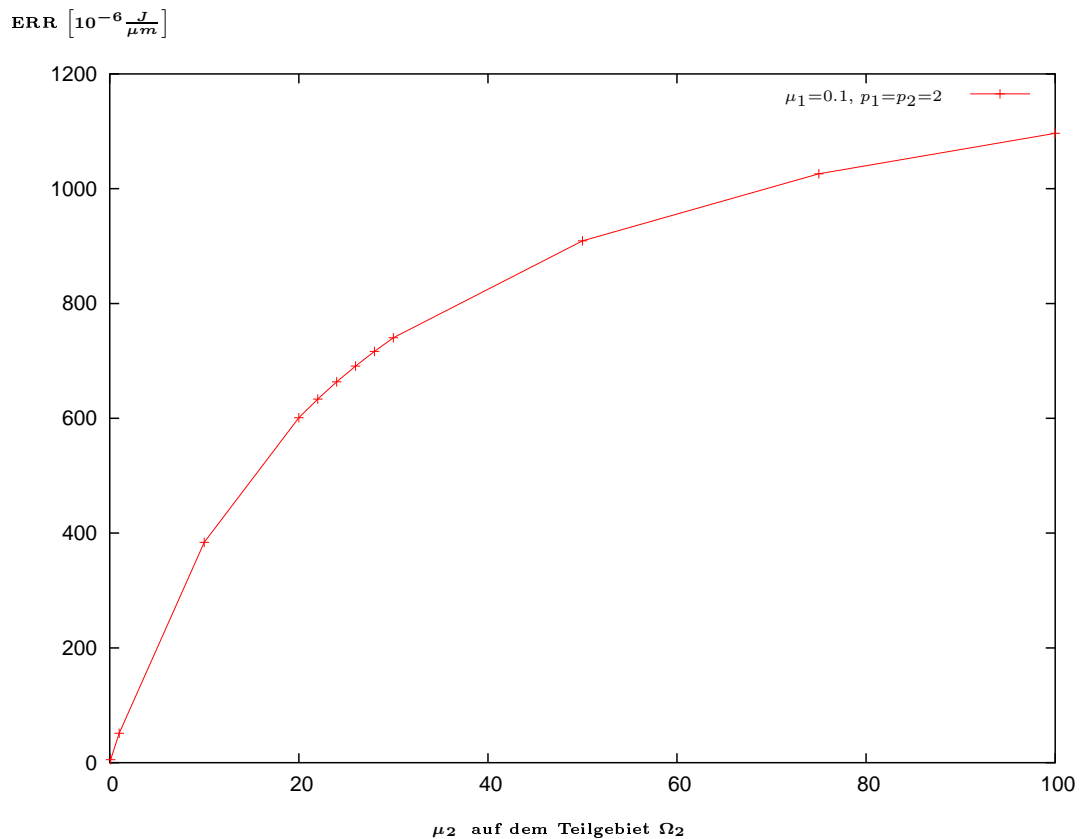


Abb. 4.14: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von μ_2

In Abbildung 4.15 wird zusätzlich die Risslänge analog Abschnitt 4.1.1 variiert. Es ergibt sich der gleiche Kurvenverlauf wie in Abbildung 4.7. Die Kurven werden jedoch mit wachsendem μ_2 steiler.

In Abbildung 4.16 ist die Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von der Risslänge für verschiedene Parameter μ_1, μ_2, p_1, p_2 aufgetragen. Man sieht, dass das Vertauschen der Parameter μ_1, μ_2 bei $p_1 \neq p_2$ zu unterschiedlichen Werten der Energiefreisetzungsrate führt. Das gleiche Resultat würde man beim Festhalten von $\mu_1 \neq \mu_2$ und Vertauschen von $p_1 \neq p_2$ erhalten.

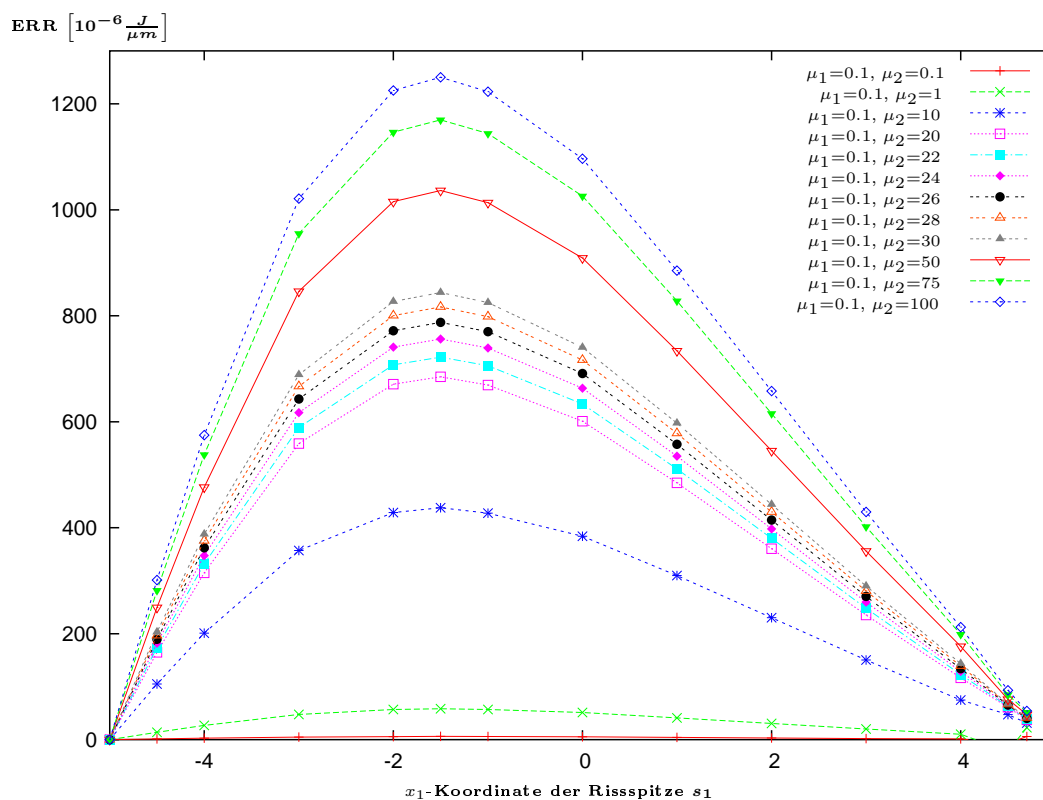


Abb. 4.15: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von Risslänge und μ_2

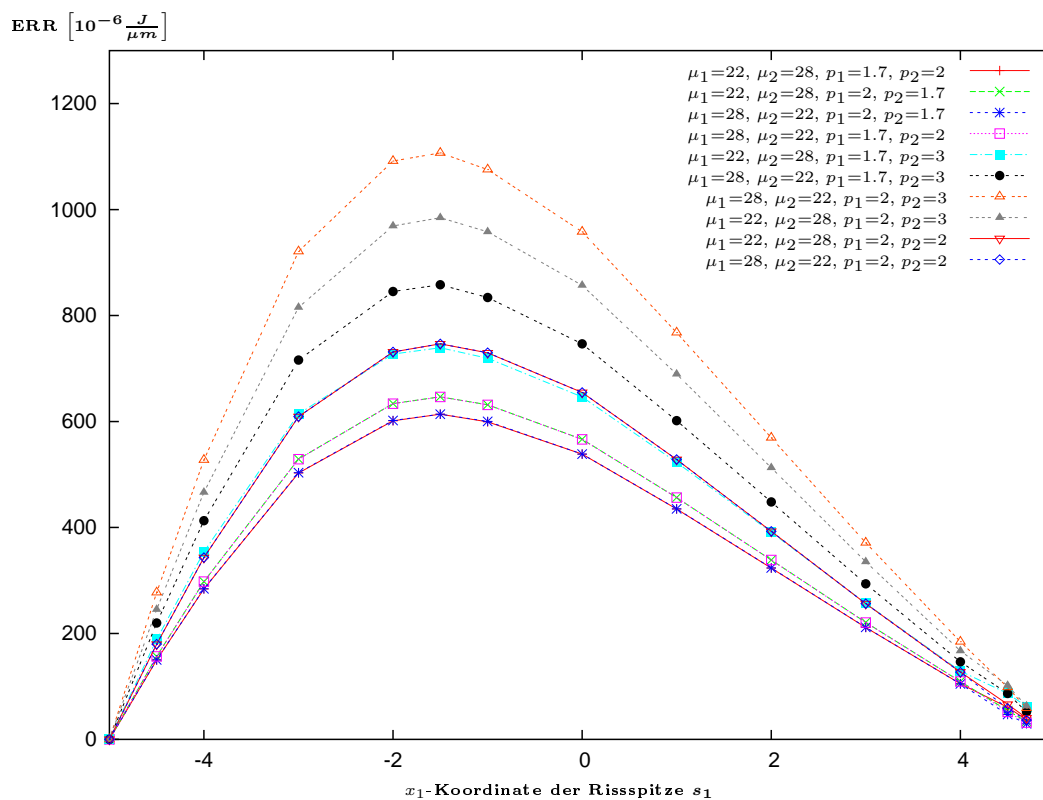


Abb. 4.16: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von Risslänge, μ_1 , μ_2 , p_1 , p_2

4.2.4 ERR in Abhängigkeit von der Dirichlet-Bedingung

Zunächst wird der Einfluss der Dirichlet-Randbedingung auf die Energiefreisetzungsrate studiert. Die Rechnungen werden wieder auf dem in Abbildung 4.11 gezeigten Gebiet $\Omega = (-5, 5) \times (-5, 5)$ mit Rissspitze S in $(0, 0)$ geführt. In den Transmissions-Randwertproblemen sind $\kappa_1 = \kappa_2 = 10^{-7}$, $p_1 = p_2 = 2$ und $\mu_1 = \mu_2 = 1$ GPa fest gewählt, nur die Steigung in der Dirichlet-Randbedingung variiert:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} -ax_1 + x_2 + (5a + 5) & x_2 = -5, x_1 \in (-5, 5) \\ 0 & x_1 = 5 \\ ax_1 + x_2 - (5a + 5) & x_2 = 5, x_1 \in (-5, 5) \end{cases} \quad \text{auf } \Gamma_D .$$

Aus diesen Festlegungen ergibt sich der in Abbildung 4.17 dargestellte Verlauf der Energiefreisetzungsrate.

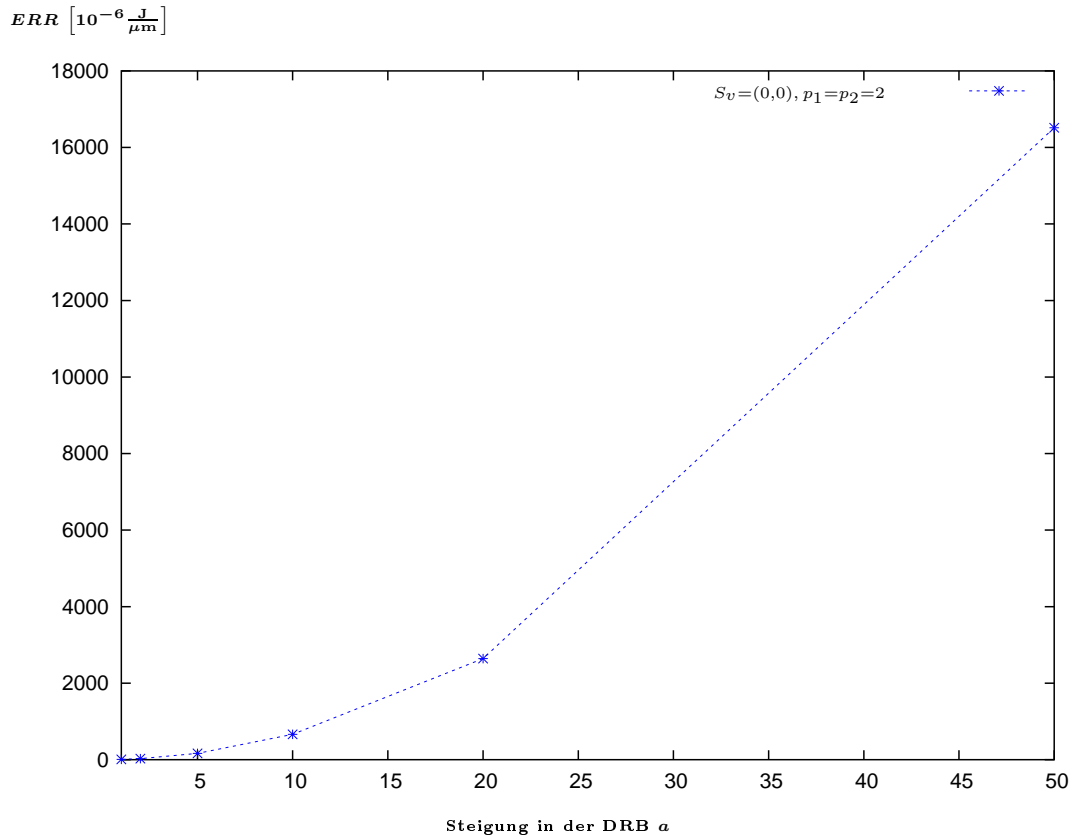


Abb. 4.17: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von der Steigung a

In Abbildung 4.18 ist die Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von der Risslänge für verschiedene Steigungen a in der Dirichlet-Bedingung aufgetragen. Der typische Kurvenverlauf von Abbildung 4.8 bleibt erhalten, die Wahl von a beeinflusst jedoch den Wert der Energiefreisetzungsrate. Je größer a ist, desto größer sind die Verschiebungen auf dem Dirichlet-Rand. Der Körper erfährt für größere a wesentlich stärkere Verformungen, wodurch die im Körper gespeicherte Energie vergrößert wird. Dies führt zu größeren Werten der Energiefreisetzungsrate.

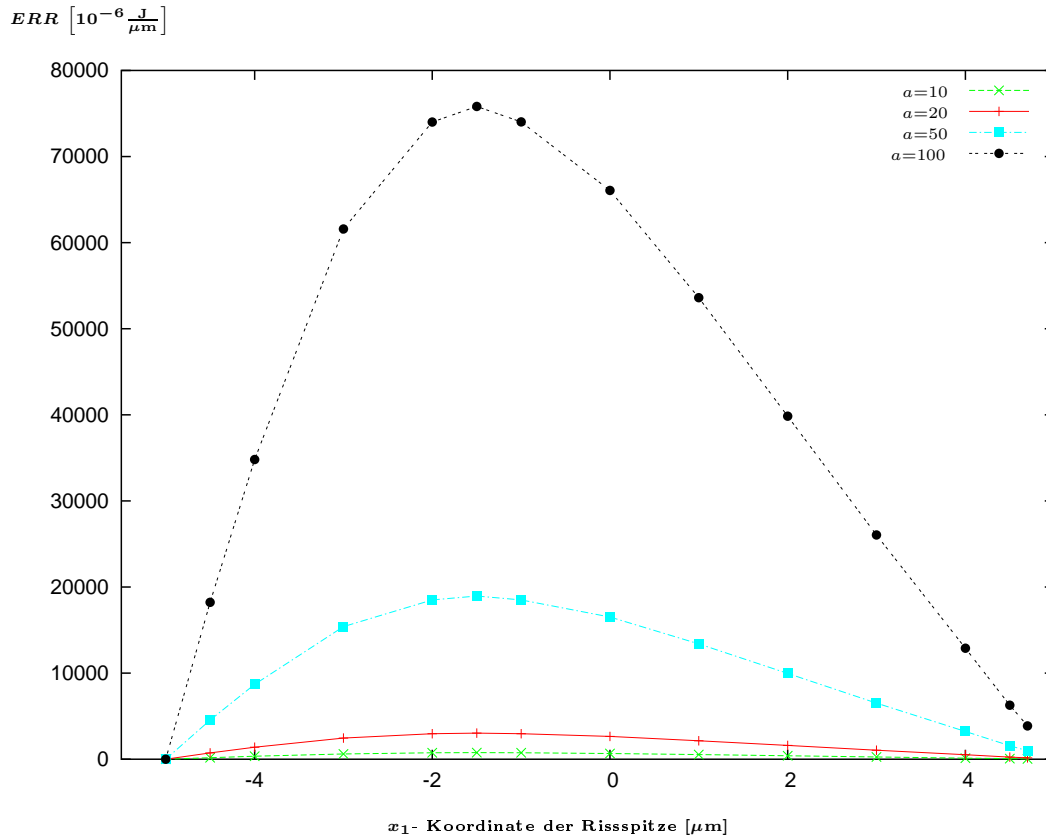


Abb. 4.18: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von Risslänge und Steigung a

4.2.5 ERR in Abhängigkeit von der Gebietsgröße

Die Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrate von der Gebietsgröße wird für Gebiete $\Omega_h = (-5, 5) \times (-h, 0.5)$ mit $h \in \{0.5, 1, 2.5, 5, 7.5\}$ untersucht. Die Risspitze S liegt dabei stets in $(0, 0)$, vgl. Abbildung 4.19.

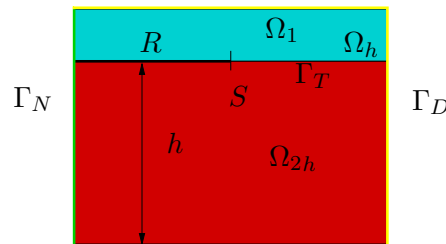


Abb. 4.19: Gebiete Ω_h

Die mit MyFEM++ zu lösenden Transmissions-Randwertprobleme für $\kappa_1 = \kappa_2 = 10^{-7}$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$ GPa sind wie in Abschnitt 4.2.2 formuliert. Allerdings muss die Dirichlet-Bedingung der Gebietsgröße angepasst werden:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} -2x_1 + x_2 + (10 + h) & x_2 = -h, x_1 \in (-5, 5) \\ 0 & x_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 15 & x_2 = 5, x_1 \in (-5, 5) \end{cases} \quad \text{auf } \Gamma_D .$$

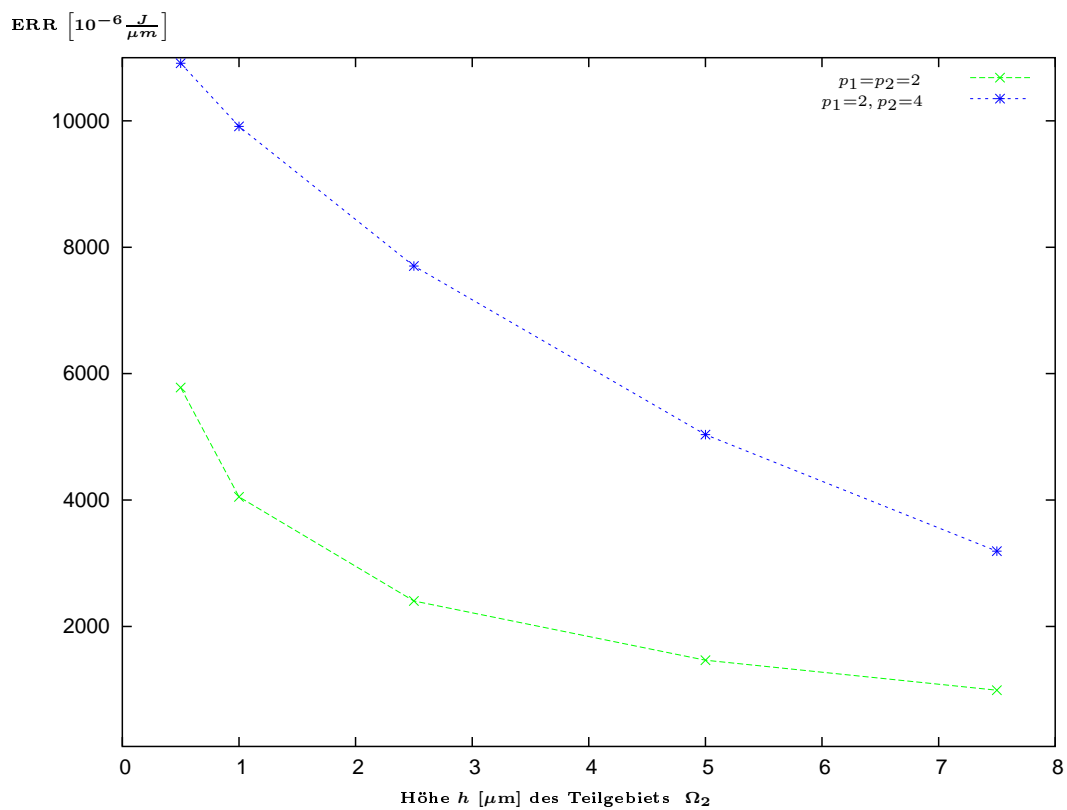
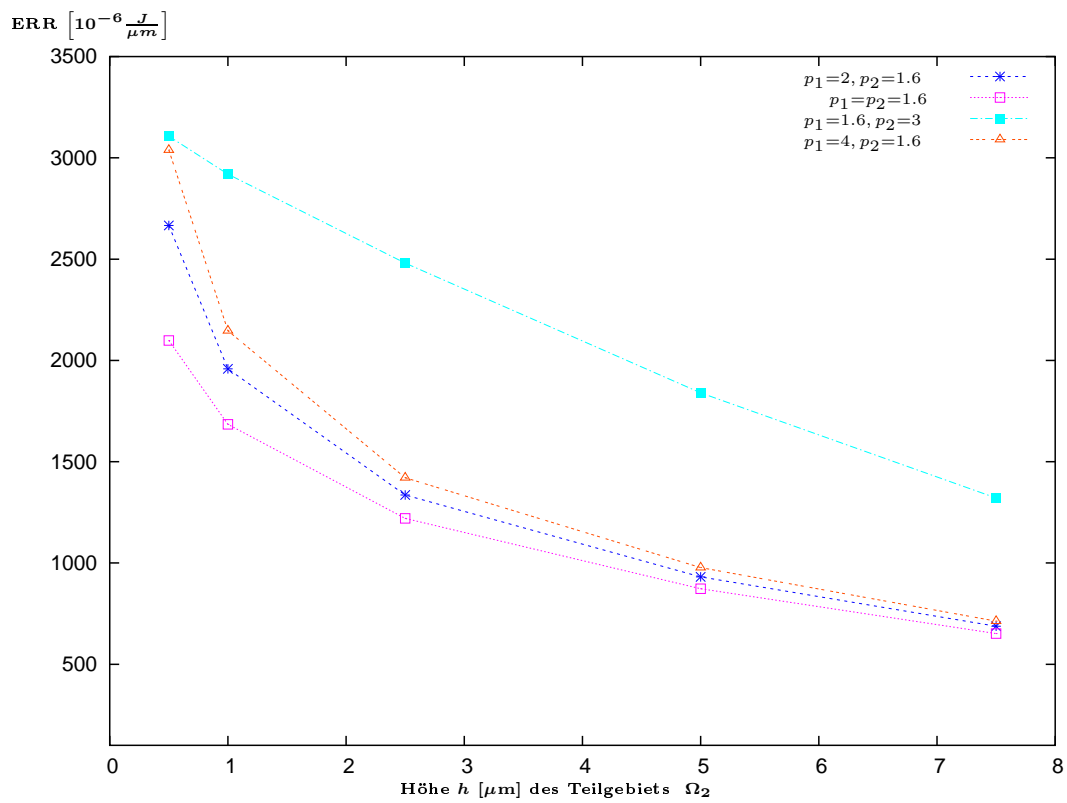


Abb. 4.20: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit von Gebietsgröße und p_1, p_2

An Abbildung 4.20 ist im Vergleich mit Abbildung 4.17 zu erkennen, dass ein Wachsen des Gebietes bei gleichbleibender Dirichlet-Bedingung einen vergleichbaren Einfluss auf die Energiefreisetzungsrate ausübt wie das Abnehmen der Steigung der Dirichlet-Bedingung auf unverändertem Gebiet.

In Abbildung 4.21 ist das Verhalten der in die Griffithsche Formel eingehenden Größen für $p_1 = p_2 = 2$ gezeigt. Man sieht deutlich, dass die Intensität der Singularitäten an der Risspitze bei zunehmender Gebietsgröße abnimmt. Für unsymmetrische Gebiete weisen die Singularitäten Unsymmetrie auf. Ist $p_1 \neq p_2$, so ist diese Unsymmetrie noch deutlicher ausgeprägt, Abbildung 4.22.

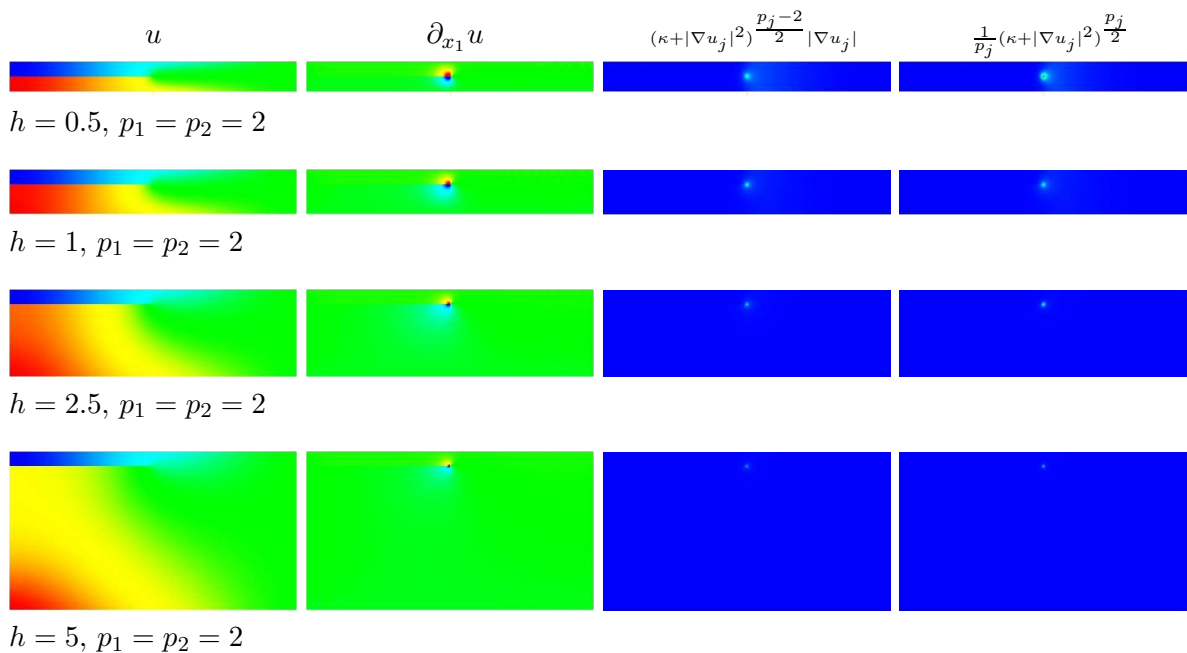


Abb. 4.21: Komponenten der Griffithschen Formel für verschiedene Gebiete Ω_h

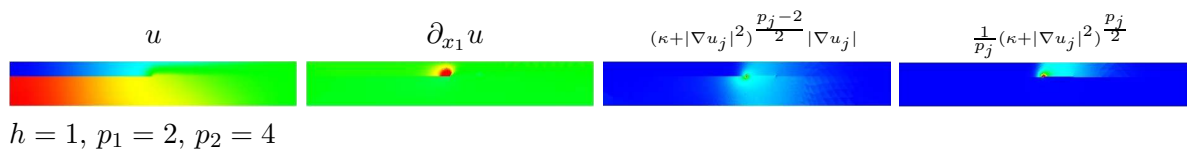


Abb. 4.22: verstärkte Unsymmetrie bei $p_1 \neq p_2$ auf dem Gebiet Ω_1

Literaturverzeichnis

- [1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, v.65 of Pure and applied mathematics series, Academic Press, New York, 1975.
- [2] CHAROENPHAN, S., *Computer Methods for Modeling the Progressive Damage of Composite Material Plates and Tubes*, A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Engineering Mechanics), University of Wisconsin-Madison, 2002
- [3] CIARLET, P.G., *Mathematical Elasticity*, vol. 1, Three-dimensional elasticity. North Holland, Amsterdam, 1988.
- [4] GEYMONAT, G., AND SUQUET, P., Functional Spaces for Norton-Hoff Materials. *Math. Meth. Appl. Sci.* 8 (1986), 206-222.
- [5] GROSS, D., SEELIG TH., *Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik*, 3. neubearb. und erw. Aufl.-Springer-Verlag Berlin; Heidelberg, 2001.
- [6] HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E., PÓLYA, G., *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.
- [7] KHLUDNEV, A. M., SOKOLOWSKI, J., The Griffith formula and the Rice-Cherepanov integral for crackproblems with unilateral conditions in nonsmooth domains, *Eur. J. Appl. Math.* 10, 4 (1999), 379-394.
- [8] KHLUDNEV, A. M., SOKOLOWSKI, J., Griffith formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks, *Eur. J. Mech., A/Solids* 19 (2000), 105-119.
- [9] KNEES, D., *Gemischtes Randwertproblem auf nicht-Lipschitz-Gebieten*, Universität Stuttgart, 2003.
- [10] KNEES, D., *Regularity results for quasilinear elliptic systems of power-law growth in nonsmooth domains -Boundary, transmission and crack problems-*.Universität Stuttgart, 2004.
- [11] KOROWKIN, P. P., *Ungleichungen*, vierte, berichtigte Auflage, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965.
- [12] LIU, W. B., Degenerate quasilinear elliptic equations arising from bimaterial problems in elastic-plastic mechanics. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 35 (1999), 517-529.
- [13] MAZJA, W., *Einbettungssätze für Sobolewsche Räume*, Teil 1, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979.

- [14] PIPPAN, R., *Discrete dislocation simulation of fatigue crack propagation*, Vortrag im CISM-Kurs zum Thema *multi scale modeling of plasticity and fracture by means of dislocation mechanics*, Udine, 2005.
- [15] RICE, J. R., Stresses in an infinite strip containing a semi-infinite crack, *Journal of Applied Mechanics*, 34, 248-249, 1967.
- [16] RUZICKA, M., *Nichtlineare Funktionalanalysis*, Eine Einführung, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [17] SÄNDIG, A.-M., *Distributionentheorie mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen*, Vorlesung im Wintersemester 2004/2005, ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de.
- [18] SÄNDIG, A.-M., KNEES, D., *Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen auf die Festkörpermechanik*, Seminarbericht 2004/001, ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de.
- [19] TOLKSDORF, P., Everywhere-regularity for some quasilinear systems with a lack of ellipticity. *Ann. Mat. Pura Appl.* 134 (1983), 241-266.
- [20] TRUESDELL, C., NOLL, W., The Nonlinear Field Theories of Mechanics, *Handbuch der Physik*, Band III/3, Hrsg. FLÜGGE, S., Springer-Verlag, 1965.
- [21] WLOKA, J., *Partielle Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1982.
- [22] ZEIDLER, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, vol. 2A, *Linear Monotone Operators*, Springer-Verlag, 1990.
- [23] ZEIDLER, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, vol. 2B, *Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, 1990.