

Künstliche Intelligenz vs. Natürliche Dummheit

Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

26. Tag der Mathematik
6. Mai 2023, Humboldt-Universität zu Berlin

Übersicht

- ▶ Maschinen nehmen dem Menschen die Arbeit weg.
- ▶ In letzter Zeit wird KI viel kritisiert.
- ▶ Wie funktioniert KI?
- ▶ KI kann jeder.
- ▶ Kann ein Computer potentiell alles?
- ▶ Dualität von Mengen und ihren Teilmengen
- ▶ Ausblick. Was sollten wir den Schülern beibringen?

Künstliche Intelligenz überall

Liste von frei zugänglichen Tools. Zusammengefaßt auf

<https://www.hcilab.org/ai-tools-directory/>

- ▶ Text Generation (z.B. ChatGPT)
- ▶ Translation and Transcription
- ▶ Image Generation and Manipulation
- ▶ Design, Marketing, Content Creation, SEO
- ▶ Audio and Music Processing, Transcription
- ▶ Programming and Code Generation
- ▶ Learning and Teaching
- ▶ Mathematics
- ▶ Productivity applications
- ▶ Tools to build AI applications

Gut oder böse?

Maschinen nehmen dem Menschen die Arbeit weg – schon immer

- ▶ Uhrmacher, Buchdrucker, ...
- ▶ wissenschaftliche Rechner (70-er Jahre)
- ▶ Informatiker: Webseiten programmieren
Früher konnte man viel Geld damit verdienen.
- ▶ Schachspiel

Technik erleichtert (mir) die Arbeit

- ▶ Computer überhaupt
- ▶ Textverarbeitungssysteme
- ▶ Computeralgebrasysteme z.B. *mathematica*, *maple*, ...
- ▶ Visualisierung
- ▶ Internet
- ▶ Künstliche Intelligenz
 - ▶ Übersetzungsprogramme
 - ▶ ChatGPT (OpenAI, Google)

Menschen und Technik. Zusammenfassung

- ▶ Die Entwicklung der Technik geht vom Menschen aus. Er entwickelt Geräte weil er es will.
- ▶ Ziel: Dem Menschen die Arbeit wegzunehmen.
- ▶ Besonderheit heute: Heute geht es viel schneller. Innovationszyklus ist kürzer als Biozyklus.
- ▶ Frühere Fähigkeiten überleben häufig nur in Nischen. Welche Fähigkeiten nutzen ewig?
- ▶ Ein Leben lang lernen? Ja!
- ▶ Ein Leben lang Fähigkeiten entwickeln? Nein! Auch nicht in der Mathematik.
- ▶ Die Technik an sich ist weder gut noch böse.

Plötzlich wird vor KI gewarnt – und von wem!



Elon Musk

„KI hat das Potenzial zur Zerstörung der Zivilisation“



Steve Wozniak



Geoffrey Hinton. Erfinder des
Backpropagation-Algorithmus (1986)
Hat seinen Job bei Google gekündigt, um
„sich über die Gefahren der KI zu äußern“.

Was wird nicht (oder wenig) kritisiert?

- ▶ Nanotechnologie
- ▶ Überwachung, Social credit
- ▶ mRNA-Therapien
- ▶ 5G-Netze
- ▶ Atomenergie (außer in Deutschland)

Was haben diese Technologien gemeinsam, was KI nicht hat?

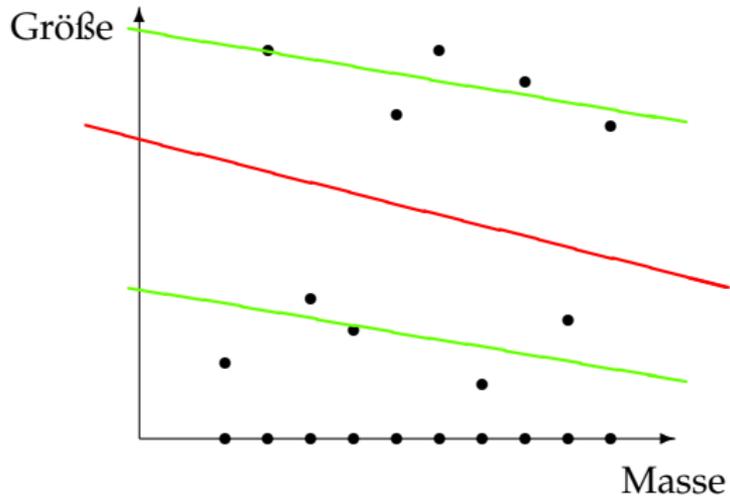
KI kann jeder benutzen!

... deshalb muß sie reguliert werden. Siehe offenen Brief.

Einfachste Aufgaben, die KI löst

- ▶ Typische Aufgaben: Klassifikation
 - ▶ Hund oder Katze?
 - ▶ Handschriftliche Ziffern erraten
 - ▶ Allgemein Bilderkennung
 - ▶ Viel Input, wenig Output
- ⇒ Clusteranalyse

Clusteranalyse \neq Regression



Regressionsgerade

Clusteranalyse

Wie funktioniert KI?

- ▶ Blackbox: Input \implies Output
- ▶ Idee: Vergrößerung des Zustandsraumes
- ▶ Aber: Woher kommen die Attribute (Masse, Größe)?
- ▶ Der Computer soll selbst darauf kommen.
- ▶ Man gibt extrem viele Freiheitsgrade vor, in der Hoffnung, sie könnten irgendetwas bedeuten.
- ▶ Aufgabe: Minimum finden von einer hochdim. Funktion
Ausgehend von bekannten (Input, Output)-Paaren
- ▶ Lösungsmethode ist seit Gauß gut bekannt
(Methode der kleinsten Quadrate)
- ▶ Klassische Blackboxaufgaben: Mich interessiert der Inhalt.
- ▶ KI-Blackbox: Ich verstehe den Inhalt nicht, vertraue aber dem Algorithmus. Fehler kommen vor!
- ▶ Es gibt Baukästen, z.B. TensorFlow

Gibt es Grenzen?

- ▶ Wie arbeitet ein Computer?
- ▶ Schritt für Schritt. Endlich, aber potentiell abzählbar.
- ▶ Es gibt Nichtberechenbares.
- ▶ Es gibt Überabzählbares, z.B. die reelle Zahlen.

Gleichheit reeller Zahlen?

- ▶ Reelle Zahl = Dezimaldarstellung
- ▶ Beispiel 1: Gleichheit oder Ungleichheit von reellen Zahlen
 $x = \sqrt{2} - 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Frage: $x = y$?
 $x = y = 0,41421\dots$
- ▶ Beispiel 2: $x = \tan 7.5^\circ$, $y = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$?
Frage: $x = y$?
 $x = y = 0.131652497\dots$

⇒ Ungleichheit feststellbar, Gleichheit im allgemeinen nicht.

Beispiel 3: Srinivasa Ramanujan

$$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{e^{-2\pi/5}}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \ddots}}}}}$$



Srinivasa Ramanujan

Ungleiche Zahlen

$$\begin{aligned} e^{\pi\sqrt{163}} &= 262537412640768744 \\ &= 262537412640768743.9999999999992500725971..... \end{aligned}$$

- ▶ Ungleichheit kann man erkennen – nach 31 Stellen.
- ▶ Alle Gleichungen lösen zu können, ist ein Trugschluss.
Wir können keine Probe machen!
- ▶ Was man selbst verstanden hat,
kann man dem Computer beibringen.
Beispiele 1 und 2 kann inzwischen auch ein Computer lösen.

Diskussion mit ChatGPT I

Frage (russisch): *Kann der Computer immer entscheiden, ob zwei gegebene reelle Zahlen, z. B. $(\sqrt{2} - 1)$ und $1/(\sqrt{2} + 1)$, gleich sind?*

Ja, der Computer kann entscheiden, ob zwei gegebene reelle Zahlen gleich sind. Dazu verwendet er mathematische Operationen und vergleicht Zahlen mit einer bestimmten Genauigkeit. In diesem speziellen Beispiel ist es möglich, beide Zahlen zu berechnen und sie mit einer gewissen Genauigkeit zu vergleichen, z. B. bis auf 10 Dezimalstellen. Wenn sie gleich sind, gibt der Computer das Ergebnis True aus, wenn nicht - False.

Diskussion mit ChatGPT II

Frage (russisch): *Wenn zwei reelle Zahlen ungleich sind, werden in der Dezimaldarstellung früher oder später verschiedene Ziffern erscheinen. Wenn sie gleich sind, niemals. Bedeutet das nicht, dass der Computer nicht entscheiden kann, ob zwei gegebene Zahlen gleich sind?*

Nein, ein Computer kann mit einiger Genauigkeit entscheiden, ob zwei gegebene Zahlen gleich sind. Reelle Zahlen werden in einem Computer mit einer bestimmten Genauigkeit dargestellt, die vom verwendeten Zahlenformat abhängt. Das IEEE-754-Gleitkommaformat ...

Diskussion mit ChatGPT III

Frage (deutsch): *Kann man mit einem Computer stets feststellen, ob zwei gegebene reelle Zahlen gleich sind?*

Nein, es ist nicht immer möglich, mit einem Computer festzustellen, ob zwei gegebene reelle Zahlen gleich sind. Dies liegt daran, dass es bei der Darstellung von reellen Zahlen auf einem Computer zu Rundungsfehlern kommen kann, die dazu führen können, dass zwei Zahlen, die mathematisch gleich sind, auf dem Computer als unterschiedlich dargestellt werden. Dieses Problem wird als Gleitkomma-Präzisionsproblem bezeichnet und kann bei vielen Arten von Berechnungen auftreten, die reelle Zahlen verwenden.

Diskussion mit ChatGPT IV

Frage (russisch): Kann der Computer feststellen, ob zwei Punkte identisch sind? Zum Beispiel, dass es nur einen Schnittpunkt von drei Winkelhalbierenden in einem Dreieck gibt.

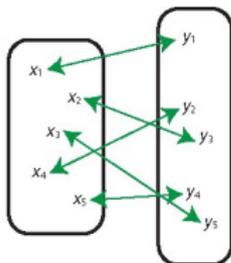
Ja, der Computer kann feststellen, ob zwei Punkte gleich sind. Dazu muss man die Koordinaten dieser Punkte vergleichen. Wenn die Koordinaten bis zu einer gewissen Genauigkeit übereinstimmen, gelten die Punkte als identisch. Liegen die Punkte jedoch an der Grenze der Genauigkeit, kann es Probleme bei der Feststellung geben, ob sie gleich sind.

Mächtigkeit von Mengen

- ▶ Mächtigkeit = Anzahl der Elemente einer Menge
- ▶ Anzahl der Elemente einer unendlichen Menge?
- ▶ \mathbb{N} abzählbar viele natürliche Zahlen.

Mengen A und B sind gleichmächtig, wenn es eine eindeutige Abbildung gibt. Wenn nicht, ist eine Menge mächtiger.

- ▶ $\{1, 2, \dots\} \longleftrightarrow \{0, 1, 2, \dots\}, n \longleftrightarrow n + 1$
- ▶ $\{1, 2, 3, 4, \dots\} \longleftrightarrow \{1, 4, 9, 16, \dots\}, n \longleftrightarrow n^2$
- ▶ $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen sind abzählbar)
- ▶ $\mathbb{N} \not\longleftrightarrow \mathbb{R}$ (reelle Zahlen sind überabzählbar)



eindeutige Funktion (umkehrbar)

Mengen und Teilmengen

Beispiel: Menge mit 3 Elementen: $X = \{1, 2, 3\}$

X hat 8 Teilmengen:

$$\mathcal{P}(X) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \right\}$$

Jeder Teilmenge: Dualzahl, z.B.

$$\emptyset \iff (000)_2$$

$$\{2\} \iff (010)_2$$

$$\{1, 3\} \iff (101)_2$$

$$\{1, 2, 3\} \iff (111)_2$$

Allgemein: Jeder Teilmenge eine n -stellige Dualzahl

\implies Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Satz von Georg Cantor

Es gibt zwischen einer Menge X und der Menge ihrer Teilmengen $\mathcal{P}(X)$ keine eindeutige Zuordnung $X \longleftrightarrow \mathcal{P}(X)$.

Beweis (indirekt):

Angenommen $X \ni x \longleftrightarrow A_x \in \mathcal{P}(X)$.

2 Möglichkeiten: $x \in A_x$ oder $x \notin A_x$.

Es sei $B = \{x | x \notin A_x\} \in \mathcal{P}(X)$. $\bar{B} = X \setminus B \in \mathcal{P}(X)$

Es sei $y \longleftrightarrow B$ also $B = A_y$.

Frage: $y \in B$ oder $y \in \bar{B}$?

$y \in B \implies y \notin B, y \notin B \implies y \in B$. Widerspruch! □

$\implies \mathcal{P}(X)$ ist mächtiger als X !

Mengen und ihre Teilmengen gehören zu verschiedenen Welten!

Reelle Zahlen sind überabzählbar

Es gibt eine eindeutige Zuordnung:

Reelle Zahlen in $x \in [0, 1] \iff$ Teilmengen der natürlichen Zahlen

$$(x)_2 = 0.1001011100101001110001101010101\dots$$

$$\iff \{1, 4, 6, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 18, 22, 23, 25, 27, 29, \dots\} \subset \mathbb{N}$$

Aber die Menge der Teilmengen der natürlichen Zahlen ist **überabzählbar** nach dem Satz von Cantor.

- ▶ Viele Paradoxa bauen hierauf auf
(z.B. auch die Gödelsche Unvollständigkeitssätze)
- ▶ Weitere Probleme: k^n , $n! \approx (n/e)^n$
- ▶ Endliche Mengen: P–NP–Problem (4. Millennium-Problem)

Komplexität

- ▶ Ist Hoffnung in Sicht? **Nein!**
- ▶ Mooresches Gesetz: Die Leistungsfähigkeit der Computer verdoppelt sich etwa alle 18 Monate.
- ▶ Angenommen, ich kann heute 100 Operationen ausführen. Wieviele Operationen kann ich in 18 Monaten ausführen?
 - ▶ log. Komplexität 100 Op. \implies 10.000 Op.
 - ▶ lin. Komplexität 100 Op. \implies 200 Op.
 - ▶ exp. Komplexität 100 Op. \implies 110 Op.
 - ▶ fakt. Komplexität 100 Op. \implies 101 Op.

Technik \iff Mensch

- ▶ Der Mensch arbeitet nicht schrittweise einen Algorithmus ab.
Der Mensch wählt aus einer überabzählbaren Menge aus.
- ▶ Die physische Realität besteht aus abzählbar vielen Zuständen.
Der Mensch entscheidet, welche Teil(menge) er davon interessant findet.
- ▶ Wie macht der Mensch das?
Das weiß keiner!
- ▶ Das Gehirn ist offenbar kein Computer.
- ▶ Kreativität ist die Fähigkeit, Teilmengen auszuwählen!
- ▶ Der Computer wird von allein nicht besser!
Das widerspricht dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik.

Ausblick

- ▶ Wie kann man Kindern Kreativität beibringen?
- ▶ Aufgaben stellen ohne Standard-Lösungsverfahren (Oly-Aufgaben)
- ▶ Selbst Aufgaben ausdenken lassen.
- ▶ Verallgemeinerungen finden lassen.
- ▶ Das Wesen hinter den Dingen finden.
Sind die Punkte identisch oder liegen sie nur dicht beieinander?
- ▶ (Rechen-)Fertigkeiten beibringen.
Die Kreativität muß auf gedüngten Boden fallen.

Lernt die richtige Teilmenge auszuwählen!