

Dreht sich die Erde wirklich um die Sonne?
Zum Begriff der Wahrheit in Mathematik und
Naturwissenschaften

Holger Stephan
Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

24. Tag der Mathematik
11. Mai 2019, Beuth Hochschule für Technik Berlin

Mathematische Modellierung

- ▶ Was macht die angewandte Mathematik?
- ▶ Wechselspiel zwischen mathematischen und realen/physischen Objekten.
- ▶ Wechselspiel zwischen mathematischen Wahrheiten und Naturgesetzen (Wahrheiten in den Naturwissenschaften).
- ▶ Kann man aus der Mathematik auf die Realität schließen?
- ▶ Was hat man tatsächlich modelliert?
- ▶ Ist das Ergebnis objektiv? (Hängt nicht vom Subjekt ab.)
- ▶ Wer macht mit beim Modellieren:
 - ▶ Mathematiker
 - ▶ Naturwissenschaftler (Entdecker)
 - ▶ Ingenieure (Erfinder, früher: kreative Handwerker)

Vortragsübersicht

- ▶ Der Satz des Pythagoras
- ▶ Geo- vs. heliozentrisches Weltbild
- ▶ Galileis Fallgesetz
- ▶ Das Atommodell
- ▶ Das Perpetuum mobile

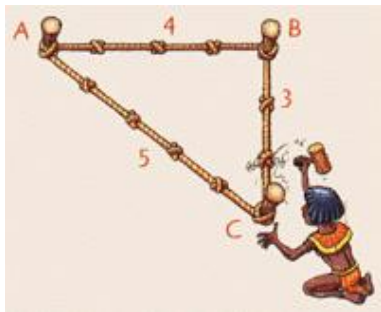
Mathematischen Wahrheiten

Typisches Beispiel: Der Satz des Pythagoras.

Zusammenhang zwischen einem geometrischen Objekt (rechtwinkliges Dreieck) und einem algebraischen Objekt (Gleichung).

Typische Eigenschaften in der Mathematik:

- ▶ Wahrheit wird nicht durch die Erfahrung sondern durch die Logik (den Beweis) vermittelt.
- ▶ Jeder kann den Beweis jederzeit überprüfen.
- ▶ Die Wahrheit ist absolut (unveränderbar, ewig, unabhängig von Raum und Zeit)
- ▶ In der Mathematik gibt es keine Lügner, keine Demagogen.
- ▶ In der Mathematik gibt es keine "Meinungen".

Der Satz des Pythagoras in der Anwendung

- ▶ Ingenieur: Zwölfknotenschnur
- ▶ Ägypten: Harpedonapten (Seilspanner)
- ▶ Die Umkehrung: Die Zwölfknotenschnur verstehen.
- ▶ Ist der Satz des Pythagoras ...
 - ▶ ... eine Entdeckung oder eine Erfindung?
 - ▶ ... ein Naturgesetz?

Mathematiker und Ingenieure als Philosophen

Ziele:

- ▶ Mathematiker: Der Beweis muß gefunden werden.
- ▶ Ingenieur: Das Ding muß funktionieren.

Philosophische Schlüsse (Ist die Welt erkennbar?)

- ▶ Mathematiker:
Alle interessanten wahren Sätze sind auch prinzipiell beweisbar.
David Hilbert: "In der Mathematik gibt es keinen Ignorabimus."
Ignoramus et ignorabimus
(lat. „Wir wissen es nicht und wir werden es niemals wissen“)
Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz widerspricht dem nicht!
- ▶ Ingenieur: Dem Ingenieur ist nichts zu schwör.

Geo- oder heliozentrisches Weltbild

- ▶ 1543 Hauptwerk von Nikolaus Kopernikus
De revolutionibus orbium coelestium
(dt.: Über die Umschwünge der himmlischen Kreise)
- ▶ Vorher: geozentrisch; Nachher: heliozentrisch
- ▶ Historie:
 - ▶ Bonaventura 1221-1274
(Christus als Sonne in der Mitte der Schöpfung)
 - ▶ Nikolaus von Oresme 1330-1382
 - ▶ Nikolaus Kopernikus 1473-1543
- ▶ Geozentrisches Weltbild wurde bis ins 19 Jh. praktisch benutzt.
- ▶ Wer dreht sich denn nun um wen? Experiment?
- ▶ Heute: Alles ist relativ.

Warum der ganze Streit?

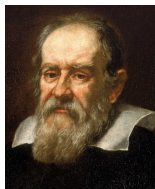
- ▶ Mal sind die einen die Ketzter, mal die anderen.
- ▶ Was passierte damals noch?
 - ▶ Nikolaus Kopernikus 1473-1543
 - ▶ Pierre de Fermat 1607-1655
rechtwinklige Koordinaten
 - ▶ René Descartes 1596-1650
Verlegt das Koordinatensystem aus dem Menschen heraus.
- ▶ Die Sicht des Menschen auf die Welt hat sich verändert.
- ▶ Wie sehen es alternative Wissenschaftler?

Das Fallgesetz. Galileis Beweis

- ▶ Aristoteles: Doppelt so schwere Körper fallen doppelt so schnell.
- ▶ Galilei: Alle Körper fallen gleichschnell.
- ▶ Galileis Beweis: Rein logisch, kein Experiment!
- ▶ Exakter:

Es seien m_i –Masse, $v(m_i)$ –Geschwindigkeiten
Z.z. $v(m_1) = v(m_2)$. Galileis Beweis (indirekt):

- ▶ Annahme: $m_1 < m_2 \implies v(m_1) < v(m_2)$
- ▶ Voraussetzung 1: $m_1 + m_2 > m_1, m_2$
- ▶ Voraussetzung 2: $v(m_1) < v(m_1 + m_2) < v(m_2)$
- ▶ \implies Widerspruch zur Annahme



Galileo Galilei

Was ist ein Naturgesetz?

- ▶ Naturgesetz = Zwangsverhalten der Natur
- ▶ Naturgesetz rein logisch hergeleitet!
Warum muß sich die Natur an die Logik halten?
- ▶ Schizophrenie:
 - ▶ Wir beobachten: Jeder Körper fällt wie er will.
 - ▶ Wir wissen: In Wirklichkeit fallen alle Körper gleichschnell.
- ▶ Darf die Natur sich nicht an die Logik halten?
- ▶ Hegel: "Wenn die Tatsachen nicht mit der Theorie übereinstimmen – umso schlimmer für die Tatsachen."
- ▶ Woher kommen Galileis Voraussetzungen?
 - 1: $m_1 + m_2 > m_1, m_2$
 - 2: $v(m_1) < v(m_1 + m_2) < v(m_2)$



Georg Wilhelm
Friedrich Hegel

Intensive und extensive Größen

- ▶ Wie verhält sich eine physikalische Größe, wenn man zwei Körper in Kontakt bringt?
- ▶ Es gibt nur zwei Typen physikalischer Größen:

Extensive

Intensive

$$m_{12} = m_1 + m_2 > m_1, m_2 \qquad v_{12} = \frac{\alpha v_1 + \beta v_2}{\alpha + \beta} \in [v_1, v_2]$$

- ▶ Intensive Größen sind z.B.: Temperatur, Geschwind., Kraft, Helligkeit, Prozentanteile, Preis
- ▶ Extensive Größen sind z.B.: Länge (Weg), Zeitintervall, Volumen, Masse, Stückzahl, Impuls, Energie
- ▶ Der Mensch interessiert sich für nichts anderes!
- ▶ Intensive Größen können wir beobachten und vergleichen.
- ▶ Extensive Größen können wir durch zählen messen.
Extensive Größen erhalten sich!

Intensive und extensive Größen und Galileis Beweis

- ▶ Galilei: Wie verhält sich eine intensive Größe (Geschwindigkeit), wenn sie nur von einer extensive Größe (Masse) abhängt?
- ▶ Stellt sich heraus: Sie muß konstant bleiben.
- ▶ Diese Eigenschaft steckt in den gewählten Größen bereits drin. Wir wußten es nur nicht.
- ▶ Das Fallgesetz ist ein mathematischer Satz. Ob wir ihn anwenden können hängt von der Situation ab.
- ▶ Satz gilt nicht für Temperatur anstelle der Masse.
- ▶ Satz gilt nicht bei komplizierteren Abhängigkeiten.
- ▶ Moral: Verwechsle nicht Naturgesetz und mathematischer Satz!

Das Atommodell

- ▶ Hypothese: Alle Materie ist aus diskreten Objekten (Atomen) zusammengesetzt (seit Demokrit).
- ▶ Das Atommodell war im 19.Jh stark umstritten. Heute scheint es sich durchgesetzt zu haben.
- ▶ Früher umstritten. Heute bewiesen?
- ▶ Das Atommodell hat sich entwickelt (die Atome sind komplizierter geworden, haben mehr Freiheitsgrade erhalten).
- ▶ Ernst Mach war Gegner des Atommodells.

Ernst Mach. Physiker und Philosoph

▶ Werke:

- ▶ Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit (1872)
- ▶ Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt (1883)
- ▶ Die Principien der Wärmelehre (1896)
- ▶ Erkenntnis und Irrtum. Skizzen zur Psychologie der Forschung (1905)



Ernst Mach

Was ist Wissenschaft?

*Man führt ungewöhnliche Unverständlichkeiten
auf gewöhnliche Unverständlichkeiten zurück.*

Der radioaktive Zerfall

- ▶ Ausgangspunkt: Atommodell.
Es gibt diskrete Atome, die zerfallen.
- ▶ Herleitung einer Gleichung für die Stoffmenge x zu den Zeitpunkten t und $t + \Delta t$:
 - ▶ In einer Zeiteinheit Δt zerfallen k Atome.
 - ▶ Gleichung: $x(t + \Delta t) = x(t) - k$
 - ▶ Wir nehmen an, daß k proportional zu Δt und zu $x(t)$ ist:
 $k = a \cdot \Delta t \cdot x(t)$ mit der Zerfallsrate a . Das ergibt:

$$x(t + \Delta t) = x(t) - a \cdot \Delta t \cdot x(t) \implies \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -ax(t)$$

- ▶ Grenzwert: $\Delta t \rightarrow 0$. Das ergibt:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -ax(t) \implies x(t) = x_0 e^{-at}$$

- ▶ Was haben wir tatsächlich modelliert? Ein Kontinuum!
- ▶ Moral: Eine räumlich diskrete Welt verträgt sich nicht mit einer kontinuierlichen Zeit!

Naturwissenschaftler als Philosophen

- ▶ Naturwissenschaftler (Physiker) bilden die Brücke zwischen der geistigen Welt (der Mathematiker) und der physischen Welt (der Ingenieure).
- ▶ David Hilbert:
“Die Physik ist für die Physiker eigentlich viel zu schwer.”
- ▶ Schließen von den mathematischen Eigenschaften des Modells auf die Eigenschaften der Natur.
 - ▶ Vorherbestimmtheit der Entwicklung (weil unsere mikroskopischen Gleichungen deterministisch sind).
 - ▶ Schmetterlingseffekt (weil dynamische Systeme chaotisches Verhalten zeigen).
 - ▶ Wärmetod (weil die Boltzmann-Gleichung und andere dissipative Gleichungen irreversibel ist).
 - ▶ Feinabstimmung der Naturkonstanten

Das Perpetuum mobile (erster Art)

Typischer Dialog zwischen Ingenieur und Physiker:

- ▶ Ein *Perpetuum mobile* wär' schon toll. Kann man sowas bauen?
- ▶ Nein!
- ▶ Schade. Warum denn nicht?
- ▶ Wegen des Energieerhaltungssatzes.
- ▶ Und warum gilt der?
- ▶ Der folgt aus dem Satz von Emmy Noether.

Satz von Emmy Noether (Differentialgeometrie, 1918):

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.

Merke: Ein mathematischer Satz wird zur Ikone erhoben und bremst die Kreativität des Ingenieurs.

*Die Geschichte der Unmöglichkeit
(in umgekehrter chronologischer Reihenfolge)*

- ▶ 1918: Satz von Emmy Noether
- ▶ 1847: Hermann von Helmholtz leitet den Energieerhaltungssatz für einfachste mechanische Systeme (n Punktmassen) her.
- ▶ 1842: Julius Robert von Mayer (mechanischen Wärmeäquivalent).
- ▶ 1775: Die Pariser Akademie der Wissenschaften beschloß, keine Patentanträge auf ein Perpetuum mobile mehr zur Prüfung anzunehmen, da eine immerwährende Bewegung nicht möglich sei.

Der Energieerhaltungssatz

- ▶ Wikipedia: Der Energieerhaltungssatz drückt die Erfahrungstatsache aus, dass die Energie eine Erhaltungsgröße ist, dass also die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems sich nicht mit der Zeit ändert.
- ▶ Falsch: Wenn wir beschließen, nach den Eigenschaften der Energie zu fragen, haben wir bereits festgelegt, daß wir uns für eine extensive Größe – also eine Erhaltungsgröße – interessieren.
- ▶ Denke überall “Länge” anstelle von “Energie”.
- ▶ Das besondere beim Energieerhaltungssatz ist das Experiment, nämlich das Können, in einem abgeschlossenen System verschieden “Energiearten” möglichst ohne Verlust ineinander umzuwandeln.

Energieerhaltungssatz und Perpetuum mobile

- ▶ Konstruiere ein Perpetuum mobile bedeutet nicht:
Konstruiere eine Maschine, die den EES verletzt.
- ▶ Das ist dasselbe wie:
Finde eine ungerade Zahl, die durch 2 teilbar ist.
- ▶ Konstruiere ein Perpetuum mobile bedeutet:
Konstruiere etwas, wo mehr Energie herauskommt,
als man hineingesteckt hat.
Natürlich in einem offenen System!

Und das machen wir jeden Tag ohne Mühe.
Z.B. In Solaranlagen (seit kurzem).

Das Zetler-Lexikon



- ▶ Johann Heinrich Zetlers
Großes vollständiges
Universal-Lexicon Aller
Wissenschaften und Künste
- ▶ Erschien in den Jahren
1731 bis 1754
- ▶ Umfangreichste Enzyklopädie
im Europa des 18. Jh
- ▶ 64+4 Bände, 63.000 Seiten,
284.000 Einträge

Mathematick-Lehrer, Mathematicus, heisset eigentlich eine Person, welche die Mathematick gründlich versteht, auch solche dahin gehörige Wahrheiten durch eigenes Nachsinnen zu erfinden geschickt ist.

Mathematik-Lehrer, Mathematicus, die einige Sachen aus der ausübenden Mathematick verstehen, z.B.

die geometrischen Figuren sauber auf das Papier zu zeichnen,

oder ein Feld zu messen,

oder ein Brenn-, Fern- oder Vergrößerungs-Glas zu schleifen,

oder einen Calender zu machen,

oder eine Sonnen-Uhr zu verfertigen,

oder ein Wetter-Glas zuzubereiten,

oder eine Kugel (Globum) aufzuziehen, oder einen schönen bunten Riß

von einer Festung oder einem Gebäude zu machen,

oder durch vieles Versuchen eine Maschine,

ja wol gar vermeyntes Perpetuum mobile heraus zu bringen, oder etwas

anders dergleichen zu thun vermögend sind...

Ausbildung am WIAS

- ▶ Beobachtung (empirische Feststellung):
Nicht jeder Schüler, der gut in Mathe ist, will studieren.
- ▶ Das WIAS bildet Lehrlinge (Azubis) zum

Mathematisch-technischen Softwareentwickler (MATSE)

aus.

- ▶ Dreijährige duale Ausbildung:
1 Woche Berufsschule, 2 Wochen Arbeit am WIAS
- ▶ Im Herbst beginnt die Bewerbungsphase für den neuen
Ausbildungszyklus 2020-2023.
- ▶ Betrifft Schüler, die jetzt in der 11. Klasse sind.