MSG–Kurs 10. Klasse, 2011/2012

*Holger Stephan**, *Berlin*
Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

Inhaltsverzeichnis

*e-mail: `stephan@wias-berlin.de` URL: `http://www.wias-berlin.de/people/stephan/msg.htm`

1 Komplexe Zahlen

Oft werden die komplexen Zahlen folgendermaßen eingeführt (siehe Heuristische Herleitung III): Die Menschen könne viele Gleichungen lösen, aber manche nicht, z.B. nicht die Gleichung $x^2 = -1$. Das ist aber schade, deshalb setzen wir $i = \sqrt{-1}$ und haben damit eine Lösung gefunden.
Aber was soll das. Was hilft es uns weiter, wenn wir einer Größe, die wir uns nicht vorstellen können – eine Zahl, dessen Quadrat -1 ist – einen Namen geben? Etwas Neues setzt sich nur durch, wenn es Sinn hat und gebraucht wird. Deshalb ist es sinnvoll, sich als erstes Probleme anzuschauen, bei denen sich die komplexen Zahlen nahezu von allein aufdrängen.

1.1 Heuristische Herleitung I (Potenzreihen)

Ausgehend von der Summe der geometrischen Folge

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

sieht man, daß man dem Ausdruck

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$$

einen Sinn geben kann, wenn $|x| < 1$. Dann wird nämlich x^n mit wachsendem n immer kleiner und fällt im Unendlichen weg. Wir können als

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \frac{1}{1 - x} \tag{1}$$

schreiben. Tatsächlich könnte man mit dieser Summe auch für spezielles x den Wert $\frac{1}{1-x}$ näherunsweise berechnen. Z.B ist für $x = \frac{1}{10}$ einerseits

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + ... = 1.1111...$$

und andererseits

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9} \approx 1.1111...$$

Für Werte $|x| > 1$ und für $x = \pm 1$ hat die Summe keinen Sinn.
Die linke Seite von (1) heißt die Potenzreihe der Funktion $\frac{1}{1-x}$. Diese Funktion hat für $x = 1$ eine Polstelle (wird unendlich). Deshalb ist es nicht erstaunlich, daß ihre Potenzreihe nur für kleinere Werte konvergiert.
Analog kann man weitere Funktionen in eine Potenzreihe zerlegen. Setzt man in (1) für x die Werte $-x$, x^2 bzw. $-x^2$ ein, erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - +... \\
\frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ... \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - +...
\end{aligned}$$

Alle Potenzreihen haben nur für $|x| < 1$ Sinn. Die ersten beiden Funktionen haben wieder für $|x| = 1$ Polstellen. Bei der letzten Funktion ist nicht klar, warum ihre Potenzreihen nur für $|x| < 1$ Sinn hat, denn x-Werte mit Betrag 1 stellen für die Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ scheinbar nichts besonderes dar.

Auch für Wete $|x| > 1$ erhält man Potenzreihen. Setzt man in (1) für x die Werte $1/x$, $-1/x$, x^{-2} bzw. $-x^{-2}$ ein, erhält man

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} \\
f_2(x) &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - + \ldots = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1} \\
f_3(x) &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-1} \\
f_4(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} - + \ldots = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2+1}
\end{aligned}$$

1.2 Heuristische Herleitung II (Gleichungen 3. Grades)

1.2.1 Allgemeines zur Gleichungstheorie

Kennt man die Nullstellen eines Polynoms, kann man leicht seine Koeffizienten durch Ausmultiplizieren der Linearfaktoren ermitteln. Im Falle von Polynomen 2. und 3. Grades hat man

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \\
P_3(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\
&= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

Das heißt, zwischen den Koeffizienten eines Polynoms und seinen Nullstellen bestehen die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
a &= -(x_1 + x_2) \\
b &= x_1x_2
\end{aligned}$$

für ein Polynom 2. Grades bzw.

$$\begin{aligned}
a &= -(x_1 + x_2 + x_3) \\
b &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\
c &= -x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

für ein Polynom 3. Grades. Diese Zusammenhänge werden Formeln von Vieta genannt.

Quadratische Gleichungen wie etwa $x^2 + ax + b = 0$ werden durch Bildung einer quadratischen Ergänzung gelöst. Tatsächlich wird dabei das Polynom $x^2 + ax + b$ so entlang der x-Achse verschoben, daß eine Parabel, die symmetrisch bezüglich der y-Achse liegt, entsteht. Das heißt, die Gleichung wird in eine Gleichung der Form $x^2 = c$ überführt, die sich leicht lösen läßt.

Dieses Verschieben bedeutet, daß man x in der Form $x = y - h$ einsetzt. Das ergibt

$$x^2 + ax + b = (y - h)^2 + a(y - h) + b = y^2 + (a - 2h)y + b - ah + h^2$$

Das lineare Glied fällt offenbar weg, wenn man $h = a/2$ also $x = y - \frac{a}{2}$ setzt. Nch den Formeln von Vieta bedeutet das, daß man das Polynom so entlang der x-Achse verschoben hat, daß die Summe der Nullstellen gerade 0 ist.
Geanu das kann man für beliebige Polynome erreichen. Dabei wird der Koeffizient vor der zweithöchsten Potenz 0. Im Falle von Polynomen dritten Grades erhält man nach Einsetzen von $x = y - h$

$$\begin{aligned} P_3(y-h) &= (y-h)^3 + a(y-h)^2 + b(y-h) + c = \\ &= y^3 + (a-3h)y^2 + (b - 2ah + 3h^2)y + c - bh + ah^2 - h^3 \end{aligned}$$

Der Koeffizient vor y^2 wird 0, wenn $h = a/3$ gesetzt wird. Dann ist

$$P_3(y - a/3) = y^3 + \frac{3b - a^2}{3} y + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

Im weiteren werden wir stets Gleichungen betrachten, bei denen der Koeffizient vor der zweithöchsten Potenz 0 ist, also z.B. Gleichungen 3. Grades der Form

$$x^3 + bx = c$$

1.2.2 Gleichungen 3. Grades (Lösungsmethode von Cardano)

Wir versuchen, die Gleichung

$$x^3 + bx = c$$

zu lösen. Die Festlegung $c \geq 0$ ist sinnvoll und beschränkt nicht die Allgemeinheit. Denn die gleiche Gleichung mit $-c$ hat die Lösungen $-x$.
Ein Trick besteht darin, x in der Form $x = u - v$ zu suchen, denn es gilt die Identität

$$(u-v)^3 = u^3 - v^3 - 3uv(u-v).$$

Mit $x = u - v$ ist das gerade unsere Gleichung mit

$$\begin{aligned} c &= u^3 - v^3 \\ b &= 3uv \end{aligned}$$

Wenn wir dieses Gleichungssystem bezüglich u und v lösen können, haben wir auch x. Aber dieses nichtlineare Gleichungssystem ist kaum einfacher als die Gleichung selbst. Es läßt sich aber mit der pythagoräischen Formel

$$\left(\frac{u^3 + v^3}{2}\right)^2 = u^3 v^3 + \left(\frac{u^3 - v^3}{2}\right)^2$$

in ein lineares Gleichungssystem umwandeln. Die rechte Seite – und damit auch die linke Seite – läßt sich durch die gegebenen Größen b und c darstellen. Wir setzen

$$\left(\frac{u^3 + v^3}{2}\right)^2 = u^3 v^3 + \left(\frac{u^3 - v^3}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = r^2$$

Das heißt, wir haben das System

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= 2r \\ u^3 - v^3 &= c \end{aligned}$$

zu lösen. Das ist leicht. Es ergibt

$$\begin{aligned} u^3 &= r + \frac{c}{2} \\ v^3 &= r - \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + r} - \sqrt[3]{r - \frac{c}{2}} = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + r} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - r}$$

Diese Formel heißt Cardanosche Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades.
Zusammengefaßt läuft der Lösungsalgorithmus für eine allgemeine Gleichung 3. Grades so:

- Gegeben sei eine allgemeine Gleichung 3. Grades

  $$y^3 + Ay^2 + By + C = 0$$

- Beseitige das quadratische Glied durch die Substitution $y = x - \frac{A}{3}$. Das führt auf eine Gleichung der Form

  $$x^3 + bx = c$$

  wobei sich b und c aus A, B und C bestimmen lassen.
- Bestimme r aus

  $$r^2 = \left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

- Ermittle eine Lösung x_1 aus

  $$x_1 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + r} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - r}$$

- Bestimme eine Lösung y der Ausgangsgleichung durch Rückgängigmachen der Substitution $y_1 = x_1 - \frac{A}{3}$.
- Transformiere die Ausgangsgleichung durch Polynomdivision (Division durch den Term $(y - y_1)$) in eine quadratische Gleichung und löse diese.

1.2.3 Gleichungen 3. Grades mit einer reellen Lösung

Eine gute Methode, einen Algorithmus zu testen, ist es, ihn auf ein Beispiel, dessen Lösung man kennt, anzuwenden. Um die Cardanosche Lösungsformel zu testen, geben wir uns ein Polynom vor, das genau eine reelle Nullstelle hat. Das erhalten wir durch Multiplikation eines linearen Polynoms mit einem quadratischen ohne reelle Nullstellen, also etwa

$$(x - c)(x^2 + 2ax + a^2 + b^2)$$

Das Polynom $x^2+2ax+a^2+b^2$ ist die allgemeine Form eines quadratischen Polynoms ohne reelle Nullstelle für $b^2 >$. Damit nach Ausmultiplizieren der Koeffizient vor dem Term x^2 wegfällt, muß $c = 2a$ gelten. Wir betrachten also

$$P(x) = (x - 2a)(x^2 + 2ax + a^2 + b^2) = x^3 - (3a^2 - b^2)x = 2a(a^2 + b^2)$$

Diese Polynom hat die Form

$$x^3 + Bx = C$$

Jetzt muß aus den Koeffizienten

$$R^2 = \left(\frac{B}{3}\right)^3 + \left(\frac{C}{2}\right)^2$$

bestimmt werden. Um nicht mit unangenehmen Nennern arbeiten zu müssen, setzen wir vorher $b = \sqrt{3}c$ im Polynom. Das führt auf die Gleichung

$$x^3 + 3(c^2 - a^2)x = 2a(a^2 + 3c^2)$$

Damit erhalten wir

$$R^2 = \left(\frac{B}{3}\right)^3 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 = (c^2 - a^2)^3 + [a(a^2 + 3c^2)]^2 = 9a^4c^2 + 6a^2c^4 + c^6 = c^2(3a^2 + c^2)^2$$

und damit $R = c(3a^2 + c^2)$. Das ergibt

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{a(a^2 + 3c^2) + c(3a^2 + c^2)} + \sqrt[3]{a(a^2 + 3c^2) - c(3a^2 + c^2)} = \\ &= \sqrt[3]{(a + c)^3} + \sqrt[3]{(a - c)^3} = (a + c) + (a - c) = 2a \end{aligned}$$

wie erhofft. Die Cardanosche Lösungsformel hat uns also die einzige reelle Lösung geliefert. Die Gleichung hängt zwar von c ab, die Lösung aber nicht.

1.2.4 Gleichungen 3. Grades mit drei reellen Lösungen

Jetzt versuchen wir, eine Gleichung 3. Grades zu lösen, die drei reelle Lösungen hat. Dazu setzen wir im Ausgangspolynom $-b^2$ anstelle von b^2, bzw. $-c^2$ anstelle von c^2. Das heißt, wir wollen die Gleichung

$$x^3 - 3(c^2 + a^2)x = 2a(a^2 - 3c^2)$$

lösen. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{B}{3}\right)^3 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 = -(c^2 + a^2)^3 + [a(a^2 - 3c^2)]^2 = -9a^4c^2 + 6a^2c^4 - c^6 = \\ &= -c^2(3a^2 - c^2)^2 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist stets negativ.
und damit $R = c(3a^2 - c^2)i$. Das ergibt

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{a(a^2 - 3c^2) + c(3a^2 - c^2)i} + \sqrt[3]{a(a^2 - 3c^2) - c(3a^2 - c^2)i} = \\ &= \sqrt[3]{(a + ci)^3} - \sqrt[3]{(a - ci)^3} = (a + ci) + (a - ci) = 2a \end{aligned}$$

wie erhofft.

1.2.5 Gleichungen 3. Grades (Lösungsmethode von Vieta)

Von Vieta stammt die folgende Lösungsmethode. Wir gehen von der Gleichung

$$x^3 + 3bx = 2c$$

aus und setzen

$$x = \frac{b - y^2}{y} \ .$$

Diese raffinierte Substitution führt auf

$$\begin{aligned} 2c &= \left(\frac{b-y^2}{y}\right)^3 + 3b\left(\frac{b-y^2}{y}\right) = \\ &= \frac{b^3 - 3b^2y^2 + 3by^4 - y^6}{y^3} + \frac{3b^2 - 3by^2}{y} = \\ &= \frac{b^3 - 3b^2y^2 + 3by^4 - y^6 + 3b^2y^2 - 3by^4}{y^3} = \frac{b^3 - y^6}{y^3} \end{aligned}$$

also

$$y^6 + 2cy^3 - b^3 = 0$$

Wir setzen $z = y^3$ und erhalten die quadratische Gleichung

$$z^2 + 2cz - b^3 = 0$$

mit den Lösungen

$$z_{12} = -c \pm \sqrt{c^2 + b^3}$$

Die Lösung für y ist dann $y = \sqrt[3]{z}$. Den Wert für x erhält man durch Einsetzen in die Substitution.
Beide Methoden hängen eng miteinander zusammen, denn die Ausdrücke für z sind gerade $z_{12} = -c \pm r$.

1.2.6 Gleichungen 4. Grades

Wir nehmen wieder an, daß in der zu lösenden Gleichung der Koeffizient vor der zweithöchsten Potenz 0 ist. Wir betrachten also die Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \ .$$

Wir versuchen, dieses Polynom in zwei quadratische Faktoren zu zerlegen, d.h. wir suchen Zahlen a, b und c für

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$$

Die Koeffizienten vor x müßen $\pm a$ gewählt werden, damit der Koeffizient vor x^3 verschwindet. Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p &= -a^2 + b + c \\ q &= ac - ab \\ r &= cb \end{aligned}$$

Umgeschrieben ergibt das

$$\begin{aligned} c+b &= a^2+p \\ c-b &= \frac{q}{a} \\ cb &= r \end{aligned}$$

Auf der linken Seite stehen die gesuchten Größen c und b, auf der rechten Seite bekannte Größen und die Unbekannte a. c und b können durch die Identität

$$(c+b)^2 = (c-b)^2 + 4bc$$

eliminiert werden. Das ergibt eine Gleichung für a

$$(a^2+p)^2 = \frac{q^2}{a^2} + 4r$$

Setzen wir jetzt $z = -a^2$ erhalten wir die Gleichung 3. Grades

$$z^3 - 2pz^2 + (p^2-4r)z + q^2 = 0$$

Zusammengefaßt ergibt das folgenden Lösungsalgorithmus für eine allgemeine Gleichung 4. Grades:

- Gegeben sei eine allgemeine Gleichung 4. Grades

  $$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

- Beseitige das quadratische Glied durch die Substitution $y = x - \frac{A}{4}$. Das führt auf eine Gleichung der Form

  $$x^4 + px^2 + qx + r = 0\ .$$

  wobei sich p, q und r aus A, B, C und D bestimmen lassen.
- Löse die Gleichung 3. Grades

  $$z^3 - 2pz^2 + (p^2-4r)z + q^2 = 0$$

- Bestimme a aus $z = a^2$ und berechne c und b aus dem linearen Gleichungssystem

  $$\begin{aligned} c+b &= a^2+p \\ c-b &= q/a \end{aligned}$$

  D.h., berechne $c = \frac{1}{2}(a^2+p+q/a)$ und $d = \frac{1}{2}(a^2+p-q/a)$.
- Löse die beiden quadratischen Gleichungen

  $$\begin{aligned} 0 &= x^2+ax+b \\ 0 &= x^2-ax+c \end{aligned}$$

  Das ergibt x_{1234}.
- Bestimme die Lösungen y_{1234} der Ausgangsgleichung durch Rückgängigmachen der Substitution $y_i = x_i - \frac{A}{4}$.

1.2.7 Eine kombinatorische Erklärung für die Lösbarkeit

Mit der Lösungsmethode für die Gleichung 4. Grades gelang es, sie auf eine Gleichung 3. Grades zurückzuführen. Daß das möglich war, ist erstaunlich. Dahinter verbirgt sich keine Regel. Das war ein Glücksumstand. Um uns das zu erklären, betrachten wir den Zusammenhang zwischen den Lösungen der beiden Gleichungen. Es seien x_i die Lösungen von

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \ .$$

und z_i die Lösungen von

$$z^3 - 2pz^2 + (p^2 - 4r)z + q^2 = 0$$

Nach den Formeln von Vieta gilt

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = x^4 + px^2 + qx + r$$

also

$$\begin{aligned}
0 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
p &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\
-q &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\
r &= x_1x_2x_3x_4
\end{aligned}$$

und

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - 2pz^2 + (p^2 - 4r)z + q^2$$

also

$$\begin{aligned}
2p &= z_1 + z_2 + z_3 \\
p^2 - 4r &= z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 \\
-q^2 &= z_1z_2z_3
\end{aligned}$$

Aus diesem System lassen sich Zusammenhänge zwischen den x_i und z_i finden. Einfacher ist es, zu testen, ob die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
z_1 &= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\
z_2 &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \\
z_3 &= (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)
\end{aligned}$$

richtig sind. Wir setzen sie ins obige Gleichungssystem ein und erhalten

$$\begin{aligned}
2p &\stackrel{?}{=} z_1 + z_2 + z_3 = \\
&= (x_1+x_2)(x_3+x_4) + (x_1+x_3)(x_2+x_4) + (x_1+x_4)(x_2+x_3) = \\
&= 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 2p \\
p^2 - 4r &\stackrel{?}{=} z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \\
&= (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)^2 - 4x_1x_2x_3x_4 + \\
&+ (x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = p^2 - 4r \\
-q^2 &\stackrel{?}{=} z_1z_2z_3 = (x_1+x_2)(x_3+x_4)(x_1+x_3)(x_2+x_4)(x_1+x_4)(x_2+x_3) = \\
&= (x_1+x_2+x_3+x_4) \cdot \\
&\cdot (x_1^2x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4 + 2x_1^2x_2x_3x_4 + 2x_1x_2^2x_3x_4 + \\
&+ x_1^2x_3^2x_4 + 2x_1x_2x_3^2x_4 + x_2^2x_3^2x_4 + x_1^2x_2x_4^2 + x_1x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3x_4^2 + \\
&+ 2x_1x_2x_3x_4^2 + x_2^2x_3x_4^2 + x_1x_3^2x_4^2 + x_2x_3^2x_4^2) - \\
&- (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)^2 = \\
&= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)^2 = -q^2
\end{aligned}$$

Unter Benutzung von $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ erhält man weiter

$$\begin{aligned}
z_1 &= (x_1+x_2)(x_3+x_4) = -(x_1+x_2)^2 = -(x_3+x_4)^2 \\
z_2 &= (x_1+x_3)(x_2+x_4) = -(x_1+x_3)^2 = -(x_2+x_4)^2 \\
z_3 &= (x_1+x_4)(x_2+x_3) = -(x_1+x_4)^2 = -(x_2+x_3)^2
\end{aligned}$$

Damit kann man die x_i aus den z_i bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \pm\sqrt{-z_1} \\
x_1 + x_3 &= \pm\sqrt{-z_2} \\
x_1 + x_4 &= \pm\sqrt{-z_3}
\end{aligned}$$

und damit

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_1 = \pm\sqrt{-z_1} \pm \sqrt{-z_2} \pm \sqrt{-z_3}$$

Es stellt sich heraus, daß die Ausdrücke für die anderen x_i exakt genauso aussehen. Damit erhält man für alle x_i

$$x_i = \frac{\pm\sqrt{-z_1} \pm \sqrt{-z_2} \pm \sqrt{-z_3}}{2}$$

Das sind insgesamt $2^3 = 8$ verschieden Zahlen. Es stellt sich heraus, daß das gerade die acht Zahlen $\pm x_i$ sind. Das heißt, diese 8 Zahlen sind die Lösungen der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
x^4 + px^2 + qx + r &= 0 \\
x^4 + px^2 - qx + r &= 0
\end{aligned}$$

Da in der Hilfsgleichung 3. Grades, der Koeffizient q^2 vorkommt, ist das Vorzeichen von $\pm q$ vergessen worden. Wir lösen also auf einmal zwei Gleichungen 4. Grades.

Man kann die Lösungsmethode also auch so zusammenfassen:

- Ausgehend von der Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \; .$$

- betrachten wir die Gleichung

$$z^3 - 2pz^2 + (p^2 - 4r)z + q^2 = 0$$

- Aus den drei Lösungen z_1, z_2, z_3 dieser Gleichung bilden wir 8 Zahlen

$$\frac{\pm\sqrt{-z_1} \pm \sqrt{-z_2} \pm \sqrt{-z_3}}{2}$$

- und suchen die 4 richtigen Lösungen durch Probe heraus.

1.2.8 Eine numerische Lösung von Gleichungen 3. Grades

Versucht man, den Sinus des Dreifachen eines Winkels durch den Sinus des Winkels darzustellen, erhält man aus den Additionstheoremen leicht die Formel

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Setzt man $x = \sin\alpha$, gibt das die Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sin 3\alpha = 0$$

Ist $q = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$ gegeben, läßt sich α und damit x leicht als

$$x = \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(4q)\right)$$

bestimmen. Damit haben wir die Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4}x + q = 0$$

gelöst. Wir berechnen den Winkel φ, für den der Sinus gerade $4q$ ist, dividieren ihn durch 3 und berechnen den Sinus davon. Ist $4q < 1$, erhalten wir auf diese Weise drei relle Lösungen:

$$x_1 = \sin\frac{1}{3}\varphi,\;\; x_2 = \sin\frac{1}{3}(\varphi + 2\pi),\;\; x_3 = \sin\frac{1}{3}(\varphi + 4\pi)$$

Der Fall der allgemeinen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ läßt sich durch eine Transformation $x = ay$ auf diesen Fall zurückführen.

1.2.9 Geometrische Konstruktion der Lösungen von Gleichungen 3. und 4. Grades

Wie wir wissen, läßt sich die Lösung einer Gleichung 3. oder 4. Grades nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. Mit einem weiteren Hilfsmittel – ähnlich wie bei der Winkeldrittelungsmethode von Archimedes – ist das aber möglich. Als weiteres Hilfsmittel brauchen wir dazu die Schablone einer gewöhnlichen Parabel, d.h. das Bild der Funktion $y = x^2$.
Die im weiteren vorgestellte Konstruktionsmethode stammt von Descartes.
Wir betrachten die Gleichung

$$x^4 = px^2 + qx + r$$

und setzen $x^2 = y$. Das ergibt

$$y^2 - py - qx = r$$

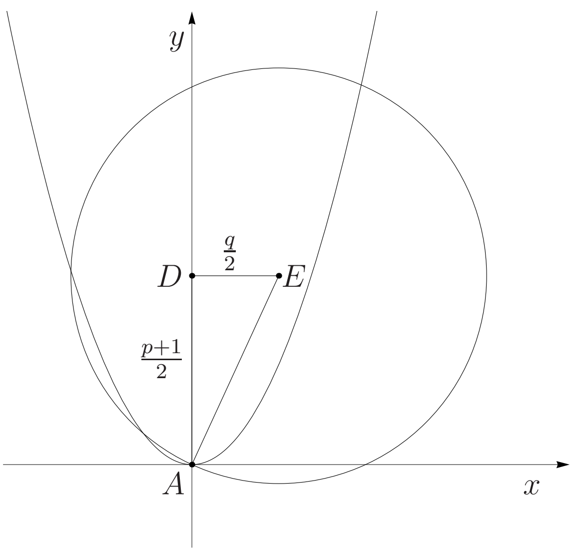
Die Lösung der Ausgangsgleichung ist also die x-Koordinate der gemeinsamen Schnittpunkte der Kurven beider Gleichungen. Da wir nur Geraden und Kreise konstruieren können, machen wir aus der zweiten Gleichung eine Kreisgleichung indem wir $x^2 - y$ addieren (was ja 0 ist). Das ergibt mit quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned} y^2 - (p+1)y + x^2 - qx &= r \\ \left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{q}{2}\right)^2 &= r + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

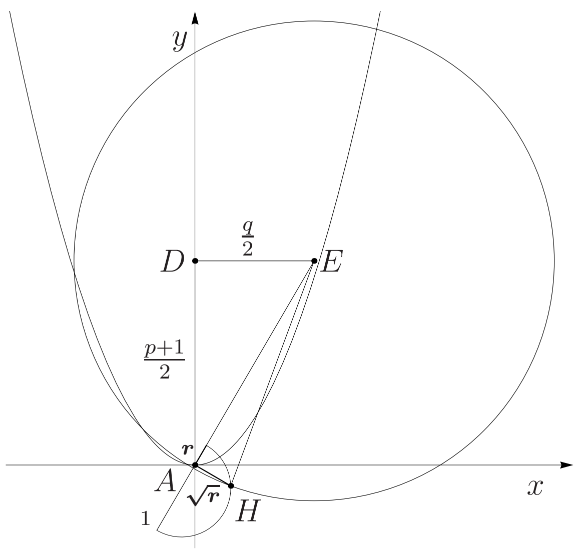
Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Zentrum im Punkt $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q}{2}\right)$ und dem Radius

$$R = \sqrt{r + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

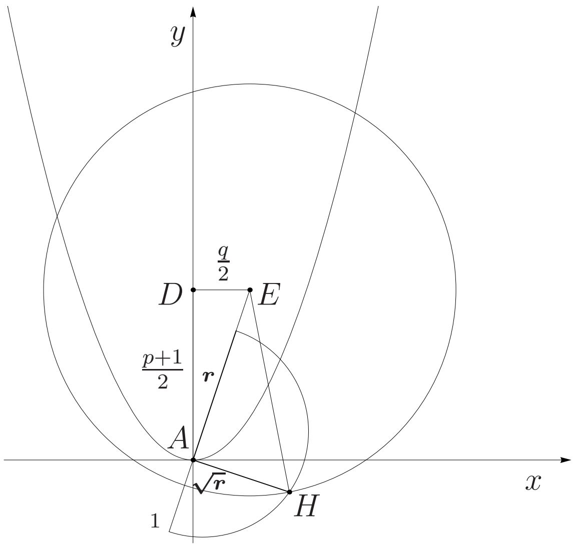
Wir unterscheiden jetzt 3 Fälle: $r = 0$, $r > 0$ und $r < 0$.



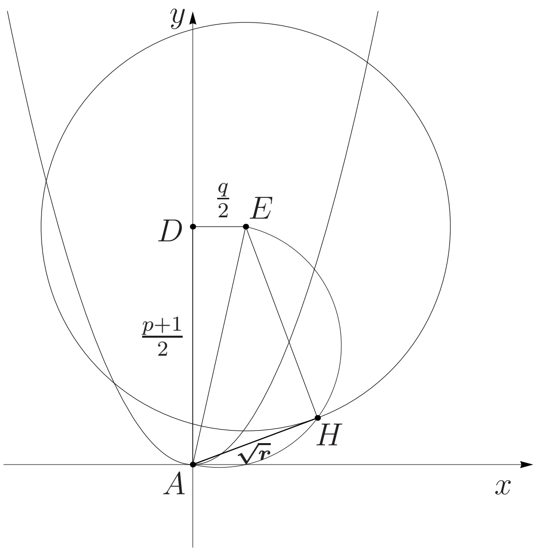
1) Der Fall $r = 0$ entspricht einer Gleichung dritten Grades.



2) Der Fall $r > 0$ mit vier reellen Lösungen (kleines r).



2) Der Fall $r > 0$ mit zwei reellen Lösungen (großes r).



3) Der Fall $r < 0$ mit vier reellen Lösungen (kleines r).

1.2.10 Kann man Gleichungen 5. (oder höheren) Grades lösen?

Als erstes ist zu klären, was wir unter Lösbarkeit verstehen wollen. Sicher kann man viele Gleichungen numerisch lösen, z.B. durch wiederholtes Einsetzen von geratenen Größen oder durch Intervallschachtelung.
Wir sagen, daß wie eine Gleichung explizit lösen können, wenn es eine endliche Folge von Schritten gibt, bei der Zwischenergebnisse nur durch das Ziehen von Wurzeln gebildet werden. Also etwa Ausdrücke der Form

$$x = \sqrt[5]{a^2 + b + \sqrt[4]{c^3 + d} + \sqrt[4]{e + f^6} + \sqrt[6]{g + \sqrt[3]{h}}} + ...$$

wobei $a, b, c, d, e, f, g, h, ...$ die Koeffizienten der Gleichung sind.
Man kann nun zeigen, daß die Lösungen der Gleichung

$$x^5 - x + a = 0$$

nicht in so einer Form dargestellt werden können.
Das gleiche gilt für allgemeine Gleichungen noch höheren Grades.
Natürlich gibt es Gleichungen, wie z.B. $x^7 = 1$, die sich explizit lösen lassen. Aber im allgemeinen sind die Grade 1, 2, 3, 4 die einzigen.

1.2.11 Zusammenhang: Gleichung 3. und 4. Grades I

Wir betrachten eine Gleichung 4. Grades mit den Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b\,\mathrm{i} \\ x_2 &= a - b\,\mathrm{i} \\ x_3 &= -a + c\,\mathrm{i} \\ x_4 &= -a - c\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Das entsprechende Polynom zu diesen Nullstellen ist

$$\begin{aligned} P_4(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = \\ &= (x - a - b\,\mathrm{i})(x - a + b\,\mathrm{i})(x + a - c\,\mathrm{i})(x + a + c\,\mathrm{i}) = \\ &= x^4 + (b^2 + c^2 - 2a^2)x^2 + 2a(b^2 - c^2)x + (a^2 + b^2)(a^2 + c^2) \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} p &= b^2 + c^2 - 2a^2 \\ q &= 2a(b^2 - c^2) \\ r &= (a^2 + b^2)(a^2 + c^2) \end{aligned}$$

Das ensprechende Polynom 3. Grades hat die Koeffizienten

$$\begin{aligned} 2p &= 2b^2 + 2c^2 - 4a^2 \\ p^2 - 4r &= -8a^2b^2 + b^4 - 8a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4 \\ q^2 &= 4a^2(b + c)^2(b - c)^2 \end{aligned}$$

Es hat also die Form

$$\begin{aligned} P_3(z) &= z^3 - 2pz^2 + (p^2 - 4r)z + q^2 = \\ &= z^3 + (4a^2 - 2b^2 - 2c^2)z^2 + \big((b + c)^2(b - c)^2 - 8a^2(b^2 + c^2)\big)z + 4a^2(b - c)^2(b + c)^2 \end{aligned}$$

und die Nullstellen

$$\begin{aligned} z_1 &= -4a^2 \\ z_2 &= (b + c)^2 \\ z_3 &= (b - c)^2 \end{aligned}$$

Hat die Gleichung 4. Grades zwei paare konjugiert komplexer Nullstellen, dann hat die entsprechende Gleichung 3. Grades drei reelle Nullstellen.

1.2.12 Zusammenhang: Gleichung 3. und 4. Grades II

Wir betrachten ein Polynom 3. Grades mit den Nullstellen $-a^2$, $-b^2$ und $-c^2$, also

$$\begin{aligned} P_3(z) &= (z+a^2)(z+b^2)(z+c^2) = \\ &= z^3 + (a^2+b^2+c^2)z^2 + (a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2)z + a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

und suchen das dazugehörende Polynom 4. Grades. Es ist

$$\begin{aligned} -2p &= a^2+b^2+c^2 \\ p^2-4r &= a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2 \\ q^2 &= a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \\ q &= \pm abc \\ r &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2 - (a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2)\right) = \\ &= \frac{1}{16}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2) \end{aligned}$$

und damit

$$P_4(x) = x^4 - \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)x^2 + abcx + \frac{1}{16}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2)$$

Die Lösungen dieses Polynoms sind

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}(a+b+c) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(-a+b+c) \\ x_3 &= \frac{1}{2}(a-b+c) \\ x_4 &= \frac{1}{2}(a+b-c) \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung mit dem Term $-abcx$ sind entsprechend $-x_i$.
Die Aufgabe hat einen interessanten geometrischen Hintergrund: Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, dann sind die (negativen) Lösungen der Gleichung 3. Grades die Quadrate über den Seiten und die Lösungen der Gleichung 4. Grades der (negative) halbe Umfang p und die durch den Inkreis gebildeten Abschnitte p_A, p_B und p_C auf den Seiten. Der Summe der Lösungen (die ist 0) entspricht die Gleichung $p = p_A + p_B + p_C$.

1.3 Heuristische Herleitung III

Häufig kam es in der Geschichte vor, daß die Menschen, insbesondere die Mathematiker, mit ihren Zahlen unzufrieden waren, weil sich bestimmte Gleichungen nicht lösen ließen. Schon Kinder in der ersten Klasse ärgern sich, wenn sie hinter die Aufgabe $1-2=$ n.l. (nicht lösbar) schreiben müssen, vor allem, wenn ihnen ältere Geschwister die Lösung verraten haben.
Die Menschen hatten keine älteren Geschwister, die ihnen den Zahlenraum erweiterten. Sie mußten von selbst darauf kommen. Historisch gesehen war die erste Erweiterung der schon immer existierenden natürlichen Zahlen die positiven gebrochenen Zahlen. Sie wurden eingeführt, weil die Menschen die Gleichung

$$a \cdot x = b \tag{2}$$

mit gegebenen natürlichen Zahlen a und b auch dann lösen wollten, wenn a kein Teiler von b war. Die Einführung der gebrochenen Zahlen war insofern eine Erweiterung, als daß alle Rechengesetze erhalten blieben und Gleichung (2) auch noch lösbar war, wenn a und b gebrochene Zahlen waren.
Der nächste Schritt war die Einführung der negativen Zahlen (und der Null), weil man gern die Gleichung $a+x=b$ mit beliebigen gegebenen gebrochenen Zahlen a und b lösen wollte.
Heute kommen Kinder in der Schule mit negativen Zahlen meistens besser klar (die könnte man tatsächlich bereits in der ersten Klasse einführen) als mit gebrochenen Zahlen. Das ist merkwürdig, weil historisch erst die gebrochenen Zahlen eingeführt wurden. Gebrochene Zahlen werden seit der Antike verwendet, wogegen sogar die Null erst im Mittelalter in Europa eingeführt wurde. Noch im 18. Jahrhundert hatten selbst berühmte Mathematiker Verständnisprobleme mit den negativen Zahlen.
Der Wunsch, Gleichungen der Art $x^2=a$ zu lösen, auch wenn a keine Quadratzahl ist oder – geometrisch gesprochen – die Tatsache, daß die Diagonale eines Quadrats eine tatsächliche Länge hat, auch wenn sie keine gebrochene Zahl ist, hat zur Einführung der irrationalen Zahlen geführt. Auch jetzt, trotz der Kenntnis der reellen Zahlen, können wir viele Gleichungen nicht lösen, z.B.

$$\begin{aligned}
2^x &= 3 \qquad (x = 1.5849625...) \qquad &(3)\\
x^3-3x+1 &= 0 \qquad (x_{123} = 1.53209...,\ 0.347296...,\ -1.87939...) \qquad &(4)\\
5\cos x &= 1 \qquad (x = \pm 1.36944... + 2k\pi) \qquad &(5)\\
0\cdot x &= 2 \qquad &(6)\\
\cos x &= 2 \qquad (x = \pm -1.31696...\,\mathrm{i} + 2k\pi) \qquad &(7)\\
x^2+1 &= 0 \qquad (x = \pm\,\mathrm{i}) \qquad &(8)
\end{aligned}$$

Die Gründe, warum wir diese Gleichungen nicht lösen können, sind verschieden. Die Gleichungen (3) und (5) können wir nicht lösen, weil wir die Umkehrfunktionen der Potenzfunktion und der cos-Funktion noch nicht kennen. Diese Gleichungen haben aber – genau wie Gleichung (4) – reelle Lösungen, wie man sich durch Zeichnen der Graphen der entsprechenden Funktionen verdeutlichen kann. Wir wissen nur (noch) nicht, wie wir diese Lösungen finden können. Dagegen kann man sich graphisch klarmachen, daß die Gleichungen (6), (7) und (8) keine reellen Lösungen haben. Durch Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen kann man Zahlen definieren (die komplexen Zahlen), die die Gleichungen (7) und (8) lösen. Dagegen gibt es keine Zahlen – gleichgültig, wie wir den Bereich der reellen Zahlen erweitern – die Gleichung (6) lösen könnten. Eine Besonderheit stellt Gleichung (4) dar. Sie hat zwar drei reelle Lösungen, diese lassen sich aber nur mit Hilfe der komplexen Zahlen finden.

Wir führen die komplexen Zahlen ein, indem wir Gleichung (8) formal lösen:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}$$

Sicher ist $\sqrt{-1}$ keine reelle Zahl. Wir würden aber gern Gleichung (8) nicht nur formal durch ein Symbol lösen, sondern wir würden $\sqrt{-1}$ auch gern so behandeln wie eine Zahl. Diese Zahl nennen wir $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Dann gilt $\mathrm{i}^2 = -1$ und nach den Potenzgesetzen (die – wie wir hoffen, und wie sich bestätigen wird – gelten) auch $(-\mathrm{i})^2 = ((-1)\cdot \mathrm{i})^2 = (-1)^2 \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1$. Die Lösungen von Gleichung (8) sind also $x_{12} = \pm\,\mathrm{i}$.
Jetzt können wir uns an die nächste Gleichung wagen:

$$x^2 + b^2 = 0\ .$$

Formal aufgelöst folgt (wir rechnen wieder mit $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ wie mit einer Zahl)

$$x = \pm\sqrt{-b^2} = \pm\sqrt{(-1)\cdot b^2} = \pm b\sqrt{-1} = \pm b\,\mathrm{i}$$

Auch die Gleichung

$$(x-a)^2 + b^2 = 0$$

läßt sich so lösen: $x = a \pm b\,\mathrm{i}$.
Tatsächlich lassen sich auf diese Weise alle quadratischen Gleichungen der Form $x^2+px+q=0$ mit reellen Koeffizienten p und q lösen. Es gilt

$$x_{12} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls} \quad p^2 > 4q \\ -\frac{p}{2} & \text{falls} \quad p^2 = 4q \\ -\frac{p}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} & \text{falls} \quad p^2 < 4q \end{cases}$$

Man könnte also Zahlen der Form $a + b\,\mathrm{i}$ einführen, wobei a und b reelle Zahlen und i eine besondere Zahl mit der Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$ ist. Solche Zahlen nennt man komplexe Zahlen. Als nächstes muß festgelegt werden, wie man mit solchen Zahlen rechnet. Die Regeln für die Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen lassen sich nicht im mathematisch strengen Sinne herleiten. Man muß sie definieren. Dabei sollten diese Definitionen so geschickt gewählt werden, daß sie eine nützliche und brauchbare Erweiterung der reellen Zahlen sind. Daß heißt, diese neuen Zahlen sollten die reellen Zahlen als Teilmenge enthalten und die selben Rechengesetze erfüllen.
Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z_1 = a + b\,\mathrm{i}$ und $z_2 = c + d\,\mathrm{i}$ wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) = (a+c) + (b+d)\,\mathrm{i} \\ z_1 \cdot z_2 &= (a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

1.4 Zahlenbereichserweiterung durch Paarbildung

Die übliche Methode, einen Zahlenbereich zu erweitern, besteht darin, die neuen Zahlen als geordnete Paare der alten, bekannten Zahlen zu definieren. Auch wenn das so wörtlich im Unterricht nicht vollzogen wurde (beim Einführen der gebrochenen oder negativen Zahlen), steckt im Wesen so eine Paarbildung dahinter.
Die gebrochenen Zahlen kann man etwa so einführen: Eine gebrochene Zahl p ist ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen $p = (a, b)$. In dieser Menge (dem Kreuzprodukt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) sind zwei binäre Operationen (Addition und Multiplikation) definiert. Es sei $p_1 = (a, b)$ und $p_2 = (c, d)$. Dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= (ad + bc, bd) \\ p_1 \cdot p_2 &= (ac, bd) \end{aligned}$$

Die natürliche Zahl n wird durch das Paar $(n, 1)$ dargestellt. Die Darstellung der gebrochenen Zahlen durch Paare natürlicher Zahlen ist nicht eindeutig. Zwei gebrochene Zahlen (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn $ad = bc$ gilt.
Die Multiplikation ist umkehrbar. Lösung x der Gleichung $a \cdot x = b$ ist $x = (b, a)$, denn es gilt

$$a \cdot x = (a, 1) \cdot (b, a) = (ab, a) = (b, 1) = b$$

Die vorletzte Gleichheit gilt, weil $ab \cdot 1 = a \cdot b$ ist.
Als Schreibweise hat sich $(a, b) = \frac{a}{b}$ durchgesetzt.

Die negativen Zahlen kann man etwa so einführen: Eine negative Zahl p ist ein geordnetes Paar positiver Zahlen $p = (a, b)$. In dieser Menge (dem Kreuzprodukt $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$) sind zwei binäre Operationen (Addition und Multiplikation) definiert. Es sei $p_1 = (a, b)$ und $p_2 = (c, d)$. Dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\ p_1 \cdot p_2 &= (a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Die positive Zahl x wird durch das Paar $(x, 0)$ dargestellt. Die Darstellung der negativen Zahlen durch Paare positiver Zahlen ist nicht eindeutig. Zwei negative Zahlen (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn $a + d = b + c$ gilt.
Die Addition ist umkehrbar. Lösung x der Gleichung $a + x = b$ ist $x = (b, a)$, denn es gilt

$$a + x = (a, 0) + (b, a) = (a + b, a) = (b, 0) = b$$

Die vorletzte Gleichheit gilt, weil $(a + b) + 0 = a + b$ ist.
Als Schreibweise für die negative Zahl $(0, b)$ hat sich $(0, b) = -b$ durchgesetzt.

1.5 Definition der komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist ein geordnetes Paar reeller Zahlen $z = (a, b)$. In dieser Menge (dem Kreuzprodukt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) sind zwei binäre Operationen (Addition und Multiplikation) definiert. Es sei $z_1 = (a, b)$ und $z_2 = (c, d)$. Dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c, b + d) \\ z_1 \cdot z_2 &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

In $z = (a, b)$ heißt $a = \Re\mathrm{e}\, z$ Realteil und $b = \Im\mathrm{m}\, z$ Imaginärteil von z. Die reelle Zahl x wird durch das Paar $(x, 0)$ dargestellt. Reelle Zahlen sind also die komplexen Zahlen, deren Imaginärteil 0 ist, sie sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen.
Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sie sowohl im Real- als auch im Imaginärteil übereinstimmen.

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

Hierin unterscheidet sich die Zahlenbereichserweiterung durch Paarbildung von der für gebrochene oder negative Zahlen. Die Definition der komplexen Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen ist eindeutig.
Tatsächlich erfüllt diese Definition alle gewohnten Rechenregeln (Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und Distributivgesetz). Sie entspricht auch der heuristischen Definition der Zahl i, denn es gilt nach den Rechenregeln

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1$$

Es ist also sinnvollerweise $(0, 1) = \mathrm{i}$ zu setzen.
Das neutrale Element der Addition – die Null – ist $(0, 0) = 0$, wegen

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$$

Die Summe zweier komplexer Zahlen kann reell sein, wenn sich die beiden Imaginärteile zu 0 ergänzen. Es gilt

$$(a, b) + (c, -b) = (a + c, 0)$$

Die komplexe Zahl $(a, -b)$ heißt konjugiert komplexe Zahl zur Zahl $z = (a, b)$ und wird durch $\overline{z} = (a, -b)$ bezeichnet.
Das neutrale Element der Multiplikation – die Eins – ist $(1, 0) = 1$, wegen

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$$

Auch das Produkt zweier komplexer Zahlen kann reell sein, nämlich wenn $ad + bc = 0$ ist. Insbesondere ist das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexe Zahl eine positive reelle Zahl:

$$(a, b) \cdot (a, -b) = (a \cdot a - b \cdot (-b), a \cdot (-b) + a \cdot b) = (a^2 + b^2, 0) = a^2 + b^2$$

Die Addition ist umkehrbar. Lösung w der Gleichung $z_1 + w = z_2$ ist offensichtlich $w = (c - a, d - b)$, denn es gilt $z_1 + w = (a, b) + (c - a, d - b) = (c, d) = z_2$.
Auch die Multiplikation ist umkehrbar. Das ist allerdings nicht so offensichtlich. Lösung w der Gleichung $z_1 \cdot w = z_2$ ist $w = \left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)$, denn es gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot w &= (a, b) \cdot \left(\frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}\right) = \\ &= \left(\frac{a(ac + bd) - b(ad - bc)}{a^2 + b^2}, \frac{a(ad - bc) + b(ac + bd)}{a^2 + b^2}\right) = \\ &= \left(\frac{c(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}, \frac{d(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}\right) = (c, d) = z_2 \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man sofort, daß die Division durch eine komplexe Zahl (a, b) genau dann nicht möglich ist, wenn $a^2 + b^2 = 0$, das ist nur für 0 der Fall. Das heißt, außer der 0 gibt es unter den komplexen Zahlen keine Nullteiler.
Eine praktische Darstellung des Paares (a, b) ist $(a, b) = a + b\,\mathrm{i}$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$. Mit $a + b\,\mathrm{i}$ kann man wie mit einer Summe rechnen, muß aber berücksichtigen, daß i keine Variable ist, für die man Werte einsetzen kann, sondern eine Konstante und daß sich diese Summe nie zusammenfassen läßt.
Mit dieser Darstellung läßt sich die komplizierte Formel für den Quotienten zweier komplexer Zahlen leicht herleiten.
Lösung w der Gleichung $z_1 \cdot w = z_2$ ist formal $w = \frac{z_2}{z_1} = \frac{c+d\,\mathrm{i}}{a+b\,\mathrm{i}}$. Um diesen Ausdruck wieder in die Form $\Re\mathrm{e} + \Im\mathrm{m}\ \mathrm{i}$ zu bringen, muß man den Nenner reell machen. Das erreicht man, indem man den Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert. Das ergibt

$$w = \frac{z_2}{z_1} = \frac{c + d\,\mathrm{i}}{a + b\,\mathrm{i}} = \frac{(c + d\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i})}{(a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i})} = \frac{(ac - bd) + (ad - bc)\,\mathrm{i}}{a^2 + b^2} = \frac{ac - bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad + bc}{a^2 + b^2}\,\mathrm{i}$$

1.6 Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen

Es ist natürlich, sich eine komplexe Zahl $z = x + y\,\mathrm{i}$, das heißt, ein Paar reeller Zahlen (x, y) als Punkt in einem zweidimensionalen, rechwinkligen und reellen Koordinatensystem vorzustellen. Der Realteil x bildet die x-Achse, der Imaginärteil y die y-Achse. Die reellen Zahlen sind dann Punkte auf der x-Achse (der reellen Achse), reine imaginäre Zahlen sind Punkte auf der y-Achse (der imaginären Achse). Die durch beide Achsen aufgespannte Ebene wird Gaußsche Zahlenebene genannt.

1.6.1 Addition zweier komplexer Zahlen

Die Addition zweier reeller Zahlen läßt sich leicht auf dem Zahlenstrahl geometrisch als das Hintereinanderabtragen von Strecken darstellen.
Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht der Addition zweier Punkte oder Vektoren.
— — — Bild — — —

1.6.2 Darstellung einer komplexen Zahl mit Polarkoordinaten

Einem Punkt auf der Gaußsche Zahlenebene kann man eineindeutig ein Paar (a, b) zuordnen. Diese Darstellung nennt man kartesische Koordinaten. Insbesondere ist für jedes Paar klar, welcher Punkt gemeint ist. Es gibt aber noch andere Möglichkeiten einen Punkt zu definieren. Z.B. ist der Punkt eindeutig bestimmt, wenn der Abstand r zum 0-Punkt und der Winkel φ, den diese Strecke mit der reellen Achse einschließt bekannt sind. Diese Darstellung nennt man Polarkoordinaten. Sie ist nicht eineindeutig, denn jedem Paar $(r, \varphi) = (0, \varphi)$ entspricht der Punkt $(0, 0)$.
Sind der Betrag der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ und der Winkel (genannt Argument) gegeben, so lassen sich real- und Imaginärteil leicht durch

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

bestimmen. Umgekehrt, kann man diese Gleichungssystem bezüglich r und φ lösen. Es gilt

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Mit diesen Formeln kann man kartesische in Polarkoordinaten umrechnen und umgekehrt. Viele Taschenrechner haben diese Funktion.

1.6.3 Multiplikation zweier komplexer Zahlen

Die Multiplikation zweier reeller Zahlen läßt sich nicht so leicht geometrisch veranschaulichen, wie man vielleicht denken könnte, weil man in der Schule gelernt hat, daß man die Multiplikation auf die Addition zurückführen kann. Das gilt aber nur für natürliche Zahlen.
Es sei

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ z_2 &= r_2(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) = \\ &= r_1 r_2\Big((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + \mathrm{i}(\cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi)\Big) = \\ &= r_1 r_2\Big(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)\Big) \end{aligned}$$

1.6.4 Die Eulersche Formel

Man erkennt, daß die Funktion

$$f(\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

die Eigenschaft

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

hat. Man kann beweisen, daß es nur eine Sorte von sinnvollen Funktionen gibt, die diese Funktionalgleichung erfüllen. Das ist die Potenzfunktion. Es gilt also

$$f(x) = a^x$$

mit einem gewissen a. Dieses a läßt sich berechnen. Es ist klar, daß a nicht reell sein kann, da für reelle x a^x komplex sein muß. Es ist $a = 0.540302... + 0.841471...\,\mathrm{i}$. Interessanterweise

$$a = 0.540302... + 0.841471...\,\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}}$$

$$\begin{aligned} \Re\mathrm{e}\ a &= \frac{1}{0!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + ... \approx 0.5403023058681397174009366074429766037323 \\ \Im\mathrm{m}\ a &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + ... \approx 0.8414709848078965066525023216302989996226 \\ e &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \approx 2.7182818284590452353602874713526624977572 \end{aligned}$$

Damit haben wir drei Darstellungen von komplexen Zahlen, die algebraische, die trigonometrische und die exponentielle Form:

$$z = a + b\,\mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = re^{\mathrm{i}\varphi}$$

Für $r = 1$ und $\varphi = \pi$ erhält man die berühmte Eulersche Formel

$$e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0\ ,$$

die die fünf wichtigsten mathematischen Konstanten 0, 1, i, e und π miteinander verbindet.

1.6.5 Die Moivresche Formel

Aus

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

folgt

$$e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

Diese Formel führt das Potenzieren komplexer Zahlen auf das Multiplizieren des Argumentes und wird Moivresche Formel genannt.

1.6.6 Der Einheitskreis

Die Beträge zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich wie reelle Zahlen. Das neue an der Multiplikation komplexer Zahlen ist, daß sie sich auf die Addition der Argumente zurückführen läßt. Interessiert man sich nur für dieses Problem, ist es sinnvoll Zahlen mit dem Betrag 1 zu betrachten. Unter reellen Zahlen gibt es nur zwei solche, komplexe dagegen unendlich viele. Diese Zahlen liegen alle auf einem Kreis – dem Einheitskreis. Diese Zahlen lassen sich durch den Parameter φ parametrisieren

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi \ .$$

Durchläuft φ eine Periode, so umrundet z einmal den Einheitskreis.

1.6.7 Die Einheitswurzeln

1.6.8 Lösung geometrischer Aufgaben mit komplexen Zahlen

Da man sich komplexe Zahlen als Punkte der Ebene vorstellen kann, kann man viele geometrische Aufgaben auf algebraische Zusammenhänge von komplexen Zahlen zurückführen.
Aufgabe:
Beweise mit Hilfe komplexer Zahlen, daß im Parallelogramm die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen ist!
Lösung:
Das Parallelogramm sei so in die komplexe Ebene gelegt, daß eine Ecke im Nullpunkt liegt und die beiden anliegenden Ecken den Zahlen z_1 und z_2 entsprechen. Die gegenüberliegende Ecke entspricht dann der Zahl $z_1 + z_2$. Die Behauptung ist dann äquivalent zu der Identität

$$2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \ .$$

Setzt man $z_j = a_j + ib_j$, folgt diese Identität aus der leicht zu überprüfenden Identität

$$2(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2) = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 \ .$$

Aufgabe:
Beweise mit Hilfe komplexer Zahlen den **Satz des Ptolemäus:**
Im Sehnenviereck ist das Produkt der Längen der Diagonalen gleich der Summe aus den Produkten der Längen gegenüberliegender Seiten.
Lösung: Wir betrachten ein beliebiges Viereck im Einheitskreis (das schränkt die Allgemeinheit nicht ein). Die 4 Eckpunkte seien im positiven Drehsinn z_1, z_2, z_3 und z_4, wobei z_1 der erste

Punkt nach -1 sein soll (aus Symmetriegründen ist es zweckmäßiger vier beliebige Punkte zu nehmen als etwas $z_4 = 1$ festzulegen). Ein Punkt auf dem Einheitskreis läßt sich eindeutig durch eine gebrochen lineare Funktion darstellen:

$$z_j = \frac{1 + \mathrm{i}\, t_j}{1 - \mathrm{i}\, t_j}$$

mit $t_j \in (-\infty, \infty)$ (o.B.d.A. sei $z_j \neq -1$). Dann gilt $-\infty < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \infty$. Es seien $a = |z_1 - z_2|$, $b = |z_2 - z_3|$, $c = |z_3 - z_4|$ und $d = |z_4 - z_1|$ die Seitenlängen und $e = |z_1 - z_3|$ und $f = |z_2 - z_4|$ die Längen der Diagonalen, dann gilt

$$\begin{aligned}
ac + bd - ef &= \left|\frac{1+\mathrm{i}\,t_1}{1-\mathrm{i}\,t_1} - \frac{1+\mathrm{i}\,t_2}{1-\mathrm{i}\,t_2}\right| \left|\frac{1+\mathrm{i}\,t_3}{1-\mathrm{i}\,t_3} - \frac{1+\mathrm{i}\,t_4}{1-\mathrm{i}\,t_4}\right| + \\
&+ \left|\frac{1+\mathrm{i}\,t_2}{1-\mathrm{i}\,t_2} - \frac{1+\mathrm{i}\,t_3}{1-\mathrm{i}\,t_3}\right| \left|\frac{1+\mathrm{i}\,t_4}{1-\mathrm{i}\,t_4} - \frac{1+\mathrm{i}\,t_1}{1-\mathrm{i}\,t_1}\right| - \\
&- \left|\frac{1+\mathrm{i}\,t_1}{1-\mathrm{i}\,t_1} - \frac{1+\mathrm{i}\,t_3}{1-\mathrm{i}\,t_3}\right| \left|\frac{1+\mathrm{i}\,t_2}{1-\mathrm{i}\,t_2} - \frac{1+\mathrm{i}\,t_4}{1-\mathrm{i}\,t_4}\right| = \\
&= \left|\frac{2\mathrm{i}\,(t_1 - t_2)}{(1-\mathrm{i}\,t_1)(1-\mathrm{i}\,t_2)}\right| \left|\frac{2\mathrm{i}\,(t_3 - t_4)}{(1-\mathrm{i}\,t_3)(1-\mathrm{i}\,t_4)}\right| + \\
&+ \left|\frac{2\mathrm{i}\,(t_2 - t_3)}{(1-\mathrm{i}\,t_2)(1-\mathrm{i}\,t_3)}\right| \left|\frac{2\mathrm{i}\,(t_4 - t_1)}{(1-\mathrm{i}\,t_4)(1-\mathrm{i}\,t_1)}\right| - \\
&- \left|\frac{2\mathrm{i}\,(t_1 - t_3)}{(1-\mathrm{i}\,t_1)(1-\mathrm{i}\,t_3)}\right| \left|\frac{2\mathrm{i}\,(t_2 - t_4)}{(1-\mathrm{i}\,t_2)(1-\mathrm{i}\,t_4)}\right| = \\
&= 4\,\frac{|t_1 - t_2||t_3 - t_4| + |t_2 - t_3||t_4 - t_1| - |t_1 - t_3||t_2 - t_4|}{|(1-\mathrm{i}\,t_1)(1-\mathrm{i}\,t_2)(1-\mathrm{i}\,t_3)(1-\mathrm{i}\,t_4)|}
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Reihenfolge der Punkte, gilt $t_1 \geq t_2 \geq t_2 \geq t_4$ und damit ist der Zähler

$$(t_1 - t_2)(t_3 - t_4) + (t_2 - t_3)(t_1 - t_4) - (t_1 - t_3)(t_2 - t_4) = 0$$