Angewandte Analysis

Lehrstuhl 1: Angewandte Analysis

Mathematisches Institut A, Universität Stuttgart

Mitglieder:

Prof.Dr. Alexander Mielke, Prof.em. Klaus Kirchgässner, Stefanie Siegert, Dr. Bernd Götz, Dr. Mark D. Groves, Dr. Florian Theil (derzeit Oxford University), Andreas Mainik.

Arbeitsgebiete:

- Partielle Differentialgleichungen, Anwendungen der Funktionalanalysis, Variationsrechnung
- Dynamische Systeme, Verzweigungstheorie, Hamiltonsche Systeme
- Strukturbildung in ausgedehnten Systemen: Dynamik und Stabilität von Wellen, Pulsen und Fronten
- Kontinuumsmechanik: Nichtlineare Elastizitätstheorie, Plastizität, Phasentransformationen
- Strömungsmechanik: Wasserwellen, Navier–Stokes–Gleichung

Einführendes zur Angewandten Analysis

Die Angewandte Analysis beschäftigt sich mit Fragen der Modellierung von Phänomenen in den Natur– und Ingenieurswissenschaften. Dabei zeigt sich, dass gerade dort spannende Mathematik entsteht, wo auch fundamentale Probleme der Nachbardisziplinen auftreten. Zum Beispiel hat J. Fourier die Theorie der Fourier–Reihen entwickelt, um die von ihm aufgestellte Wärmeleitungsgleichung lösen zu können.

> L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.
>
> *J.B.J. Fourier (1768–1830)*
> in "Théorie analytique de la chaleur"

Im Jahre 1944 hat der Mathematiker und theoretische Physiker Synge beklagt, dass das Zusammenspiel zwischen Mathematik und ihren Anwendungen wesentlich schlechter ist als in den vorigen Jahrhunderten.

> Nature will throw out mighty problems, but they will never reach the mathematician. He will sit in his ivory tower waiting for the enemy with an arsenal of strong weapons, but the enemy will never come to him. Nature does not offer her problems ready formulated. They must be dug up by pick and shovel, and he who will not soil his hands will never see them.
>
> *J.L. Synge (1897–1995)*

Angewandte Analysis ist das Bindeglied zwischen Modellbildung in den Nachbarwissenschaften, den theoretischen und den computergestützten Bereichen der Mathematik. Es werden fundamentale Fragen zu Modellgleichungen und ihrer Herleitung untersucht:

- Welche Phänomene kann eine gewisse Klasse von Gleichungen beschreiben?
- Wie ist das Problem zu modifizieren, um neue Effekte zu bekommen?
- Welche Vernachlässigungen sind erlaubt, ohne dass die Essenz verloren geht?
- Ist das Problem wohlgestellt und numerisch lösbar?

Wir wollen dieses Zusammenspiel von Mathematik und Anwendungen exemplarisch an zwei konkreten Beispielen darstellen, die mit der Arbeit an diesem Lehrstuhl eng verbunden sind. Es ist einerseits die Theorie der Wasserwellen und andrerseits die Modellierung elastischer Materialien, wie etwa Formgedächtnislegierungen.

Wasserwellen

Die Theorie der Wasserwellen dient als Paradigma für die Vorgehensweise der Angewandten Analysis. Es wird versucht, ein beobachtetes natürliches Phänomen durch Mathematik zu beschreiben und dadurch zu verstehen. Im Folgenden wird eine besondere Art von Wasserwellen behandelt, deren Entdeckung und Erforschung Ingenieure und Mathematiker über hundert Jahre lang gereizt hat. Das ist die sogenannte Solitärwelle, die im Jahre 1834 zum ersten Mal an einem Kanal zwischen Edinburgh und Glasgow vom britischen Wissenschaftler Scott Russell beobachtet wurde. Scott Russell hat diesen Bericht über seine Entdeckung geschrieben:

> I happened to be engaged in observing the motion of a vessel at a high velocity, when it was suddenly stopped, and a violent and tumultuous agitation among the little undulations which the vessel had formed around it attracted my notice. The water in various masses was observed gathering in a heap of a well-defined form around the centre of the length of the vessel. This accumulated mass, raising at last to a pointed crest, began to rush forward with considerable velocity towards the prow of the boat, and then passed away before it altogether, and, retaining its form, appeared to roll forward alone along the surface of the quiescent fluid, a large, solitary, progressive wave. I immediately left the vessel, and attempted to follow this wave on foot, but finding its motion too rapid, I got instantly on horseback and overtook it in a few minutes, when I found it pursuing its solitary path with a uniform velocity along the surface of the fluid. After having followed it for more than a mile, I found it subside gradually, until at length it was lost among the windings of the channel.

In Scott Russels Bericht sind die zwei grundlegende Themen der Angewandten Analysis zu erkennen:

(i) *Existenz:* Entdeckung ein neues Phänomen, in diesem Fall die Solitärwelle.

(ii) *Stabilität:* Das Phänomen lässt sich nicht leicht zerstören. Scott Russell schriebt, wie die Welle lange Zeit beobachtbar war.

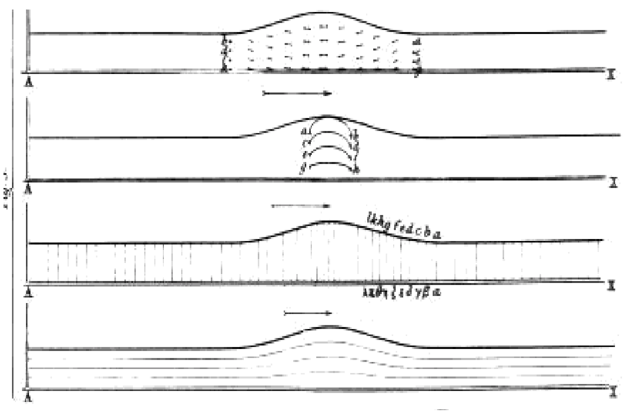

Abbildung 1: Die von Scott Russell gezeichneten Skizzen der Solitärwelle

Die Solĭtarwelle löste eine hitzige Debatte in den mathematischen Kreisen des neunzehnten Jahrhunderts aus. Führende Wissenschaftler wie Sir George Stokes (1819–1903) und G. Airy (1801–1892) setzten sich mit der Solitärwelle auseinander; aber konnten keine mathematische Theorie entwickeln, die ihr Verhalten adequat beschreibt. Der Durchbruch kam im Jahr 1895 in Form eines Artikels von D.J. Korteweg und G. de Vries. Er enthielt zum ersten Mal eine Gleichung, für die eine Lösung *existiert* (siehe (i)), die das Verhalten der Solitärwelle beschreibt. Die *Stabilität* (siehe (ii)) dieser Solitärwelle wurde erst 1972 von T.B. Benjamin gezeigt. Die Gleichung wird heute meist KdV–Gleichung genannt und ist durch ihre vollständige Integrabilität berühmt. Die nichtlineare Interaktion von Zwei–Solitonlösungen sind im Lehrstuhllogo (siehe ganz oben) angedeutet.

Die KdV–Gleichung wird als *Modellgleichung* bezeichnet. Solch eine Gleichung wird hergeleitet, indem nur die wichtigsten physikalischen Effekte mathematisch modelliert werden. Dagegen wurden schon im achtzehnten Jahrhundert allgemeinere Gleichungen von L. Euler (Abbildung 2) aufgeschrieben, die alle mit Wasserwellen in Zusammenhang stehenden Effekte beschreiben. Es dauerte fast zweihundert Jahre, bis gezeigt werden konnte, dass auch die Euler–Gleichungen Solitärwellenlösungen besitzen. Diese Aufgabe wurde von K.O. Friedrichs und D. Hyers im Jahre 1954 unter der Vorraussetzung gelöst, dass keine Oberflächenspannung wirkt.

Im Jahre 1982 entwickelte K. Kirchgässner eine Reduktionsmethode für elliptische Systeme, die es erlaubt, die Lösungen durch niedrigdimensionale gewöhnliche Differentialgleichungen zu klassifizieren. Dadurch erschloss sich ein neuer Zugang zur Theorie der Wasserwellen, mit dem insbesondere auch Solitärwellen in Flüssigkeiten mit Oberflächenspannung gezeigt werden konnten. G. Iooos und K. Kirchgässner (1990) fanden *modulierte Solitärwellen* (Abb. 3 oben). Diese Welle ist ein *Wellenpaket*, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ohne seine Form zu verändern. Aufbauend auf dieses Ergebnis zeigten B. Buffoni und M.D. Groves (1999), dass Solitärwellen aus beliebig vielen Wellenpaketen und sogar räumlich chaotische Lösungen existieren (Abbildung 3 unten).

Abbildung 2: Leonhard Euler (1707–1783)

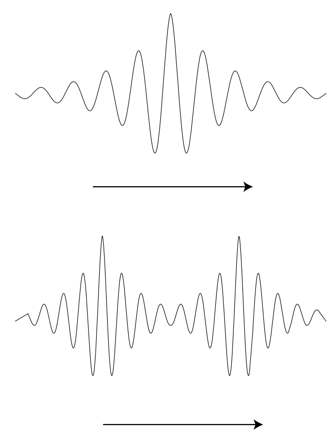

Abbildung 3: Eine modulierte Solitärwelle (oben) und eine modulierte Zwei–Puls–Solitärwelle (unten)

In letzter Zeit konzentrierte sich die Forschung am Lehrstuhl auf Wasserwellen, die auch Struktur quer zur Bewegungsrichtung aufweisen. Diese Frage ist von großem praktischen Interesse, da in der Natur fast alle Oberflächenwellen zweidimensionale Strukturen zeigen. Es mussten dazu völlig neue mathematische Techniken entwickelt werden; das erste vorliegende Ergebnis ist die Welle in Abb. 4, deren Existenz für die Euler–Gleichung von M.D. Groves und A. Mielke bewiesen wurde. Weitere geplante Untersuchungen betreffen z.B. die Frage der Symmetriebrechung, d.h. wie Solitärwellen eine Struktur in der Querrichtung entwickeln, und die der Interaktion zweier aus verschiedenen Richtungen kommenden Solitärwellen (Abb. 5).

Die oben skizzierten Ergebnisse zielen auf die erste Frage der Angewandten Mathematik ab, nämlich die Existenz von Wellen (siehe (i)). Die zweite Frage, nämlich die der Stabilität von Wellen (siehe (ii)), ist zur Zeit noch völlig offen. Nur im Falle der periodischen Stokes–Wellen mit kleiner Amplitude konnten T.J. Bridges und A. Mielke ein Teilergebnis erzielen. Dies zeigt, wie die schon vor zweihundert Jahren von Euler aufgeschriebenen Gleichungen noch heu-

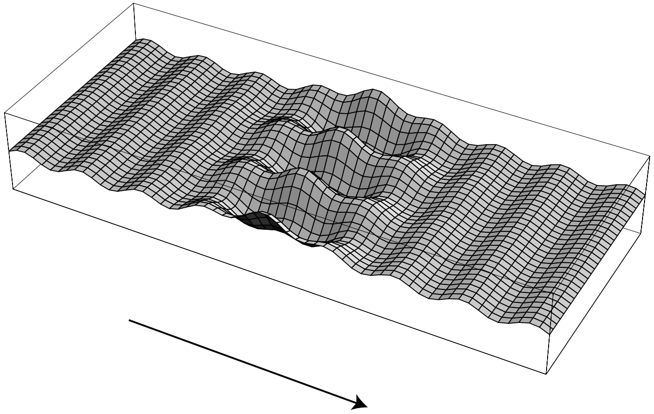

Abbildung 4: Diese dreidimensionale Welle besteht aus einer lokalisierten dreidimensionalen Störung einer zweidimensionalen Welle

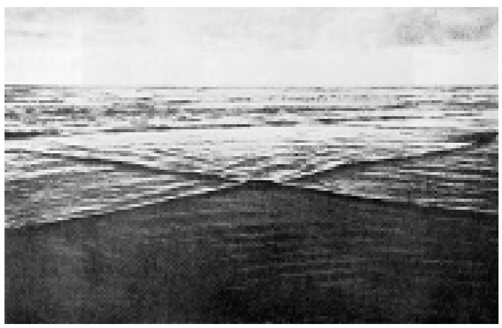

Abbildung 5: Zwei Solitärwellen interagieren miteinander, um diese Muster zu bilden

te erhebliche Herausforderungen für zukünftige Forschungen bereithalten.

Dass solche theoretischen Fragestellungen auch praktischen Nutzen haben, zeigte sich im Rahmen eines BMFT–Projekts zum Thema "*Neuartige Hochgeschwindigkeitsschiffe im Flachwasser*". X.–N. Chen hat hier seine patentierten Schiffsrümpfe mit sehr geringem Wasserwiderstand durch mathematische Methoden weiterentwickelt und setzt diese nun an seiner neuen Arbeitsstelle, der Versuchsanstalt für Binnenschiffbau e.V. Duisburg, in die Praxis um.

Nichtlinear elastische Materialien

Die Grundlagen der elastischen Verformung von Körpern wurden bereits im 18. und 19. Jahrhundert gelegt. Jedoch blieb es in vielen Fällen bei einer Theorie der kleinen Deformationen, die durch lineare Theorie beschreibbar ist. Für die Theorie großer Verformungen gab es lange keine vernünftigen Ansätze, da es galt, zwei widerstreitende grundlegende Prinzipien zu vereinbaren. Einerseits ist der uns umgebende Raum invariant unter Verschiebungen und Drehungen und diese Invarianz überträgt sich auf elastische Verformungen von Körpern. Andrerseits zeigen einfachste Experimente (z.B. der Eulersche Knickstab, siehe Abb. 6), dass statische Elastizitätsaufgaben im Allgemeinen mehrere Lösungen haben. Erst in den letzten Jahrzehnten, ausgehend von grundlegenden Arbeiten von J.M. Ball (1977), ist es gelungen, systematisch Modelle zu entwickeln, die beiden Kriterien gerecht werden. Es enstand eine allgemeine Existenztheorie, die die moderne Theorie dier Variationsrechnung wesentlich erweitert und nun zur Modellierung moderner elastischer Materialien wie Formgedächtnislegierungen angewendet wird.

Davor wurde die Theorie großer Deformationen im Wesentlichen nur auf niedrigdimensionale Modelle (Stäbe, Platten und Schalen) angewendet. Dort können mit mehr oder wenig gut begründeten Näherungsannahmen die Gleichungen wesentlich vereinfacht werden, ohne die wesentliche geometrische Nichtlinearität durch die Verschiebungs– und Drehungsinvarianz zu zerstören. Bereits 1744 hatte L. Euler die sogenannte "Elastica" untersucht, die die Verformungen eines ebenen dünnen Drahtes modelliert (siehe Abbildung 6). Von G. Kirchhoff (1859) wurde dann die Verallgemeinerung auf dreidimensionale Verformungen durchgeführt.

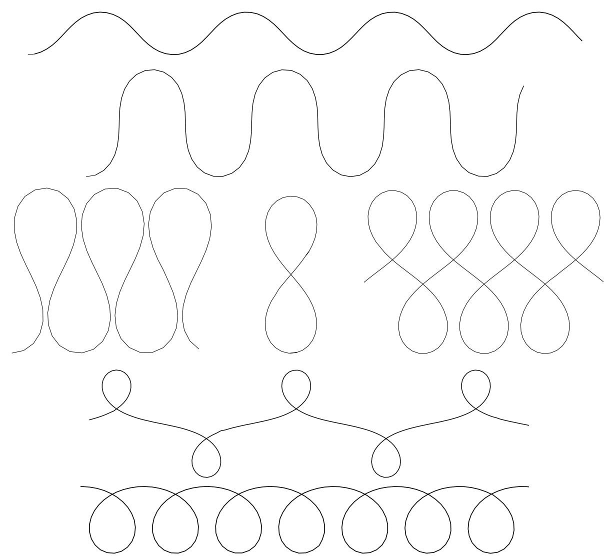

Abbildung 6: Eulers Elastica

Der Zusammenhang der von Euler und Kirchhoff vorhergesagten Stabdeformationen mit der exakten dreidimensionalen nichtlinearen Elastizitätstheorie wurde in einer Serie von Arbeiten von A. Mielke (ab 1988) mathematisch rigoros gemacht. (Auch hier war K. Kirchgässners Reduktionsmethode für elliptische Systeme eine wesentliche Grundlage.) Die Kirchhoffsche Verzerrungshypothese konnte als Konsequenz kleiner Verzerrungen nachgewiesen werden und jeder Lösung des Stabmodells kann eine zugehörige Lösung der Elastostatik zugeordnet werden. Dies führte insbesondere auf eine mathematisch exakte Formulierung des sogenannten Saint–Venant–Prinzips im nichtlinearen Fall. Andere Deformationen prismatischer Körper mit großen Verzerrungen wurden kürzlich von B. Buffoni und A. Mielke (2000) mittels der direkten Methode der Variationsrechnung und der Theorie der Kompaktheit durch Konzentration erhalten, siehe Abb. 7.

Formgedächtnislegierungen

Dieses Arbeitsgebiet beschäftigt sich mit zeitlich

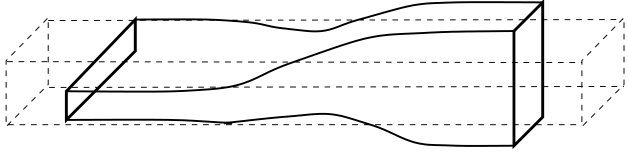

Abbildung 7: Elastostatische Verformung eines Prismas mit quadratischem Querschnitt

veränderlichen elastischen Systemen, in denen die äußeren Lasten so langsam variieren, dass die Effekte durch ratenunabhängige Modelle beschrieben werden können, insbesondere gehören dazu Phasenumwandlungen in sogenannten Formgedächtnislegierungen. Diese Metalle (z.B. Nickel–Titan oder Kupfer–Aluminium–Nickel) lassen sich bei niedrigen Temperaturen leicht in unterschiedliche Formen verbiegen, kehren aber nach einer Erhitzung wieder in ihre Ausgangsform zurück. Solche Materialien finden heute in vielen Bereichen Anwendung, wie z.B. in der Medizin (Zahnspangen, intravenöse chirurgische Instrumente) und in der Mechatronik (Miniaturgreifer, Bohrfutter).

Entscheidend für den Gedächtniseffekt ist, dass der zugrundeliegende Kristall im betreffenden Temperaturbereich in mehreren Phasen (Austenit und Martensite) im Gleichgewicht sein kann, was aber verschiedene makroskopische Deformationen zur Folge hat. Die verschiedenen Phasen zeichnen sich durch verschiedene Kristallstrukturen aus. Typische Phasentransformationen ergeben sich vom austenitischen kubischen Gitter mit maximaler Symmetrie zu drei tetragonalen Martensitphasen oder vom kubischen Gitter zu zwölf orthorombischen Phasen. In der Praxis stellen sich sehr feine Phasenmischungen mit Längeskalen im Mikrometerbereich ein (siehe Abb. 8). Bei solchen Phasengemischen

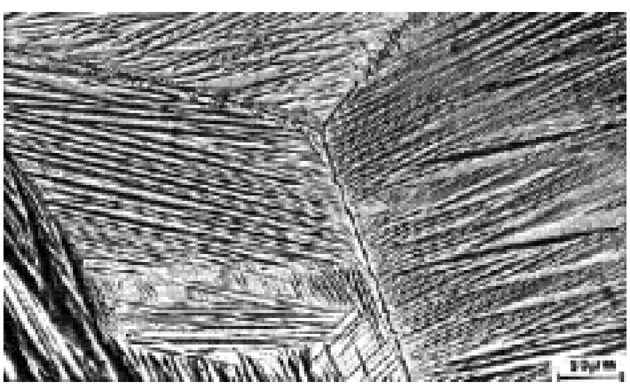

Abbildung 8: Mikrostruktur und Korngrenzen in einer Formgedächtnislegierung auf Kupferbasis (E. Hornbogen & J. Spielfeld, Bochum)

spielen viele Symmetriebedingungen und geometrische Restriktionen eine Rolle, die in der Kristallographie schon lange untersucht wurden. Doch die Evolution der Phasengemische in komplexen mechanischen Bauteilen unter äußeren Lasten konnte bisher nicht beschrieben werden.

Im Rahmen des fächerübergreifenden Verbundprojekts "*Spannungs– und verzerrungsbedingte Phasenübergänge in Ingenieurswerkstoffen*" mit Prof. E. Stein (IBNM, Uni Hannover) und Prof. E. Hornbogen (LWW, Uni Bochum) wurden unter anderem mathematische Evolutionsgleichungen für die Phasenanteile entwickelt. Dazu wurden mathematische Homogenisierungstechniken sowie Methoden der schwachen Konvergenz eingesetzt. Das so erhaltene Modell beruht wesentlich auf der sogenannten Mischungsfunktion, die die Quasikonvexifizierung unter gegebenen Volumenanteilen darstellt. Diese Mischungsfunktion enthält die wesentlichen Informationen über die Kristallsymmetrien und die geometrischen Restriktionen und transportiert diese somit von der mikroskopischen auf die makroskopische Skala.

Um das Modell genauer zu beschreiben, bezeichenen wir mit $x \in \Omega \in \mathbf{R}^3$ die Materialpunkte im zu betrachtenden Bauteil Ω. Die Funktion $u : \Omega \to \mathbf{R}^3$ beschreibe die Verformung des Bauteils und $c = (c_1, \dots, c_n) : \Omega \to \mathbf{P}^{n-1}$ die Volumenanteile der n Phasen, d.h., in einer kleinen Umgebung um x ist der Anteil der Phase i durch $c_i(x) \in [0, 1]$ gegeben. Mit $\mathcal{E}(t, u, c)$ sei nun die Gesamtenergie bezeichnet, die im Körper zur Zeit t unter der Verformung u und der Phasenverteilung c enthalten ist. Dabei ist der wichtigste Anteil von $\mathcal{E}$ das Integral über die Mischungsfunktion. Die gesuchte Lösung $(u(t), c(t))_{t\in[0,T]}$ muss dann die einfach aussehenden Differentialinklusionen

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial_u \mathcal{E}(t, u(t), c(t)), \\ 0 &\in \partial\Delta(\dot{c}(t)) + \partial_c \mathcal{E}(t, u(t), c(t)) \end{aligned}$$

erfüllen. Dabei ist Δ ein Dissipationsfunktional, das angibt, wieviel Energie benötigt wird, um die Phasenanteile zu verändern.

Unter geeigneten Voraussetzungen lässt sich die Existenz einer Lösung zeigen, im Allgemeinen gilt aber keine Eindeutigkeit. Oft entsprechen diese Lösungen dem experimentell gemessenen Materialverhalten qualitativ recht gut.

A. Mielke, M.D. Groves