Mathematische Vermehrung von Mengen, Flächen, Volumen und Geld?

Alexander Mielke

Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

Mohrenstraße 39, 10117 Berlin

Institut für Mathematik
Humboldt-Universität
zu Berlin
Rudower Chaussee 25
12489 Berlin-Adlershof

Tag der Mathematik, 6. Mai 2006
Technische Universität Berlin

Wie groß sind Mengen?

- Abzählen geht nur bei endlichen Mengen
- Unendliche Mengen können aber verglichen werden.

$\mathbf{A}$ heißt kleiner oder gleich groß (mächtig) wie $\mathbf{B}$,
falls es eine Abbildung $\mathbf{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ gibt,
die jeden Punkt in $\mathbf{B}$ höchstens einmal trifft.

$\mathbf{A}$ heißt gleich groß wie $\mathbf{B}$,
falls "$\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$" und "$\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$" ist.

Beispiele:

- {Alex,Bärbel,Anne,Lisa,Frieder} ist echt kleiner als {Mon,Die,Mit,....,Son}, denn

  $\mathbf{f}(\mathit{Person}) = \mathit{Wochentag}$ des Geburtstags der Person in 2006

  $\mathbf{f}(\text{Alex}) = \text{Don},\ \mathbf{f}(\text{Bärbel}) = \text{Mon},\ \mathbf{f}(\text{Anne}) = \text{Son},\ \mathbf{f}(\text{Lisa}) = \text{Die},\ \mathbf{f}(\text{Frieder}) = \text{Mit}.$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist gleich groß wie $\mathbf{K} = \{1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots\}$

  $\mathbf{f}(\mathbf{n}) = (23\mathbf{n})^3$ trifft jedes $\mathbf{k} \in \mathbf{K}$ höchstens einmal; $\mathbf{g}(\mathbf{k}) = \mathbf{q}$ trifft jedes $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ höchstens einmal.

Zwei (unendliche) Mengen können gleich groß sein,
obwohl eine eine echte Teilmenge der anderen ist.

Wichtige Beispiele

Es gibt gleich viele ganze Zahlen wie Brüche

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ ist gleich groß wie $\mathbb{Q}$ = Menge der Brüche, denn

- $\mathbf{f(n) = n}$ trifft jedes $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}$ höchstens einmal
- Für $\mathbf{q} = \pm\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{n}}$ mit $\mathbf{z}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$ setze $\mathbf{g(q)} = \pm\underbrace{44...44}_{\mathbf{z}\text{ mal}}\underbrace{00...00}_{\mathbf{n}\text{ mal}} \in \mathbb{Z}$

  z.B. $\mathbf{g}(\frac{1}{3}) = 4000$, $\mathbf{g}(\frac{8}{11}) = 4444444400000000000$ oder $\mathbf{g}(-\frac{3}{2}) = -44400$

$\mathbb{R}$ ist echt größer als $\mathbb{Q}$

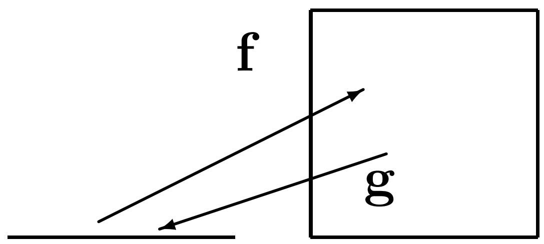
Es gibt echt mehr reelle Zahlen als ganze Zahlen (oder Brüche)

- Beweis[1872] von Georg Cantor 1845–1918
- Jede Menge ist echt kleiner als ihre Potenzmenge (= alle Teilmengen)

  $\rightsquigarrow$ viele verschiedene Unendlichkeiten

- Hat ein Quadrat mehr Punkte als die untere Kante?

  Jeder Maler sagt: Ja!



Satz: Das Quadrat $\mathbf{A} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x, y \leq 1 \,\}$ hat gleich viele Punkte wie die Linie $\mathbf{B} = [0,1]$.

- Offensichtlich ist $\mathbf{B}$ kleiner oder gleich $\mathbf{A}$:

Für $\mathbf{f} : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ setze einfach $\mathbf{f}(b) = (b,0) \in \mathbf{A}$.

- **Umkehrungstrick**:

  Reelle Zahlen können als unendliche Dezimalbrüche dargestellt werden:

$$\tfrac{1}{6} = 0{,}1666666.....\quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707106781.....\quad \tfrac{1}{\pi} = 0{,}318309886....$$

Allgemein setzen wir $x = 0.x_1x_2x_3....$

Für $(x,y) \in \mathbf{A}$ definieren wir nun $b = \mathbf{g}((x,y)) = 0{,}x_1y_1x_2y_2x_3y_3...$

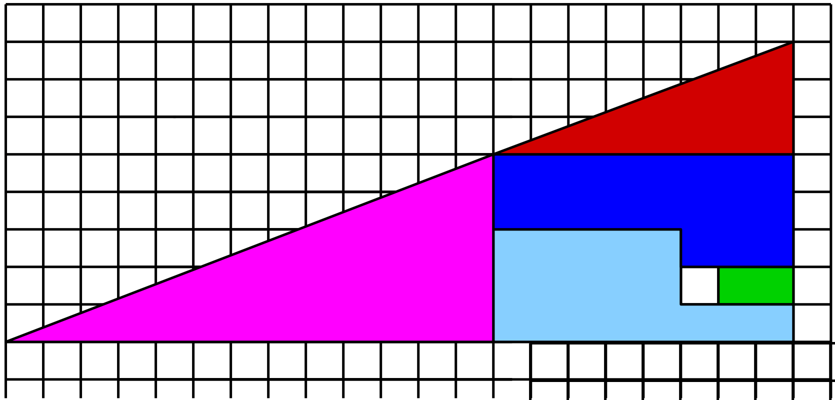
und erhalten jedes $b = 0{,}b_1b_2b_3.... \in \mathbf{B}$ genau einmal.

($\mathbf{g}$ ist eine ein-ein-deutige Abbildung, da (x,y) aus b zurückgewonnen werden kann.)

Offensichtlich dürfen wir Mengen nicht beliebig zerpflücken!!

Von nun ab ist nur noch Folgendes erlaubt:

- Eine Menge darf in endlich viele Stücke zerlegt werden.
- Jedes Stück darf verschoben und verdreht werden, aber nicht verzerrt
- Die Stücke dürfen dann neu zusammengesetzt werden.

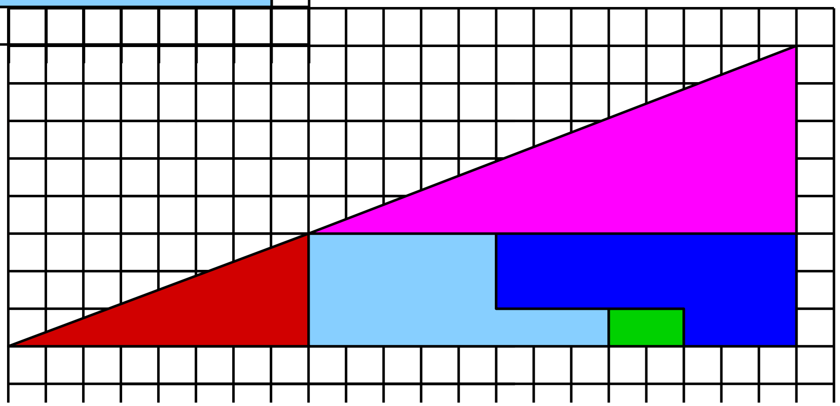


Dreieck aus 6 Teilen:

Unterseite $13 + 8$

und Höhe $5 + 3$

Fläche: $(21 \times 8)/2 = 84$



Dreieck aus 5 Teilen:

aber immer noch

Fläche: $(21 \times 8)/2 = 84$

Wo steckt der 15. Wundermann?

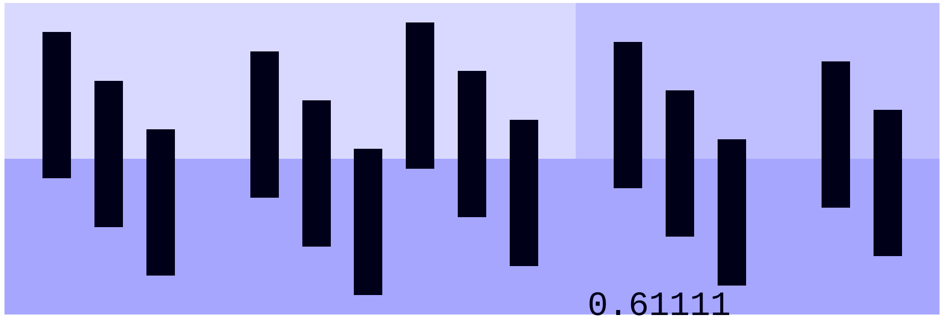
Das dreiteiliges Puzzle **Der Wundermann** fehlt aus Copyright-Gründen.

Ein Mann verschwindet — wo ist er?

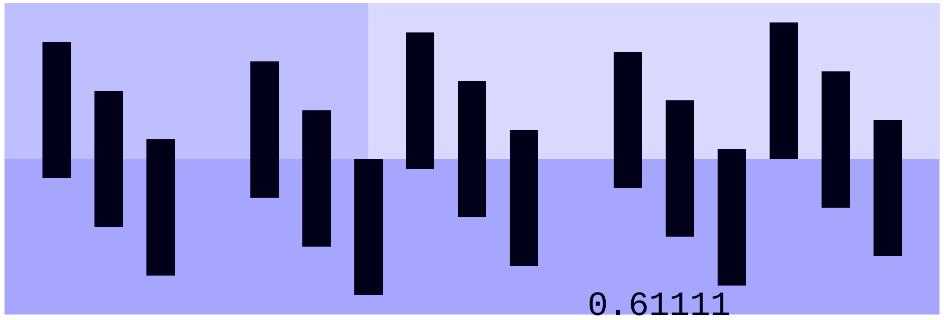
Er erscheint wieder – wo war er?

Reduktion auf das Wesentliche

Ersetze Wundermänner durch Balken

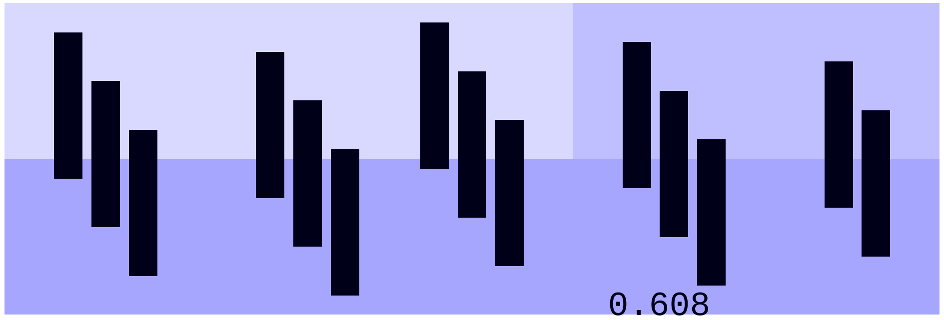


14 Balken

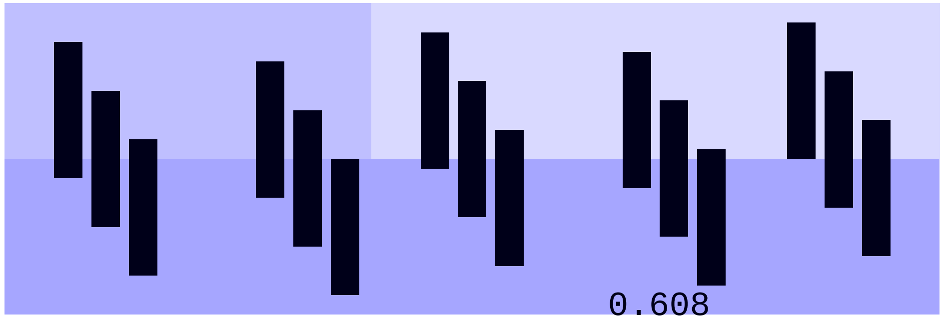


15 Balken

Anpassen der Abstände

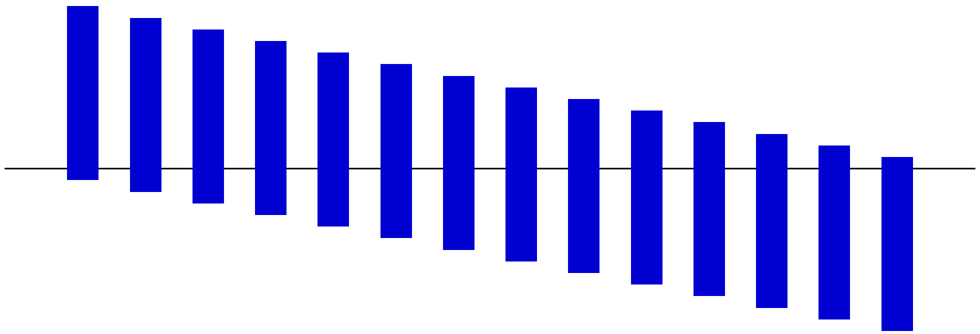


14 Balken

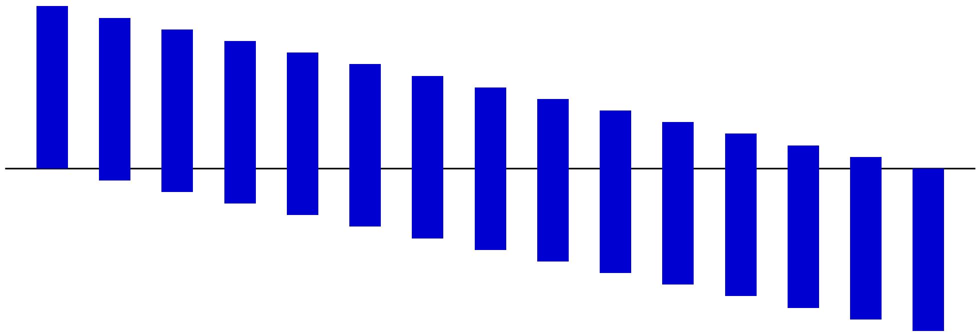


15 Balken

Umsortieren erleichert die Einsicht noch mehr:

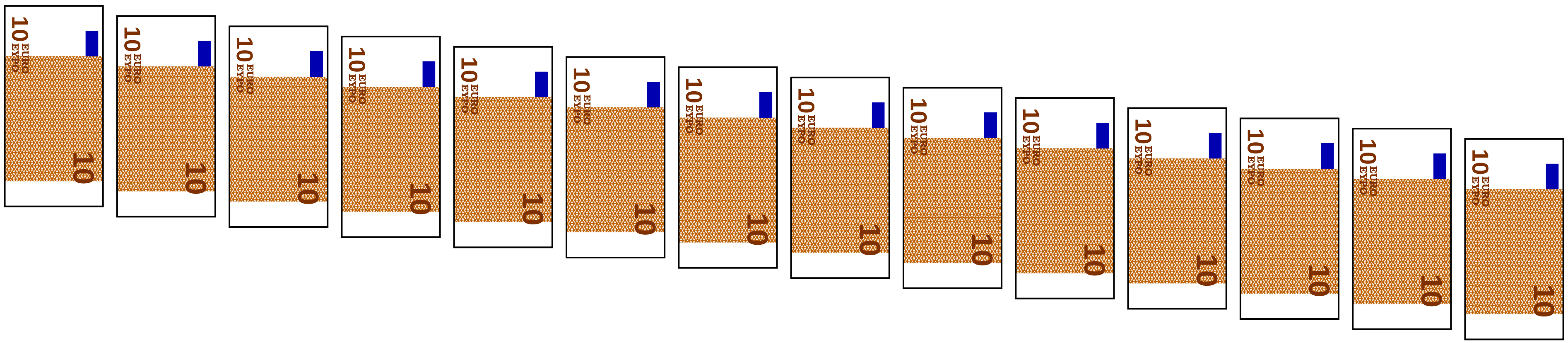


14 Balken



15 Balken

Eine NICHT empfohlene Anwendung



Zurück zur exakten mathematischen Vermehrung:

Satz[1926] von Banach und Tarski:

Eine dreidimensionale Kugel mit Radius 1
lässt sich so in 41 Teile zerlegen,
dass diese neu zusammengesetzt
zwei volle Kugeln mit jeweils Radius 1 ergeben.

Stefan Banach 1892–1945

Heute geht das sogar mit nur 5 Teilen!

Alfred Tarski 1902–1983

Die Mathematik stellt ein sehr scharfes Skalpell zur Verfügung:

$\rightsquigarrow$ das $Auswahlaxiom$.

Es liefert Mengen schlimmer als Fraktale ....