Dualität in der Elementaren Geometrie

Holger Stephan

Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastic (WIAS)

e-mail: `stephan@wias-berlin.de`

url: `www.wias-berlin.de/people/stephan`

FU Berlin, 5. Mai 2012; Tag der Mathematik

Was ist Dualität?

- Dualität = Jedes Problem hat zwei Seiten – aber welche?
- Dualität = Man kann jedes Problem von zwei Seiten aus betrachten.
- Dualität = Man teilt etwas künstlich in zwei Teile, die sich ähnlich sind.
- Zu einem Problem kann es verschiedene “zwei Seiten” geben.
- Oft ist eine Seite einfacher als die andere.
- Eine Operation vermittelt den Übergang zwischen den Seiten.
- Oft hat man ein Problem erst dann richtig verstanden, wenn man ein Dualitätsprinzip darin gefunden hat.

Beispiel für Dualität:
Mein Problem und der Rest der Welt

- Indirekter Beweis: Man beweist nicht Aussage A sondern zeigt, daß $(nicht\ A)$ falsch ist.
- Beispiel: Beweis des Schubfachschlusses:
  n Schachteln und $m > n$ Kugeln.
- Dualität: Prinzip des ausgeschlossenen Dritten:
  Man teilt die Welt in das Gute und den Rest.
  Man kann ein Problem verstehen, indem man alles das,
  was nichts damit zu tun hat, untersucht.
- Das ist ein Denkprinzip, kein Naturprinzip
- Beispiel: Alle Raben sind schwarz.
- Duale Aussage: Alles was nicht schwarz ist, ist kein Rabe.
- In der Mathematik hilft Dualität weiter,
  im Leben nicht unbedingt.
- $\Longrightarrow$ Erkennen einer Dualität ist eine Denkleistung.

Beispiel für Dualität in der Geometrie/Analysis:
Kürzester Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum

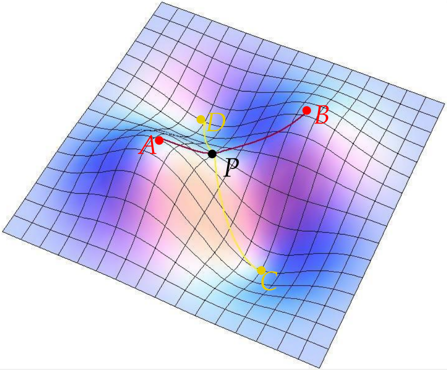
Kürzester Abstand (dist)
eines Punktes P von einer Geraden g im Raum

$$\operatorname{dist}(P, g) = \min_{Q \in g} \operatorname{dist}(P, Q) = \max_{\mathcal{E} \ni g} \operatorname{dist}(P, \mathcal{E})$$

Hier ist Q ein Punkt und $\mathcal{E}$ eine Ebene.

$\Longrightarrow$ Variationstheorie

Beispiel für Dualität: Paß im Gebirge



Der Punkt P
= Der höchste aller tiefsten Punkte eines Weges von A nach B.
= Der tiefste aller höchsten Punkte eines Weges von C nach D.

$$P = \min_{\text{Wege}} \max_{\overline{CD}} = \max_{\text{Wege}} \min_{\overline{AB}}$$

Minimax-Theorem (Dualität in der Variationstheorie)

Dualität bei Produkten

- Beispiel in der Geometrie: Flächeninhalt eines Dreiecks.

$$S \quad = \quad a_2 h_A = b_2 h_B = c_2 h_C$$

  Hier: $a_2 = a/2$, $b_2 = b/2$, $c_2 = c/2$.
- Flächeninhalt $S = xy \Longrightarrow$ Dualität $x \Longleftrightarrow \frac{1}{y}$.

$$S = xy \quad \Longrightarrow \quad x \Longleftrightarrow \frac{1}{y}$$

$$S = xy = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{y}$$

Dualität beim Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt eines Dreiecks: $S = xy$, Dualität: $x \Longleftrightarrow \frac{1}{y}$

$$S = a_2 h_A = b_2 h_B = c_2 h_C$$

$\Longrightarrow \quad a_2 \Longleftrightarrow \frac{1}{h_A}, \quad b_2 \Longleftrightarrow \frac{1}{h_B}, \quad c_2 \Longleftrightarrow \frac{1}{h_C}$

Heronsche Formel ($a_2 = a/2$, $b_2 = b/2$, $c_2 = c/2$):

$$\begin{aligned} S^2 &= p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C = \\ &= (a_2 + b_2 + c_2)(-a_2 + b_2 + c_2)(a_2 - b_2 + c_2)(a_2 + b_2 - c_2) \\ \frac{1}{S^2} &= \left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}\right)\left(-\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}\right)\left(\frac{1}{h_A} - \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}\right)\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} - \frac{1}{h_C}\right) \end{aligned}$$

Was ist der Flächeninhalt?

Flächeninhalt = Produkt zweier senkrecht aufeinander stehender Strecken

r – Radius des Inkreises

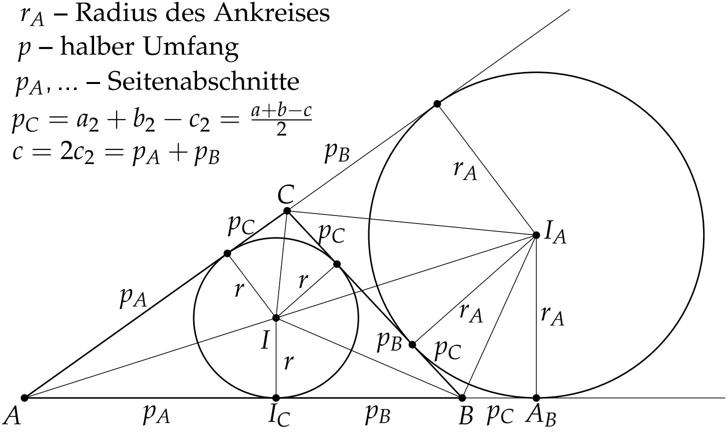
r_A – Radius des Ankreises

p – halber Umfang

$p_A, \ldots$ – Seitenabschnitte

$p_C = a_2 + b_2 - c_2 = \frac{a+b-c}{2}$

$c = 2c_2 = p_A + p_B$



$$S = a_2 h_A = b_2 h_B = c_2 h_C = pr = p_A r_A = p_B r_B = p_C r_C$$

Dualität beim Flächeninhalt eines Dreiecks

- Flächeninhalt
  $S = a_2 h_A = b_2 h_B = c_2 h_C = pr = p_A r_A = p_B r_B = p_C r_C$
- Flächeninhalt $S = xy \Longrightarrow$ Dualität $x \Longleftrightarrow \frac{1}{y}$
- Beweis, daß $h_A = \frac{2 r_B r_C}{r_B + r_C}$

$$2a_2 = p_B + p_C \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{h_A} = \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$$

$$p = p_A + p_B + p_C \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$$

$$p_A = p - 2a_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r_A} = \frac{1}{r} - \frac{2}{h_A}$$

- $S^2 = p p_A p_B p_C = r r_A r_B r_C$ weil $S^2 = p p_A p_B p_C = S^4/(r r_A r_B r_C)$.
- Was fehlt bei S? $\qquad S = R p_H$

Dualität Punkt $\Longleftrightarrow$ Gerade

- Gerade = Verbindung von zwei Punkten $\Longleftrightarrow$
- Punkt = Schnittpunkt zweier Geraden
- Sieht nach Dualität aus, aber Schönheitsfehler:
  Parallele Geraden
- Zwei Möglichkeiten:
  - Exakte Dualität (auch parallele Geraden schneiden sich !) $\Longrightarrow$
    Projektive Geometrie (Preis: keine Winkel, keine Streckenlängen)
  - Nicht ganz exakte Dualität
    Dadurch entstehen zwei verschiedene Aufgaben
    (verschieden schwere Aufgaben)

Projektive Geometrie

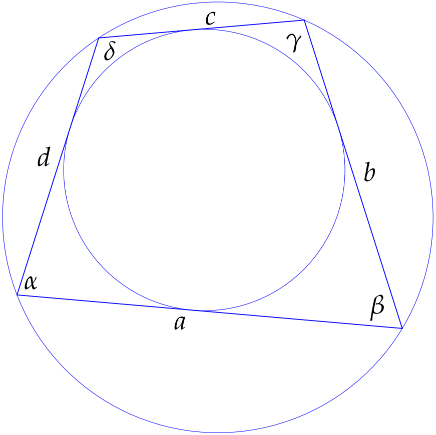
- Satz von Desarges: *Wenn sich die Verbindungslinien zwischen korrespondierenden Eckpunkten zweier in einer Ebene gelegenen Dreiecke in einem Punkt schneiden, so liegen die Schnittpunkte der entsprechend verlängerten Seiten auf einer Geraden*
- Umkehrung des Satzes von Desarges:
- Satz von Pascal: *Liegen die Eckpunkte eines willkürlich gewählten Sechsecks auf einem Kegelschnitt (Kreis, Ellipse, ...), so liegen die Schnittpunkte der drei gegenüberliegenden Seitenpaare des Sechsecks auf einer Geraden*
- Satz von Brianchon: *In einem konvexen Sechseck ABCDEF, das einen Kegelschnitt umschreibt (d.h. alle Seiten sind Tangenten des Kegelschnitts), schneiden sich die Diagonalen (AD,BE,DF) in einem Punkt*

Dualität zwischen Umkreis und Inkreis im Dreieck
Dualität: 3 Punkte $\Longleftrightarrow$ 3 Geraden

- 3 Punkte $\Longrightarrow$ Umkreis = Schnittpunkt der Mittelsenkrechten
- 3 Geraden $\Longrightarrow$ Inkreis = Schnittpunkt der Winkelhalbierenden
- Mittelsenkrechte = Symmetrieachse der Seite
- Winkelhalbierenden = Symmetrieachse des Winkels
- Dualität zwischen zwei Transformationen
- Besonderheiten: Winkelsumme, Eindeutigkeit, ...

Umkreis	Inkreis
Eckpunkte darauf	Seiten tangieren
Mittelsenkrechte	Winkelhalbierenden
Seiten	Winkel
Seitensymmetrie (SM)	Winkelsymmetrie (SW)

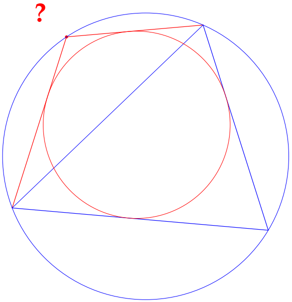
Kreis und Vierecke



- Sehnenviereck (SV) = Viereck mit Umkreis
- Tangentenviereck (TV) = Viereck mit Inkreis
- Sehnentangentenv. (STV) = 4-Eck mit Um- und Inkreis
- SV: $\alpha + \gamma = \beta + \delta (= 180^\circ)$
- TV: $a + c = b + d$
- Konstruktionen:
  - SV: Aus a, b, c, d ? Ja!
  - TV: Aus $\alpha, \gamma, \beta, \delta$? Nein!
  - STV: Schwer !!

Eine Aufgabe aus der IMO von 1962

- **Aufgabe A:** (IMO 1962)
  Gegeben (blau) sind 3 Punkte (Dreieck) und ein Kreis, auf dem alle 3 Punkte liegen (Umkreis).
  Gesucht (rot) ist ein 4. Punkt auf dem Kreis derart, daß die 4 Punkte ein STV bilden.

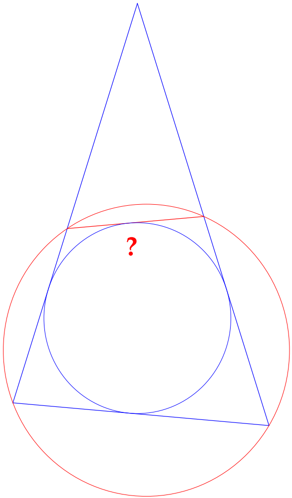


- Frage: Wann ist ein SV ein STV?
- Lösungsidee: Wir betrachten eine duale Aufgabe,
  hoffen, daß die einfacher zu lösen ist und
  versuchen den dualen Lösungsweg zu bilden und anzuwenden.

Duale Aufgabe

- **Aufgabe A:** (IMO 1962)
  Gegeben sind 3 Punkte (Dreieck) und
  ein Kreis, auf dem alle 3 Punkte liegen (Umkreis).
  Gesucht ist ein 4. Punkt auf dem Kreis derart,
  daß die 4 Punkte ein STV bilden.
- **Duale Aufgabe A′:**
  Gegeben sind 3 Geraden (Dreieck) und
  ein Kreis, der alle 3 Geraden berührt (Inkreis).
  Gesucht ist eine 4. Gerade, die den Kreis berührt derart,
  daß die 4 Geraden ein STV bilden.
- Wann ist ein SV ein STV? $\Longleftrightarrow$ Wann ist ein TV ein STV?

Wann ist ein TV ein STV?

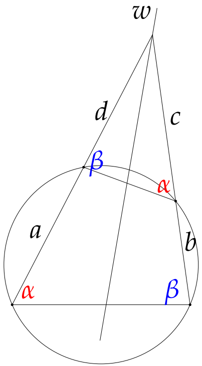


- **Duale Aufgabe A′:**
  Gegeben (blau) sind 3 Geraden (Dreieck) und ein Kreis, der alle 3 Geraden berührt (Inkreis).
  Gesucht (rot) ist eine 4. Gerade, die den Kreis berührt derart, daß die 4 Geraden ein STV bilden.
- Welche Gerade?
- Lösungsidee: Spiegeln an der Winkelhalbierenden (SW)

Zwei Strahlen schneiden ...

... einen Kreis $\Longleftrightarrow$ ... zwei parallele Geraden

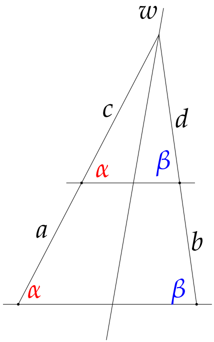
- Spiegeln (SW) an der Winkelhalbierenden w
- Sehnenviereck $\overset{(SW)}{\Longleftrightarrow}$ Trapez



Sekantensatz

$ad = bc$

$\overset{(SW)}{\Longleftrightarrow}$

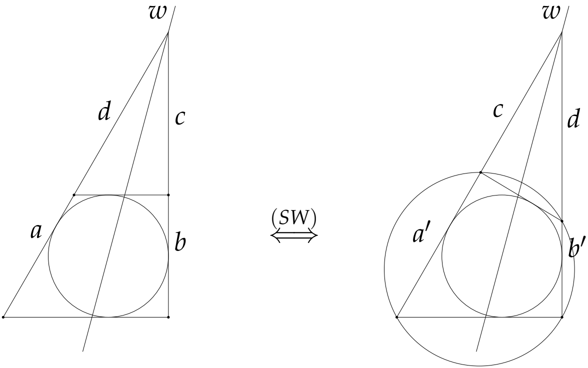


Strahlensatz

$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

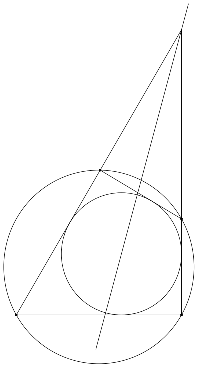
Konstruktion STV aus TV

- Gegeben Trapez mit Inkreis (spezielles Tangentenviereck)
- Spiegeln (SW) an w ergibt Sehnenviereck
- TV-Eigenschaft bleibt erhalten weil:
  $a+b=(a+d)+(b+c)-(d+c)=(a'+c)+(b'+d)-(d+c)=a'+b'$



Lösung der dualen Aufgabe A′

- **Duale Aufgabe A′:**
  Gegeben sind 3 Geraden (Dreieck) und ein Kreis, der alle 3 Geraden berührt (Inkreis).
  Gesucht ist eine 4. Gerade, die den Kreis berührt derart, daß die 4 Geraden ein STV bilden.
- Konstruktion:
  - Gegeben Dreieck mit Inkreis
  - Konstruiere Tangente an Inkreis, parallel zur Grundseite
  - Spiegle (SW) an der Winkelhalbierenden

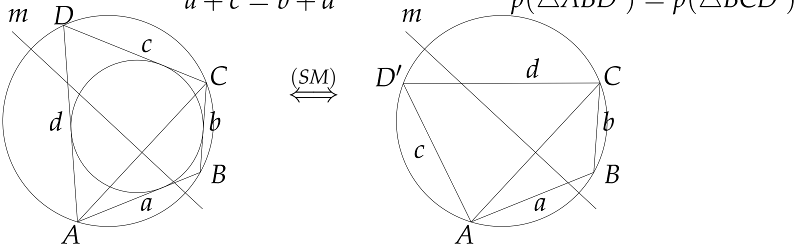


Lösung von Aufgabe A

- Was ist wozu dual?
- Spiegeln (SW) an der Winkelhalbierenden $\Longrightarrow$
- Spiegeln (SM) an der Mittelsenkrechten m
- STV gespiegelt an der Winkelhalbierenden = Trapez
- Was ist ein STV gespiegelt an einer Mittelsenkrechten?

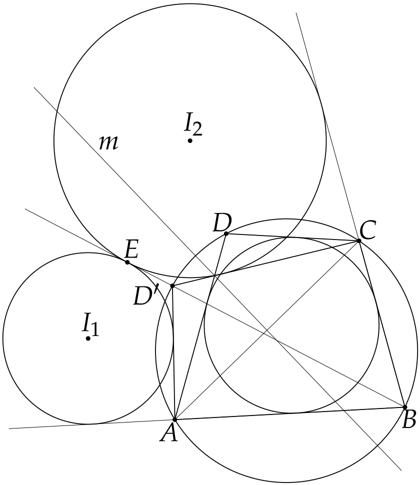
Tangentenviereck
$a + c = b + d$

$??? - viereck$
$p(\triangle ABD') = p(\triangle BCD')$



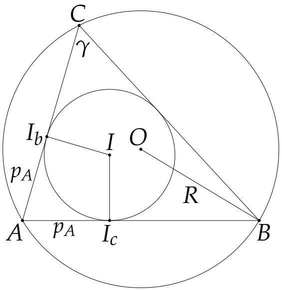
Konstruktion eines STV aus einem SV

- Gesucht: STV $\square ABCD$
- Gespiegelt an der Mittelsenkrechten m: $\square ABCD'$
- Gegeben: $\triangle ABD'$ mit Umkreis
- Gesucht: $\triangle BCD'$ mit gleichem Umkreis, gemeinsamer Seite $\overline{BD'}$ und gleichem Umfang.
- Aufgabe: Konstruktion eines Dreiecks aus R, c, p



Aufgabe im Programmheft

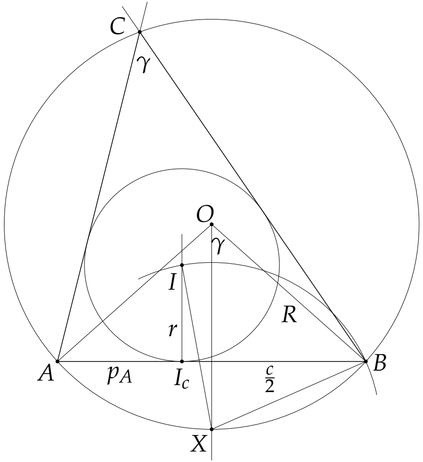
Dreieck aus (R, γ, p_A)
Konstruiere ein Dreieck aus
1) Der Winkel γ am Eckpunkt C.
2) Der Umkreisradius R.
3) Der Abstand p_A zwischen Eckpunkt A und dem Punkt I_b, bei dem der Inkreis des Dreiecks die $\overline{AC}$ berührt.



Aufgabe in der Wurzel (Feb. 2012), Lösung etwa Aug.-Sept.

Konstruktion eines Dreiecks aus R, c und p_a

1. Gleichsch. $\triangle ABO$ aus c und R.
2. Umkreis um O mit Radius R.
3. Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$. X sei Schnittpunkt mit Umkreis.
4. Senkrechte g auf $\overline{AB}$ im Abstand $\overline{AI_c} = p_A$ vom Punkt A.
5. Kreis k um X mit Radius $\overline{XB}$.
6. Schnittpunkt von k und g ist Inkreismittelpunkt I.
7. Inkreis um I mit Radius II_c.
8. Tangenten aus A und B an Inkreis.
9. Schnittpunkt der Tangenten mit Umkreis ist C.



Konstruktion eines Dreiecks aus R, c und p

1. Gleichsch. $\triangle ABO$ aus c und R.
2. Umkreis um O mit Radius R.
3. Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$. X sei Schnittpunkt mit Umkreis.
4. Senkrechte g auf Gerade $\overline{AB}$ im Abstand $\overline{AA_B} = p$ vom Punkt A.
5. Kreis k um X mit Radius $\overline{XB}$.
6. Schnittpunkte von k und g sind Mittelp. der Ankreise I_A und I'_A.
7. Ankreise mit Radien $\overline{I_A A_B}$ und $\overline{I'_A A_B}$.
8. Tangenten von A und B an Ankreise ergeben C und C'. Es entstehen zwei kongruente Dreiecke.