

Chaos und ŠARKOVSKIĬs Anordnung der natürlichen Zahlen

Alexander Mielke

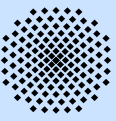
IADM (Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung)
Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, 70569 Stuttgart

www.mathematik.uni-stuttgart.de/~mielke

J. Fourier [Theorie der Wärmeleitung 1807]

Ein gründliches Studium der Natur ist die fruchtbarste Quelle für mathematische Entdeckungen.

5. Tagung
Forum zur Begabtenförderung in Mathematik
3.–5. April 2003, Universität Stuttgart



Inhalt

0. Modellierung komplexen Systemsverhaltens

Einfache Modelle für Chaos und Periodizität

1. Der Zwischenwertsatz

Existenz von Fixpunkten für Intervallabbildungen

2. Periodische Dynamik durch Intervallabbildungen

Orbits und minimale Perioden

3. Überdeckungsgraphen periodischer Orbits

Symbolische Dynamik und Überdeckungsmatrizen

4. Existenz vieler periodischer Orbits

Satz von Šarkovskii [1964]

5. Chaotische Dynamik

Zufälliges Verhalten in deterministischen Systemen

6. Chaos im LORENZ-Attraktor

Schmetterlingsmodell und Schmetterlingseffekt

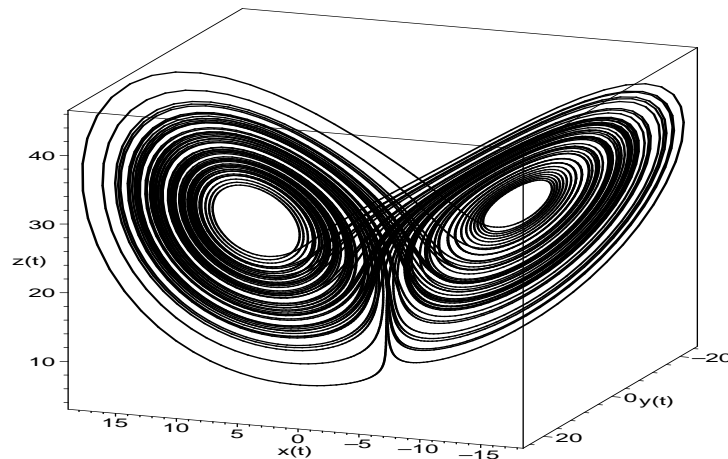


0. Modellierung komplexen Systemsverhaltens

Einfache Modelle erzeugen kompliziertes Verhalten

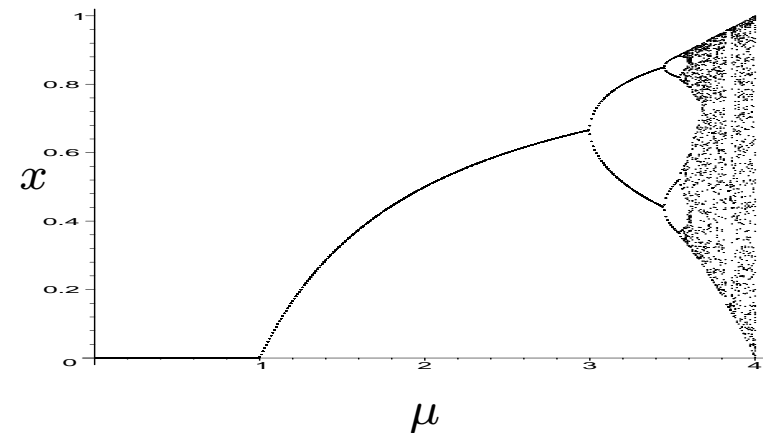
LORENZ-Attraktor [1963] ($r \approx 28$)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10(y-x) \\ r x - y - xz \\ -8z/3 + xy \end{pmatrix}$$



Logistische Abbildung

$$x \mapsto f_\mu(x) = \mu x (1-x)$$



*Kann das komplexe Verhalten auch **einfach** gezeigt/verstanden werden?*

Existenzbeweis für Chaos!

Zur Geschichte:

■ HENRI POINCARÉ 1854–1912

Preisaufgabe: **Ist das Sonnensystem stabil?**

von KÖNIG OSKAR II von S & N anlässlich seines 60. Geb. am 21.01.1889

Erste falsche Aussage: kein “Chaos”, alles stabil.

Korrigierte Aussage: doch “Chaos”, Stabilität unklar.



■ STEPHEN SMALE *1930

erste Chaos-Beweise 1963–67.

SMALE's 14. Problem (1990):

Ist der LORENZ-Attraktor chaotisch?



■ LI & YORKE [1975] Periode 3 impliziert Chaos.
(Ein elementarer Zugang zu Chaos in Intervallabbildungen!)

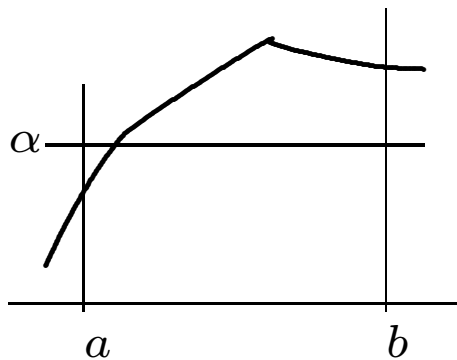
■ W. TUCKER [2002]

A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem.

J. Found. Comput. Math. 2 (2002) 53–117.

1. Der Zwischenwertsatz

ZWS Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert α zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

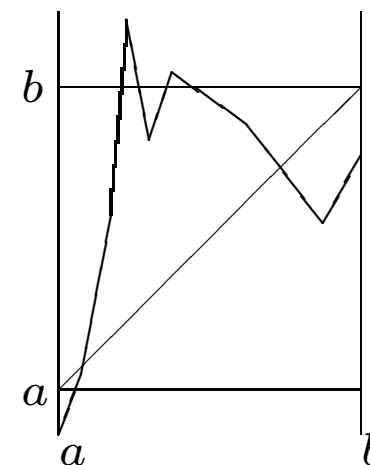


Dies ist ein *Existenzsatz*!!

Folgerung: Jede stetige Intervallabbildung $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ besitzt mindestens einen Fixpunkt ξ , d.h., $f(\xi) = \xi$.

Unsere Existenztheorie für periodisches Verhalten und Chaos für Intervallabbildungen basiert *nur* auf folgender Verallgemeinerung:

Satz: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und überdeckt f das Intervall $[a, b]$ (d.h., $[a, b] \subset f([a, b])$), dann existiert ein Fixpunkt $\xi = f(\xi)$.



2. Periodische Dynamik durch Intervallabbildungen

Deterministische Dynamik durch $f : I \rightarrow I$:

$$x_0 \xrightarrow{f} x_1 = f(x_0) \xrightarrow{f} x_2 = f(x_1) \xrightarrow{f} x_3 = f(x_2)$$

$n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ist die diskrete Zeit.

Allgemeine Notation:

$$x_n = f^n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n\text{-fach Iterierte}}(x_0).$$

Dynamisches Verhalten:

qualitatives Verhalten der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$
für $n \rightarrow \infty$.

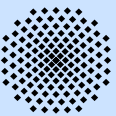
- Konvergenz (Einpendeln auf Gleichgewicht)
- periodisches Verhalten
- quasiperiodisch
- kompliziertes Verhalten, Chaos

Definitionen:

- $x \in I$ heißt **periodischer Punkt**, falls $f^m(x) = x$.
- x hat die **minimale Periode** k , falls $f^k(x) = x$ und $f^n(x) \neq x$ für $n = 1, \dots, k-1$.
- $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)\} \subset I$ heißt **Orbit mit Periode** k .

Frage: *Wie finden wir periodische Orbits?*

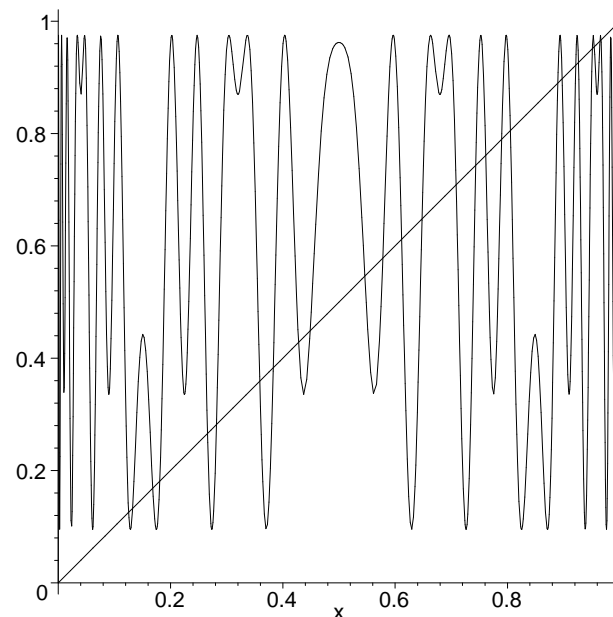
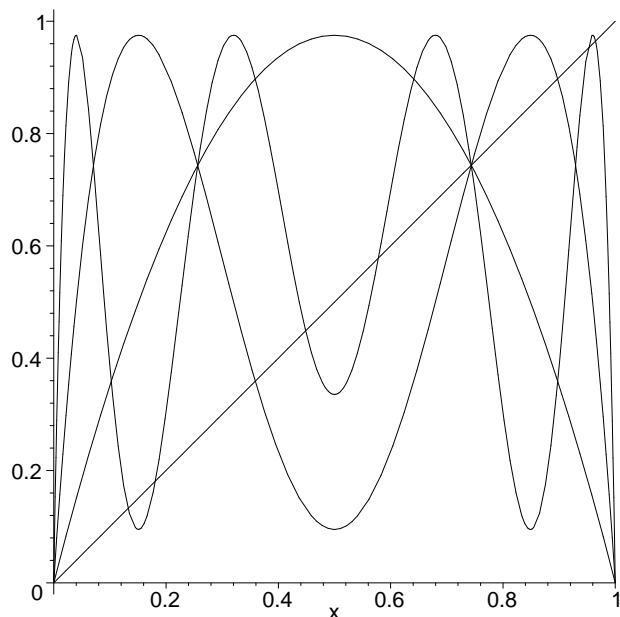
- Fixpunkte von $f^m = (f \circ \dots \circ f)$ haben Periode m .
- Problem:
Die minimale Periode kann $k = 1$ sein.
- Hat f^m mehr Fixpunkte als f ?



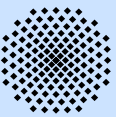
Beispiel

$$f(x) = 3.9 x(1-x)$$

Iterierte f^m für $m = 1, 2, 3$ und 6:



Iterationszahl m	1	2	3	6
Anzahl der Fixpunkte von f^m	2	4	8	28
Orbits mit minimaler Periode m	2	1	2	3



3. Überdeckungsgraphen periodischer Orbits

Es habe $f : I \rightarrow I$ einen periodischen Orbit mit minimaler Periode k :

$$\{x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}$$

wobei $a \leq y_0 < y_1 < \dots < y_{k-1} \leq b$ und $y_j = x_{\Pi(j)}$ gelte.

Dabei ist $\Pi : \{0, 1, \dots, k-1\} \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ eine Permutation, die wichtige Informationen über die Funktion f enthält.

Gibt es zwangsläufig weitere periodische Orbits?

Zerlege $[y_0, y_{k-1}]$ in die $k-1$ Teilintervalle

$$I_1 = [y_0, y_1], \quad I_2 = [y_1, y_2], \quad \dots, \quad I_{k-1} = [y_{k-2}, y_{k-1}].$$

Durch f überdeckt jedes I_j mindestens eines der Teilintervalle, d.h., $f(I_j) \supset I_k$.

[Beachte dazu $f(y_j) = y_r$, $f(y_{j-1}) = y_s$ und den ZWS!]

Überdeckungsgraph:

Ecken I_1, \dots, I_{k-1}
 gerichtete Kanten: $I_j \rightarrow I_k$, falls $f(I_j) \supset I_k$.

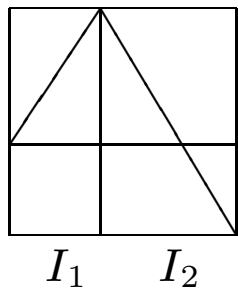
Überdeckungsmatrix:

$A[f] \in \mathbb{N}_0^{(k-1) \times (k-1)}$ mit
 $A[f]_{k,j} = \text{Anzahl der Überdeckungen von } I_k \text{ durch } I_j$.

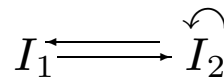
Beispiele:

Periode-3-Orbit:

$x_0=y_0 < x_1=y_1 < x_2=y_2$

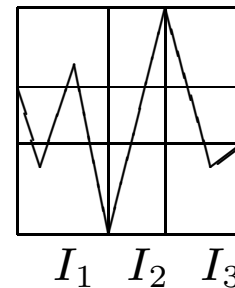


$$A[f] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

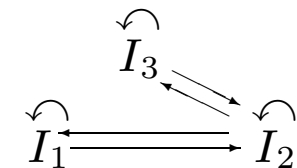


Periode-4-Orbit:

$x_0=y_0 < x_3=y_1 < x_1=y_2 < x_2=y_3$



$$A[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



\rightsquigarrow **symbolische Dynamik** auf Graphen:

- endlich viele Punkte anstelle von $x \in [a, b]$
- Verzweigungen bei Wahlmöglichkeit

\rightsquigarrow

Kombinatorik

4. Existenz vieler periodischer Orbits



Aleksandr N. Šarkovskii (*1936 Kiew):

Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself (russian). *Ukrain. Math. Zeits.* 16 (1964) 61–71.

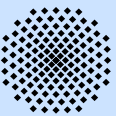
[seit 1961 zirka 155 Veröffentlichungen in mathematischen Zeitschriften]

Beobachtungen:

- Zu jedem erlaubten Pfad $I_{j_0} \rightarrow I_{j_1} \rightarrow \dots \rightarrow I_{j_n}$ im Überdeckungsgraphen gibt es wenigstens ein $x_0 \in I_{j_0}$, so dass $f^m(x_0) \in I_{j_m}$ für $m = 1, \dots, n$ gilt.
[Tatsächlich sind es mehrere Teilintervalle von I_{j_0} .]
- Zu jedem geschlossenen Pfad (d.h. $I_{j_n} = I_{j_0}$) gibt es wenigstens ein $x_0 \in I_{j_0}$, so dass $f^n(x_0) = x_0$.

Einfacher Beweis per Induktion und ZWS:

Für $0 \leq m < k \leq n$ überdeckt I_{j_m} mittels f^{k-m} das Intervall I_{j_k} .



Viele Kanten im Überdeckungsgraphen \rightsquigarrow viele Wahlmöglichkeiten \rightsquigarrow komplizierte Dynamik

Viele periodische Pfade \rightsquigarrow viele periodische Punkte

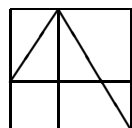
Aus obigen Beobachtungen ergeben sich mittels der Überdeckungsmatrix folgende quantitative Ergebnisse:

Lemma (Pfade der Länge m): Es gilt elementweise $A[f^m] \geq (A[f])^m$ (Matrizenpotenz).

Satz (periodische Punkte): Die Anzahl der Punkte $x \in [y_0, y_{k-1}]$ mit Periode k lässt sich nach unten abschätzen durch

$$\text{Spur}(A[f]^m) = (A[f]^m)_{1,1} + (A[f]^m)_{2,2} + \dots + (A[f]^m)_{k-1,k-1}.$$

Obiger Periode-3-Orbit



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Periode k	1	2	3	4	5	6	7	8	k
Anzahl period. Punkte	1	3	4	7	11	18	29	47	$F_{k-1} + F_{k+1}$
Anzahl period. Orbits	1	1	1	1	2	2	4	5	...

Fibonacci-Zahlen $(F_k)_{k=0,1,\dots}$: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Lustige Konsequenz: p prim teilt $F_{p-1} + F_{p+1} - 1$.

Šarkovskiĭs Anordnung von \mathbb{N}

- Šarkovskiĭs Theorie verwendet nur obige elementare Ideen.
- *minimale* Periode eines Orbits ist $k \implies$
der Überdeckungsgraph muss bestimmte Kanten haben.
[aufwändige Kombinatorik, aber elementar]

Mittels des Symbols \triangleleft führen wir folgende *Totalordnung* auf $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ein:

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft \dots \triangleleft 2^p \triangleleft 2^{p+1} \triangleleft \dots \triangleleft 2^{q+1} \cdot 7 \triangleleft 2^{q+1} \cdot 5 \triangleleft 2^{q+1} \cdot 3 \triangleleft \dots \\ \dots \triangleleft 2^q \cdot 7 \triangleleft 2^q \cdot 5 \triangleleft 2^q \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 9 \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3,$$

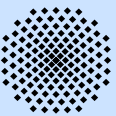
d.h., $n=2^p(2k+1) \triangleleft m=2^q(2l+1)$, falls gilt:
($k=0$ und [$l>0$ oder $p<q$]) oder ($k>0$ und [$k>l>0$ oder $p>q$]).

Satz* von ŠARKOVSKIĀ [1964]: Hat eine beliebige stetige Intervallabbildung f einen Orbit der Periode m , dann hat f für jedes n mit $n \triangleleft m$ auch einen Orbit der Periode n .

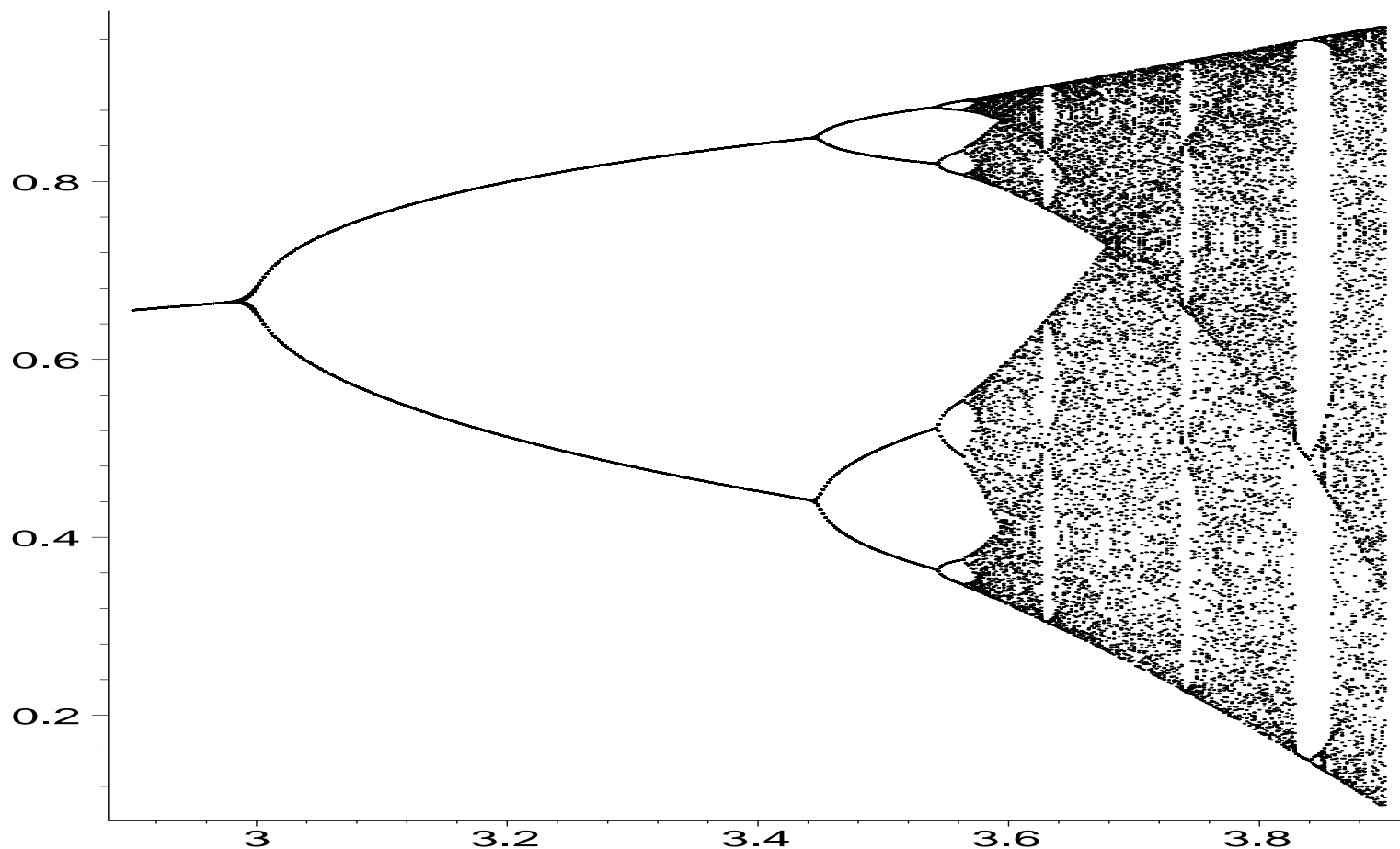
Insbesondere impliziert jede Periode mit einem ungeraden Teiler, dass unendlich viele weitere periodische Orbits existieren.

* Ein vollständiger, lesbarer Beweis findet sich in:

L. Bloch, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, L.S. Young: Periodic points and topological entropy in one-dimensional maps.
In "Global Theory of Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics Vol. 819, Springer-Verlag 1980", pp. 18–34.



Logistische Abbildung



Periode	1	2	4	8	...	10	6	...	7	5	3
$\mu >$	0	3	3.45	3.55	...	3.61	3.63	...	3.69	3.73	3.83

5. Chaotische Dynamik

Dynamisches System: **Determinismus** = Zukunft (im Prinzip) vorausberechenbar

Chaos: Alles (??) kann passieren!

Kein Widerspruch:

- Das zeitliche Verhalten hängt von der Anfangsbedingung ab.
- Wir warten *extrem* lange Zeit.

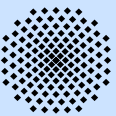
↔ Kleine Wirkung kann *langfristig* große Wirkung haben (Schmetterlingseffekt).

Viele Definitionen von Chaos sind möglich!

In diesem Vortrag:

Chaos = so kompliziert wie unendlichfaches, zufälliges Werfen einer Münze
(nicht vorherberechenbar)

Determinismus \longleftrightarrow ^{???} **Zufall**

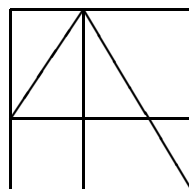


Periode 3 impliziert Chaos

T. LI & J. YORKE: Period three implies chaos.

Amer. Math. Monthly **82** (1975) 985–992.

(für gute Schüler lesbar!)



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_1 \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{f} I_1$$

Satz:

Die stetige Abbildung $f : I \rightarrow I$ habe einen periodischen Orbit mit minimaler Periode 3. Dann gibt es zu jeder Symbolfolge (j_0, j_1, j_2, \dots) mit Symbolen $j_n \in \{1, 2\}$, für die nach jeder 1 eine 2 folgt, ein $x_0 \in I = [y_0, y_2]$, so dass stets $x_n = f^n(x_0) \in I_{j_n}$ gilt.

[Beweis: Pfade der Länge N ; Grenzwert $N \rightarrow \infty \rightsquigarrow$ Häufungspunkt, Folgenstetigkeit.]

Jede Münzwurffolge ist realisierbar:

Ersetzungen: W(appen) \rightsquigarrow "1,2" Z(ahl) \rightsquigarrow "2"

Beispiel: Münzwürfe W , W , Z , W , Z , Z , Z , W , Z , W , W , ...

Pfad im ÜG 1,2 , 1,2 , 2 , 1,2 , 2 , 2 , 2 , 1,2 , 2 , 1,2 , 1,2 , ...

Allgemeiner: Jede Periode außer 2^k impliziert Chaos!

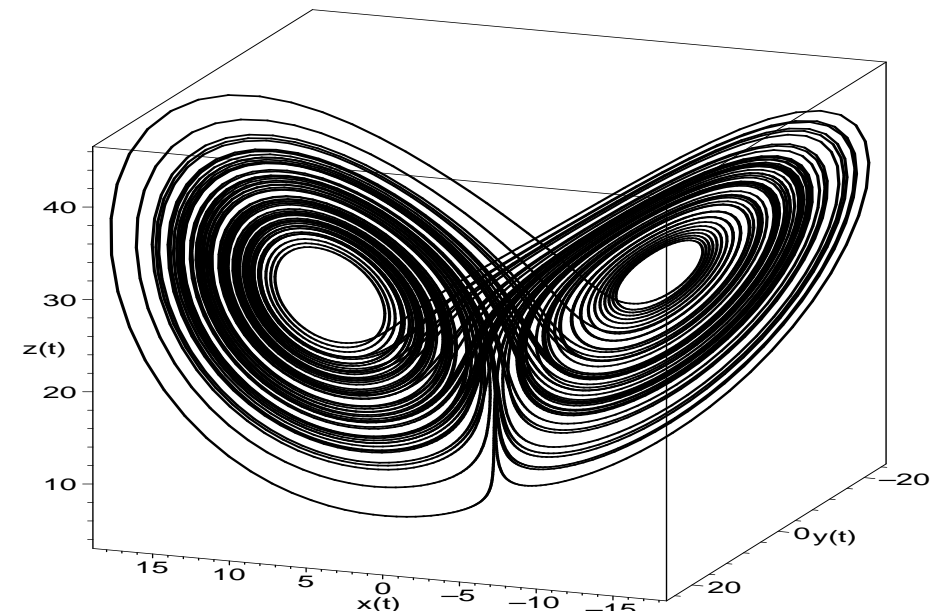
6. Chaos im LORENZ–Attraktor



EDWARD N. LORENZ (*1917 Connecticut, USA)

Meteorologe am Massachusetts Institute of Technology
PhD 1948, Professor 1956, Emeritus 1987.

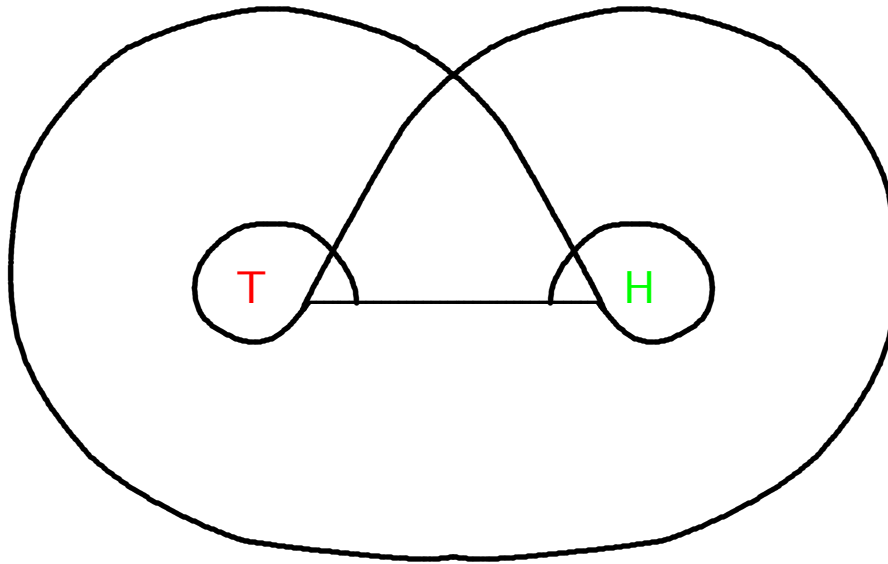
- Deterministic non-periodic flow. *Journal of Atmospheric Science* **20** (1963) 130–141.
- Vortrag 1979: “Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?”
- *The Essence of Chaos*. University of Washington Press, 1996.



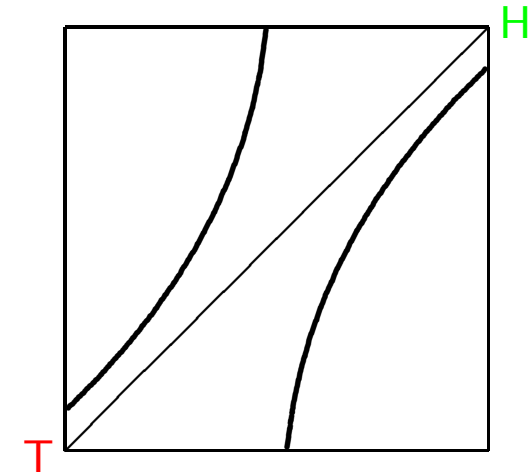
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10(y-x) \\ r x - y - xz \\ -8z/3 + xy \end{pmatrix}$$

LORENZ–Gleichungen [1963]

Das Schmetterlingsmodell



Ein $(2+\varepsilon)$ -dimensionales Modell
geklebte (verzweigte) 2-dimensionale Fläche



Intervallabbildung
unstetig

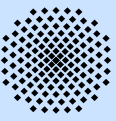
Für das reduzierte Modell folgt Chaos und die Existenz vieler (instabiler) periodischer Orbits.

Für die LORENZ-Gleichung ist das VIEL schwerer:

WARWICK TUCKER PhD 1998 (Uppsala): *The Lorenz attractor exists.*

Engültig akzeptiert wurde der Beweis erst 2002!!

Computer-unterstützter Beweis: viel Theorie und
numerische Rechnung mit exakter Fehlerabschätzung.



Schmetterlingsmodell des LORENZ-Attraktors
Kleben und Kreisen

