Die Multiplikation als Dualität in Mathematik, Physik und Erkenntnistheorie

Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

21. Tag der Mathematik
30. April 2016, Freie Universität Berlin

Probleme mit der Multiplikation?

- Zwei Aufgaben: 1) 25% von 24. 2) 24% von 25.
- Multiplikation von Zahlen ist kommutativ: $\frac{24 \cdot 25}{100} = \frac{25 \cdot 24}{100}$
- Aber: Gefühlte Nichtkommutativität: $0.25 \cdot 24 \stackrel{?}{=} 0.24 \cdot 25$
- Zwei andere Aufgaben: Berechne Flächeninhalt einen Rechtecks
  1) 25cm breit und 24cm lang; 2) 24cm breit und 25cm lang
- Ähnliches Problem: Wir fahren 400 km
  120 km/h in 3 Stunden 20 min oder 133 1/3 km/h in 3 Stunden
- Bei Zeit oder Menge ist jede Zahl recht,
  bei Geschwindigkeit oder Prozenten gibt es Favoriten.

Zahlen und reale Größen

- Warum fühlen sich verschiedene reale Größen verschieden an? Bei den Zahlen selbst merkt man den Unterschied nicht.
- Warum interessieren uns überhaupt gewisse Größen und andere eher nicht?
- Kann man allen realen Größen Zahlen zuordnen?

Was für Größen interessieren uns eigentlich?

Alltag/ Chemie	Anteil Alkoholmenge	Prozente Alkoholgehalt	Gesamtmenge Gesamtvolumen
Mechanik	Weg	Geschwindigkeit	Zeitintervall
	Impuls	Geschwindigkeit	Masse
	Impuls	Kraft	Zeitintervall
	Arbeit	Kraft	Weg
	Auslenkung	Kraft	1/Federkonstante
E-Technik	Ladung	Spannung	Kapazität
	Ladung	elektr. Strom	Zeitintervall
Therm.dyn	Energie	Druck	Volumen
	Energie	Temperatur	Entropie
Ökonomie	Umsatz	Preis	Stückzahl

Was für Größen interessieren nicht? Was geht nicht?

- Wurzel aus der Länge. Energie hoch 3/7.
- $-10°C/10°C = -1$?
- Aber: -10 Euro/10 Euro $= -1$
- 3 Äpfel + 5 Birnen = ?
- Aber: 1 Liter H_2O + 0.1 Liter C_2H_5OH = 1.1 Liter Gemisch
- 3 Äpfel $*$ 5 Birnen = 15 Apfelbirnen ?
- Aber: 5 Mann für 3 Jahre = 15 Mannjahre

Wodurch unterscheiden sich die Größen?

Wir bringen zwei Körper/Objekte in Kontakt. Was passiert?

- Volumen und Temperatur
- Alkoholgehalt, Alkoholmenge und Gesamtmenge
- Geschwindigkeit, Masse und Impuls
- (Feder-)Kraft, Auslenkung, inverse Federkonstante
- Geschwindigkeit, Weg und Zeit $\Longrightarrow$ Durchschnittsgeschwindigkeit

Zwei Sorten von physikalischen Größen

- Was passiert bei Kontakt?
  - Größen addieren, erhalten sich $\Longrightarrow$ extensiv
  - Größen mitteln sich (gleichen sich aus) $\Longrightarrow$ intensiv
- Beispiele für extensive Größen:
  Zeitintervall, Länge (Breite, Höhe), Fläche, Volumen, Masse, Ladung, Impuls, Energie, Äpfel, Birnen, Stückzahl, Geld
- Beispiele für intensive Größen:
  Temperatur, Alkoholgehalt, Geschwindigkeit, Kraft, elektr. Strom, elektr. Spannung, Druck, Preise
- Definitionen sind von Kant, 1781 (Kritik der reinen Vernunft)

Jede interessante Größe läßt sich zuordnen

- Am einfachsten über die Einheiten:
  - Extensive Größen haben Homogenität 1:
    Länge[L], Masse[M], Zeitintervall[T], Impuls[ML/T], 1/Federkonstante[T^2/M], Ladung[Q=As], Kapazität[T^2 Q^2/M/L^2]
  - Intensive Größen haben Homogenität 0:
    Geschwindigkeit[L/T], Kraft[ML/T^2], el. Strom[Q/T=A], Prozentanteil[-]
- Zuordnung manchmal nicht leicht
  - Geschwindigkeiten und Kräfte addieren sich? Nur Spezialfälle!
  - Verbundene Gefäße: Höhen mitteln sich? Nein, der Druck!
- Klassische intensive Größe: Temperatur
- Witz (mit langem Bart):
  Im Zimmer sind 16 Grad, draußen sind 4 Grad.
  "Mach mal das Fenster auf und laß die 4 Grad auch noch rein!"

Weitere Eigenschaften von extensiven Größen

- Additiv
- Kann man zählen (Äpfel, Birnen, Stückzahl, Ladung)
- Kann man messen
  - Messen = Zählen eines Normmaßes
  - Längenmessung
  - Messung eines Zeitintevalls: Zählen von periodischen Ereignissen
  - Voraussetzung: Erhaltung
- Wir interessieren uns für extensive Größen, weil wir sie messen, d.h. ihnen Zahlen zuordnen können.
- Wir können extensive Größen vorgeben.

Weitere Eigenschaften von intensiven Größen

- Mittelnd, wollen sich ausgleichen
- Lassen sich wahrnehmen und vergleichen
- Man kann sie nicht messen (nicht zählen).
- Wir interessieren uns für intensive Größen,
  weil wir sie wahrnehmen und vergleichen können.
- Intensive Größen sind Steuergrößen.
  Wir können sie nur indirekt vorgeben.
- Können wir ihnen auch Zahlen zuordnen? Ja, aber wie?

Meßbar oder berechenbar?

- Extensive Größen kann man messen, indem man zählt, wieviele Normmaße hineinpassen.
- Jeder int. Größen kann man zwei ext. Größen zuordnen:
  - Geschwindigkeit: Weg und Zeit $L = v \cdot T$
  - Prozente: Anteil und Gesamtmenge $A = p \cdot M$
  - Kraft: Weg (Auslenkung) und inverse Federkonstante $L = f \cdot D$
- Intensive Größen kann man berechnen: $C = a \cdot B \Longrightarrow a = C/B$ (Zahlenwerte)
- Satz über die Eindeutigkeit: $a = f(C/B)$, f monoton a ist eindeutig bestimmt modulo
  - Verschiebung
  - Skalierung
  - Orientierung

Die Grundgleichung: extensiv mal intensiv = extensiv

extensiv	=	intensiv	·	extensiv
Anteil	=	Prozente	·	Gesamtmenge
Alkoholmenge	=	Alkoholgehalt	·	Gesamtvolumen
Weg	=	Geschwindigkeit	·	Zeitintervall
Impuls	=	Geschwindigkeit	·	Masse
Impuls	=	Kraft	·	Zeitintervall
Arbeit	=	Kraft	·	Weg
Auslenkung	=	Kraft	·	1/Federkonstante
Ladung	=	Spannung	·	Kapazität
Ladung	=	el. Strom	·	Zeitintervall
Energie	=	Druck	·	Volumen
Energie	=	Temperatur	·	Entropie
Umsatz	=	Preis	·	Stückzahl

Das duale Produkt

- Extensiv = extensiv mal intensiv + extensiv mal intensiv + ...
- Gesamtweg = Geschwindigkeit mal Zeit
  420 km = 120 km/h $*$ 2 Stunden $+$ 60 km/h $*$ 3 Stunden
- Umsatz = Preis mal Stückzahl
  110 Eus = 10 Stück zu 5 Eus/Stück + 20 Stück zu 3 Eus/Stück

$$Q = f_1 \cdot M_1 + \ldots + f_n \cdot M_n \quad \xrightarrow{n \to \infty} \quad Q(B) = \int_B f(x) M(dx)$$

Duales Produkt ergibt Lebesgueintegral

Funktionen, Maße und Lebesgueintegral

$$Q = f_1 \cdot M_1 + \ldots + f_n \cdot M_n \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad Q(B) = \int_B f(x) M(dx)$$

- $f : \Omega \to \mathbb{R}$, stetige Funktion, bildet Punkte $\to \mathbb{R}$ ab
  Maximum, Minimum, Mittelwert hat Sinn
- $M : 2^\Omega \to \mathbb{R}$, positives additives Maß, bildet Mengen $\to \mathbb{R}$ ab
- Riemannintegral ist Spezialfall des Lebesgueintegrals
- Die Umkehrung der Multiplikation $C = a \cdot B \Longrightarrow a = C/B$ ergibt die Umkehrung des Lebesgueintegrals, die Radon-Nikodym Ableitung

$$f(x) = \lim_{M(B)\to 0, \{x\}\in B} \frac{Q(B)}{M(B)}$$

  (keine Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes!)
- Legendretransformation: z.B. Geschwind. $\Longleftrightarrow$ Impuls

Eierproduktion

- Aufgabe: Anderthalb Hühner legen in anderthalb Tagen anderthalb Eier. Wieviel Eier legt ein Huhn pro Tag?

$$\frac{\text{Hühner}}{1/\text{Produktivität}} = \text{Eierstrom} = \frac{\text{Eier}}{\text{Zeit}}$$

- 2 Quotienten extensiver Größen ergeben eine intensive Größe
  Linke Seite: aktiv, Handlung; Rechte Seite: passiv, Ergebnis
- Gesucht: Naturkonstante/Materialkonstante

$$\text{Produktiv.} = \frac{\text{Eier}}{\text{Hühner} * \text{Zeit}} = \frac{2}{3}\,, \quad 1/\text{Produktiv.} = \frac{\text{Hühner} * \text{Zeit}}{\text{Eier}}$$

1/Produktivität: Je größer, desto schlechter

Weitere Beispiele

- Eierprod.: $$\frac{\text{Hühner}}{1/\text{Produktivität}} = \text{Eierstrom} = \frac{\text{Eier}}{\text{Zeit}}$$
- Mechanik: $$\frac{\text{Auslenkung}}{1/\text{Federkonstante}} = \text{Kraft} = \frac{\text{Impuls}}{\text{Zeit}}$$
- Kinematik: $$\frac{\text{Impuls}}{\text{Masse}} = \text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$
- Allgemein: aktiver Quotient = intensiv = passiver Quotient
- Typische Aufgabe beim Dreisatz in der Ökonomie:
  Berechne die Materialkonstante

Naturgesetze. Philosophische Grundfragen

Rudolf Steiner: "Im Grunde genommen kann man nicht philosophieren, ohne wenigstens den Geist des mathematischen Denkens erfaßt zu haben."

- Das Ergebnis der Forschung sind Naturgesetze (z.B. Fallgesetz, Impulserhaltungssatz).
- Was bedeuten die Naturgesetze?
  Haben wir der Natur damit ein Geheimnis abgerungen?
- Haben wir ein Zwangsverhalten der Natur entdeckt?
  Muß sich die Natur an die von uns entdeckten Gesetze halten?
- Wir sind es, die die Fragen stellen!
  Hält uns vielleicht unsere Denkweise zum Narren?

Das Fallgesetz. Wortlaut

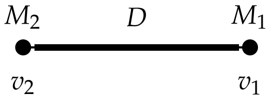
- Wikipedia: Über die Ursache und den genauen Ablauf des freien Falls von Körpern im Schwerefeld der Erde wurden schon in der Antike Spekulationen angestellt. Doch erst Anfang des 17. Jahrhunderts stellte Galileo Galilei Messungen an. Daraus erkannte er, dass die Bewegung im freien Fall gleichmäßig beschleunigt ist und darüber hinaus unabhängig von Material, Masse und Form des Körpers.
- Aristoteles:
  Ein doppelt so schwerer Körper fällt doppelt so schnell.
- Galileo Galilei:
  Discorsi e dimostrazioni matematiche, Leiden 1638
  “Unterredung und mathematische Demonstration über zwei neue Wissenszweige die Mechanik und die Fallgesetze betreffend”

Galileis Beweis

- Es sei $v(A)$ die Geschwindigkeit (z.B. beim Auftreffen aus gegebener Höhe) eines Körpers mit der Masse A.
- Es sei $v(A) < v(B)$, falls $A < B$.
- Die Geschwindigkeit ist intensiv, also ist $v(A+B) \in \big[v(A), v(B)\big]$
- $B = A \Longrightarrow v(2A) = v(A)$
- $B = 2A \Longrightarrow v(3A) \in \big[v(A), v(2A)\big] = \big[v(A), v(A)\big]$
  $\Longrightarrow v(3A) = v(A)$, ...
  Analog $\Longrightarrow v(nA) = v(A)$
- Analog, weil A ist beliebig: $v(p/q\ A) = v(A)$
- $\Longrightarrow$ (+ Stetigkeit) $v(A) = v(B)$ für alle A und B.

Impulserhaltungssatz. Wortlaut

- Der Gesamtimpuls eines mechanischen Systems, auf das keine äußeren Kräfte – auch keine Zwangskräfte – wirken, bleibt konstant. (Zwangskräfte verrichten keine Arbeit.)
- Beispiel: Eine Feder (1/F-Konst. D) zwischen zwei Massen M_i



- $v_2 > v_1 > 0$, Impuls: $P = v \cdot M$
- Impulserhaltungssatz: $P_1(t) + P_2(t) = P_1(0) + P_2(0) = \text{const.}$

Dualität

- Wir interessieren uns nicht für alles, sondern nur für extensive (additive, meßbare) und intensive (mittelnde, beobachtbare) Größen.
- Die Multiplikation vermittelt Dualität zwischen
  - extensiven und intensiven Größen (Physik)
  - Funktionen und Maßen (Mathematik)
  - Beobachtung (räumlicher Prozeß) und Zählen (zeitlicher Prozeß) (Erkenntnistheorie)

Naturgesetze

- Viele Naturgesetze insb. Erhaltungssätze sind Tautologien: Wir zerlegen eine Zahl in die Summe von zwei Summanden, addieren die Summanden und wundern uns, daß wir die ursprüngliche Summe erhalten.
  Beispiel: Längenerhaltungssatz
- Die materielle Welt verändert sich – soweit sie nicht dem menschlichen Willen unterworfen ist – weil sich intensive Größen ausgleichen wollen. Gleichgewicht bedeutet konstante intensive Größen.