

Kapitel 9

Finite–Differenzen–Verfahren für elliptische Gleichungen

nach [Sam84]

Die Modellbeispiele in diesem Abschnitt sind die Poisson–Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{9.1}$$

und die stationäre Diffusionsgleichung

$$-\nabla \cdot (A \nabla u) + qu = F \quad \text{in } \Omega, \tag{9.2}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und die obigen Gleichungen noch mit geeigneten Randbedingungen abgeschlossen sind.

9.1 Grundlagen

Wir betrachten das Intervall $[0, 1]$ welches mittels eines äquidistanten Gitters zerlegt wird:

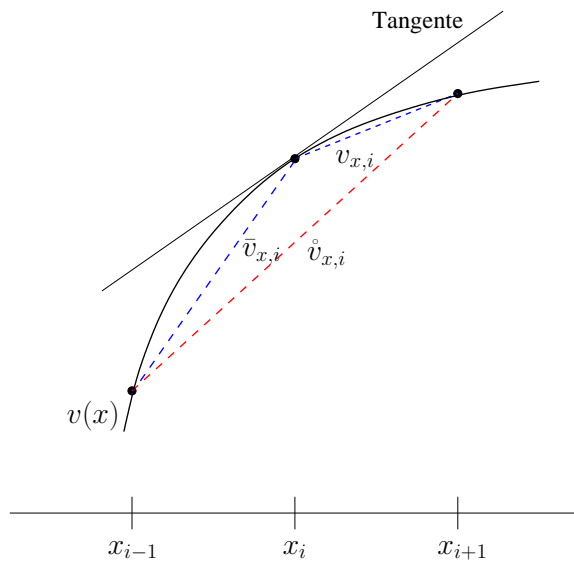
$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = 1/n, \\ \omega_h &= \{x_i : i = 0, \dots, n\} - \text{Gitter.} \end{aligned}$$

Definition 9.1 Ein Vektor $\mathbf{u}_h = (u_0, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, der jedem Gitterpunkt einen Funktionswert zuordnet, heißt Gitterfunktion. \square

Definition 9.2 Sei $v(x)$ eine genügend glatte Funktion. Bezeichne $v_i = v(x_i)$, wobei x_i Knoten eines Gitters ist. Die folgenden Differenzenquotienten nennt man

$$\begin{aligned} v_{x,i} &= \frac{v_{i+1} - v_i}{h} - \text{Vorwärtsdifferenz,} \\ v_{\bar{x},i} &= \frac{v_i - v_{i-1}}{h} - \text{Rückwärtsdifferenz,} \\ v_{\dot{x},i} &= \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} - \text{zentrale Differenz,} \\ v_{\ddot{x},i} &= \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} - \text{zweite Differenz.} \end{aligned}$$

\square



Es gelten (*Übungsaufgabe*)

$$v_{\hat{x},i} = \frac{1}{2}(v_{x,i} + v_{\bar{x},i}), \quad v_{\bar{x}x,i} = (v_{\bar{x},i})_{x,i}.$$

Aus der Taylor-Entwicklung für $v(x)$ an der Stelle x_i ergibt sich (*Übungsaufgabe*)

$$\begin{aligned} v_{x,i} &= v'(x_i) + \frac{1}{2}hv''(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \\ v_{\bar{x},i} &= v'(x_i) - \frac{1}{2}hv''(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \\ v_{\hat{x},i} &= v'(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \\ v_{\bar{x}x,i} &= v''(x_i) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Definition 9.3 Sei L ein Differentialoperator. Der Differenzenoperator $L_h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißt mit L konsistent mit der Ordnung k , wenn

$$\max_{0 \leq i \leq n} |(Lu)(x_i) - (L_h u_h)_i| = \|(Lu)(x_i) - (L_h u_h)_i\|_{\infty, \omega_h} = \mathcal{O}(h^k)$$

gilt. □

Die Konsistenz ist ein Maß für die Approximationsgüte von L_h .

Beispiel 9.4 Die Differenzenoperatoren $v_{x,i}$, $v_{\bar{x},i}$, $v_{\hat{x},i}$ sind konsistent zu $L = \frac{d}{dx}$ mit der Ordnung 1,1 bzw. 2. Der Operator $v_{\bar{x}x,i}$ ist von zweiter Ordnung konsistent mit $L = \frac{d^2}{dx^2}$. □

Beispiel 9.5 Betrachtet wird der Differentialoperator

$$Lu = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right),$$

wobei $k(x)$ stetig differenzierbar ist. Wir definieren den Differenzenoperator L_h wie folgt

$$\begin{aligned} (L_h u_h)_i &= (a u_{\bar{x},i})_{x,i} = \frac{1}{h} \left(a(x_{i+1}) u_{\bar{x},i}(x_{i+1}) - a(x_i) u_{\bar{x},i}(x_i) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right), \end{aligned}$$

wobei a eine Gitterfunktion ist, die geeignet gewählt werden soll. Es folgt mit Produktregel bzw. mit Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}(Lu)_i &= k'(x_i)(u')_i + k(x_i)(u'')_i, \\ (L_h u_h)_i &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h}(u')_i + \frac{a_{i+1} + a_i}{2}(u'')_i + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6}(u''')_i + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Für die Differenz ergibt sich

$$\begin{aligned}(Lu)_i - (L_h u_h)_i &= \left(k'(x_i) - \frac{a_{i+1} - a_i}{h}\right)(u')_i + \left(k(x_i) - \frac{a_{i+1} + a_i}{2}\right)(u'')_i \\ &\quad - \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6}(u''')_i + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Damit L_h von zweiter Ordnung mit L konsistent ist, müssen somit gelten

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = k'(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k(x_i) + \mathcal{O}(h^2).$$

Aus der ersten Forderung folgt $a_{i+1} - a_i = \mathcal{O}(h)$, womit der dritte Summand in der Fehlergleichung von Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ wird. Mögliche Varianten sind (*Übungsaufgaben?*)

$$a_i = \frac{k_i + k_{i-1}}{2}, \quad a_i = k\left(x_i - \frac{h}{2}\right), \quad a_i = (k_i k_{i-1})^{1/2}.$$

Man beachte, die „natürliche“ Wahl $a_i = k_i$ garantiert nur Konsistenz von erster Ordnung, siehe die Taylorentwicklung für $v_{x,i}$. \square

9.2 Differenzenapproximation des Laplace-Operators in zwei Dimensionen

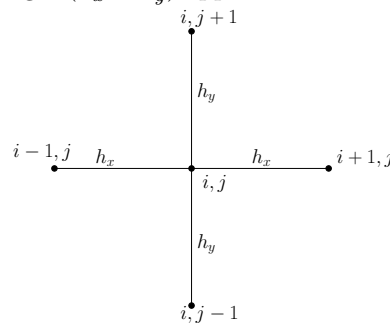
Der Laplace-Operator in zwei Dimensionen ist

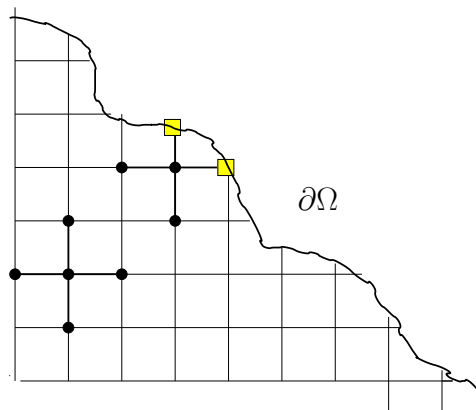
$$\Delta u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = u_{xx} + u_{yy}, \quad \mathbf{x} = (x, y).$$

Die einfachste Approximation nimmt für beide zweiten Ableitungen die zweite finite Differenzen. Das führt auf den sogenannten 5-Punkte-Stern und die Approximation

$$\Delta u \approx \Lambda u = u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}.$$

Aus den Eigenschaften der zweiten finiten Differenz folgt sofort, dass Λu den Laplace-Operator mit der Ordnung $\mathcal{O}(h_x^2 + h_y^2)$ approximiert.





Bei dieser Approximation tritt ein Problem auf, wenn das Gebiet krummlinige Ränder besitzt. Die Approximation der zweiten Ableitung erfordert Funktionswerte in mindestens drei Punkten in jede Richtung

$$\begin{aligned} &(x - h_x^-, y), (x, y), (x + h_x^+, y), \\ &(x, y - h_y^-, (x, y), (x, y + h_y^+). \end{aligned}$$

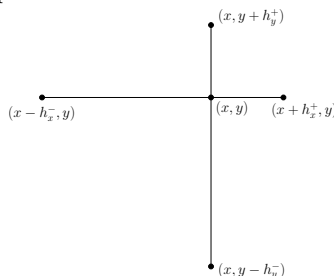
Eine mögliche Approximation ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\bar{h}_x} \left(\frac{u(x + h_x^+, y) - u(x, y)}{h_x^+} - \frac{u(x, y) - u(x - h_x^-, y)}{h_x^-} \right) \quad (9.3)$$

mit $\bar{h}_x = (h_x^+ + h_x^-)/2$. Der Approximationsfehler beträgt dabei (Taylor-Entwicklung)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\bar{h}_x} \left(\frac{u(x + h_x^+, y) - u(x, y)}{h_x^+} - \frac{u(x, y) - u(x - h_x^-, y)}{h_x^-} \right) \\ = -\frac{1}{3}(h_x^+ - h_x^-) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\bar{h}_x^2). \end{aligned}$$

Für $h_x^+ \neq h_x^-$ ist die Approximation von erster Ordnung.



Eine andere Möglichkeit ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\tilde{h}_x} \left(\frac{u(x + h_x^+, y) - u(x, y)}{h_x^+} - \frac{u(x, y) - u(x - h_x^-, y)}{h_x^-} \right)$$

mit $\tilde{h}_x = \max\{h_x^+, h_x^-\}$. Diese Approximation besitzt nur die Ordnung Null, d.h. es findet keine Approximation statt.

9.3 Das Dirichlet-Problem

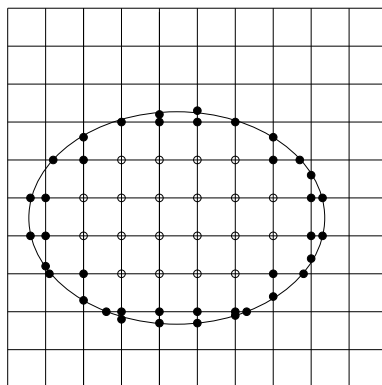
Wir betrachten die Poisson-Gleichung, welche mit Dirichlet-Randbedingungen ausgestattet ist

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir zerlegen \mathbb{R}^2 in Rechtecke mit $x_i = ih_x, y_j = jh_y, h_x, h_y > 0, i, j \in \mathbb{Z}$.

Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} w_h^\circ &= \{\circ\} && \text{echte innere Knoten, 5-Punkte-Stern ganz in } \Omega, \\ w_h^* &= \{*\} && \text{randnahe, innere Knoten,} \\ \gamma_h &= \{*\} && \text{Randknoten,} \\ \omega_h &= w_h^\circ \cup w_h^* && \text{innere Knoten,} \\ \omega_h \cup \gamma_h &&& \text{Gitter.} \end{aligned}$$



Die diskrete Aufgabe lautet nun

$$\begin{aligned} \Lambda u(\mathbf{x}) &= -\phi(\mathbf{x}) && \mathbf{x} \in w_h^\circ, \\ \Lambda^* u(\mathbf{x}) &= -\phi(\mathbf{x}) && \mathbf{x} \in w_h^*, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) && \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

wobei ϕ eine Approximation an f und Λ^* eine Approximation des Laplace-Operators für randnahe innere Knoten, zum Beispiel (9.3), sind. Die diskrete Aufgabe ist ein großes lineares Gleichungssystem. Die wichtigsten theoretischen Fragen bestehen in der Untersuchung der Eigenschaften der Gitterfunktion und der Konvergenz.

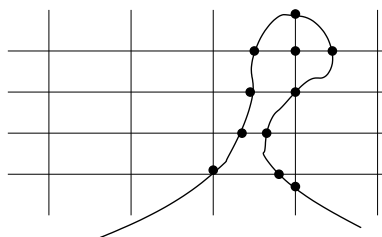
9.4 Das diskrete Maximum-Prinzip

Dieser Abschnitt behandelt die Übertragung von Ergebnissen aus Kapitel 7 auf Gitterfunktionen.

Wir betrachten eine Differenzgleichung in der Form

$$a(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h,$$

wobei $S(\mathbf{x})$ eine Menge von Knoten darstellt, über die für den jeweiligen Knoten \mathbf{x} summiert werden muss (Schablone). Das Gitter ω_h wird zusammenhängend angenommen, d.h. für alle $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_e \in \omega_h$ existieren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \omega_h$ mit $\mathbf{x}_1 \in S(\mathbf{x}_a), \mathbf{x}_2 \in S(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{x}_m \in S(\mathbf{x}_e)$. Die folgende Situation ist zum Beispiel nicht erlaubt:



Die Koeffizienten $a(\mathbf{x})$ und $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sollen folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{x}) &> 0, \quad b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \omega_h, \forall \mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \\ a(\mathbf{x}) &= 1, \quad b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \gamma_h \quad (\text{Dirichlet-Randbedingung}). \end{aligned}$$

Die Werte der Dirichlet-Randbedingungen sind mit in die Funktion $f(\mathbf{x})$ aufgenommen.

Beispiel 9.6 Die 5-Punkte-Stern-Approximation des Laplace-Operators in der Poisson-Gleichung für $\mathbf{x} = (x, y) \in \omega_h^\circ$ lässt sich wie folgt in dieser Form schreiben

$$\begin{aligned} \frac{2(h_x^2 + h_y^2)}{h_x^2 h_y^2} u(x, y) &= \left[\frac{1}{h_x^2} u(x + h_x, y) + \frac{1}{h_x^2} u(x - h_x, y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h_y^2} u(x, y + h_y) + \frac{1}{h_y^2} u(x, y - h_y) \right] + f(x, y). \end{aligned}$$

Man hat also $a(\mathbf{x}) = \frac{2(h_x^2 + h_y^2)}{h_x^2 h_y^2}$, $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{h_x^{-2}, h_y^{-2}\}$ und $S(\mathbf{x}) = \{(x - h_x, y), (x + h_x, y), (x, y - h_y), (x, y + h_y)\}$.

Für randnahe innere Punkte betrachten wir der Einfachheit halber nur den eindimensionalen Fall (9.3). Sei $x + h_x^+ \in \gamma_h$. Dann gilt

$$\frac{1}{\bar{h}_x} \left(\frac{1}{h_x^+} + \frac{1}{h_x^-} \right) u(x, y) = \frac{u(x - h_x^-, y)}{\bar{h}_x h_x^-} + \underbrace{\frac{u(x + h_x^+, y)}{\bar{h}_x h_x^+}}_{\rightarrow f(x)} + f(x).$$

Hier sind $a(x) = \frac{1}{h_x} \left(\frac{1}{h_x^+} + \frac{1}{h_x^-} \right)$, $b(x, y) = \frac{1}{h_x h_x^-}$ und $S(x) = \{(x - h_x^-, y)\}$. □

Das Schema kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$d(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x})$$

mit $d(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Beispiel 9.7 Für den 5-Punkte-Stern-Approximation des Laplace-Operators für $\mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ gilt

$$d(\mathbf{x}) = \frac{2(h_x^2 + h_y^2)}{h_x^2 h_y^2} - \frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2} = 0.$$

Für randnahe Punkte gilt

$$d(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{=a(\mathbf{x})} - \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \notin \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Im eindimensionalen Fall hat man

$$d(x) = \frac{1}{\bar{h}_x h_x^+} = \frac{2}{h_x h_x^+ + h_x^+ h_x^+} \geq \frac{2}{h_x h_x + h_x h_x} = \frac{1}{h_x h_x}.$$

□

Lemma 9.8 Diskretes Maximum-Prinzip. Sei $u(\mathbf{x}) \neq \text{const}$ und $d(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h$. Dann folgt aus

$$Lu(\mathbf{x}) := d(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \leq 0$$

(bzw. $Lu(\mathbf{x}) \geq 0$) auf ω_h , dass $u(\mathbf{x})$ seinen maximalen positiven (bzw. minimalen negativen) Wert nicht auf ω_h annehmen kann.

Beweis: Indirekter Beweis. Seien $Lu(\mathbf{x}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h$ sowie $u(\bar{\mathbf{x}}) = \max_{\mathbf{x} \in \omega_h} u(\mathbf{x}) > 0$. Die Idee besteht nun darin zu zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen ein $\tilde{\mathbf{x}} \in \omega_h$ existiert mit $Lu(\tilde{\mathbf{x}}) > 0$.

Für $\bar{\mathbf{x}}$ gilt

$$Lu(\bar{\mathbf{x}}) = d(\bar{\mathbf{x}})u(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}})} \underbrace{b(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}_{>0} \underbrace{(u(\mathbf{y}) - u(\bar{\mathbf{x}}))}_{\leq 0 \text{ nach Definition von } \bar{\mathbf{x}}} \geq d(\bar{\mathbf{x}})u(\bar{\mathbf{x}}) \geq 0.$$

Somit gibt es nur die Möglichkeit $Lu(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Aus der obigen Abschätzung folgt insbesondere, dass dann $d(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ sein muss. Die Summanden in der Summe sind alle nichtpositiv. Damit auch die Summe verschwindet, müssen alle Summanden Null sein. Da $b(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$ als positiv vorausgesetzt wurde, muss also auch

$$u(\mathbf{y}) = u(\bar{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}})$$

gelten. Da $u(\mathbf{x}) \neq \text{const}$ angenommen wurde, existiert ein $\hat{\mathbf{x}} \in \omega_h$ mit $u(\bar{\mathbf{x}}) > u(\hat{\mathbf{x}})$. Da das Gitter zusammenhängend ist, gibt es eine Verbindung $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &\in S(\bar{\mathbf{x}}) & u(\mathbf{x}_1) &= u(\bar{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{x}_2 &\in S(\mathbf{x}_1) & u(\mathbf{x}_2) &= u(\mathbf{x}_1) = u(\bar{\mathbf{x}}) \\ &\dots & & \\ \hat{\mathbf{x}} &\in S(\mathbf{x}_m) & u(\mathbf{x}_m) &= u(\mathbf{x}_{m-1}) = \dots = u(\bar{\mathbf{x}}) > u(\hat{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Für den letzten Gitterpunkt \mathbf{x}_m , in dem u den gleichen Funktionswert wie in $\bar{\mathbf{x}}$ annimmt, gilt

$$Lu(\mathbf{x}_m) \geq \underbrace{d(\mathbf{x}_m)}_{\geq 0} \underbrace{u(\mathbf{x}_m)}_{> 0} - \underbrace{b(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}})}_{> 0} \underbrace{(u(\hat{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}_m))}_{< 0} > 0.$$

Der Gitterpunkt \mathbf{x}_m ist also das gesuchte $\tilde{\mathbf{x}}$. ■

Folgerung 9.9 Seien $u(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in \gamma_h$, und $Lu(\mathbf{x}) \geq 0$ auf ω_h . Dann ist die Gitterfunktion $u(\mathbf{x})$ nichtnegativ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$.

Beweis: Angenommen, es existiert ein $\bar{\mathbf{x}} \in \omega_h$ mit $u(\bar{\mathbf{x}}) < 0$. Dann nimmt die Gitterfunktion ein negatives Minimum auf ω_h an. Das ist ein Widerspruch zum diskreten Maximum-Prinzip. ■

Folgerung 9.10 Die Gleichung $Lu(\mathbf{x}) = 0$ hat nur die triviale Lösung $u(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$.

Man beachte, dass in der Definition von $Lu(\mathbf{x}) = 0$ auch die Randwerte enthalten sind.

Folgerung 9.11 Vergleichslemma. Seien

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h; & & u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \gamma_h, \\ L\bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h; & & \bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{g}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

mit $|f(\mathbf{x})| \leq \bar{f}(\mathbf{x})$ und $|g(\mathbf{x})| \leq \bar{g}(\mathbf{x})$. Dann gilt $|u(\mathbf{x})| \leq \bar{u}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$.

Die restlichen Folgerungen in diesem Abschnitt werden wir beim Beweis der Stabilität benötigen. Es werden die homogene Aufgabe (rechte Seite verschwindet) sowie die Aufgabe mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen untersucht.

Folgerung 9.12 *Für die Lösung der Aufgabe*

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

mit $d(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ gilt

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)}.$$

Beweis: Betrachte die Aufgabe

$$\begin{aligned} L\bar{u}(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ \bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{g}(\mathbf{x}) = \text{const} = \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)} & \mathbf{x} \in \gamma_h. \end{aligned}$$

Es gilt $\bar{u}(\mathbf{x}) = \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)} = \text{const}$, da für die inneren Punkte, die nicht randnah sind, gilt

$$L\bar{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{d(\mathbf{x})}_{=0} \bar{u}(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underbrace{(\bar{u}(\mathbf{y}) - \bar{u}(\mathbf{x}))}_{=0} = 0.$$

Für die inneren, randnahen Punkte hat man wegen $\bar{u}(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{y})$

$$L\bar{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{u}(\mathbf{y}),$$

was gerade die rechte Seite der Differenzgleichung ist, nachdem man die Randbedingung eingesetzt hat.

Die Funktion $\bar{u}(\mathbf{x})$ ist eine Majorante von $u(\mathbf{x})$ und mit Folgerung 9.11 folgt die Behauptung. ■

Folgerung 9.13 *Für die Lösung der Aufgabe*

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

mit $d(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in \omega_h$ gilt

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|D^{-1}f\|_{l^\infty(\omega_h)}$$

mit $D = \text{diag}(d(\mathbf{x}))$ für $\mathbf{x} \in \omega_h$.

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})| \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \omega_h.$$

Die Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} L\bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ \bar{u}(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

ist nichtnegativ (diskretes Maximum–Prinzip), d.h. $\bar{u}(\mathbf{x}) \geq 0$ für $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$. Definiere $\bar{\mathbf{x}}$ durch

$$\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)}.$$

In $\bar{\mathbf{x}}$ gilt

$$L\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) = d(\bar{\mathbf{x}})\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}})} \underbrace{b(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}_{>0} \underbrace{(\bar{u}(\mathbf{y}) - \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}))}_{\leq 0} = |f(\bar{\mathbf{x}})|$$

und damit

$$\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \frac{|f(\bar{\mathbf{x}})|}{d(\bar{\mathbf{x}})} \leq \max_{\mathbf{x} \in \omega_h} \frac{|f(\mathbf{x})|}{d(\mathbf{x})} = \|D^{-1}f\|_{l^\infty(\omega_h)}.$$

Da $u(\mathbf{x}) \leq \bar{u}(\bar{\mathbf{x}})$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$ nach Folgerung 9.11, folgt die Behauptung. ■

Folgerung 9.14 *Seien*

- $d(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \omega_h^\circ,$
- $d(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \omega_h^*,$
- $f(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ und
- $g(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \gamma_h.$

Dann gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|D^+ f\|_{l^\infty(\omega_h)},$$

wobei $D^+ = \text{diag}(0, d(\mathbf{x})^{-1})$ ist. Dabei sind die Nullen für $\mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ und $d(\mathbf{x})^{-1}$ für $\mathbf{x} \in \omega_h^*$.

Beweis: Seien $\bar{f}(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})|, \mathbf{x} \in \omega_h; \bar{g}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \gamma_h.$ Die Lösung $\bar{u}(\mathbf{x})$ ist nichtnegativ, $\bar{u}(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h,$ siehe Beweis von Folgerung 9.13. Definiere $\bar{\mathbf{x}}$ durch

$$\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)}.$$

Man kann $\bar{\mathbf{x}} \in \omega_h^*$ wählen. Sei nämlich $\bar{\mathbf{x}} \in \omega_h^\circ,$ dann gilt

$$\underbrace{d(\bar{\mathbf{x}})}_{=0} \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}})} \underbrace{b(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}_{>0} \underbrace{(\bar{u}(\mathbf{y}) - \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}))}_{\leq 0} = f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

d.h. $\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{u}(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}}).$ Seien nun $\hat{\mathbf{x}} \in \omega_h^*$ und $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}$ eine Verbindung mit $\mathbf{x}_i \notin \omega_h^*, i = 1, \dots, m.$ Für \mathbf{x}_m gilt analog

$$\bar{u}(\mathbf{x}_m) = \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} = \bar{u}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in S(\mathbf{x}_m).$$

Daraus folgt insbesondere $\bar{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)}$ und man kann $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}$ wählen.

Da die Terme in der Summe für alle $\mathbf{x} \in \omega_h$ nichtnegativ sind, folgt schließlich mit Hilfe der Folgerung 9.11

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \frac{\bar{f}(\hat{\mathbf{x}})}{d(\hat{\mathbf{x}})} \leq \|D^+ f\|_{l^\infty(\omega_h)}.$$

■

9.5 Stabilität und Konvergenz

Wir betrachten das Schema

$$\begin{aligned} \Lambda u(\mathbf{x}) &= -\phi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, \\ \Lambda^* u(\mathbf{x}) &= -\phi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^*, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned} \tag{9.4}$$

oder kurz

$$L_h u = f, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, \quad u = g, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h.$$

Die Lösung u kann man wie folgt aufspalten

$$u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}),$$

mit

$$\begin{aligned} L_h u_1 &= f, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, & u_1 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h \text{ (homogene Randbedingung)}, \\ L_h u_2 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, & u_2 &= g, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h \text{ (homogene rechte Seite)}. \end{aligned}$$

Stabilität bezüglich der Randbedingung

Für die Funktion $u_2(\mathbf{x})$ gilt, Folgerung 9.12,

$$\|u_2\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)}.$$

Stabilität bezüglich der rechten Seite

Die rechte Seite wird ebenfalls aufgespalten

$$f(\mathbf{x}) = f^\circ(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x})$$

mit

$$f^\circ(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ \\ 0 & \mathbf{x} \in \omega_h^* \end{cases}, \quad f^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f^\circ(\mathbf{x}).$$

Wegen der Linearität der Gleichung zerlegt sich die Funktion $u_1(\mathbf{x})$ damit in

$$u_1(\mathbf{x}) = u_1^\circ(\mathbf{x}) + u_1^*(\mathbf{x})$$

mit

$$\begin{aligned} L_h u_1^\circ &= f^\circ, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, & u_1^\circ &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h, \\ L_h u_1^* &= f^*, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, & u_1^* &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h. \end{aligned}$$

Sei $B((0,0), R)$ ein Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius R , der so groß gewählt, dass $R \geq \|\mathbf{x}\|_2$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$. Wir betrachten die Funktion

$$\bar{u}(\mathbf{x}) = \alpha (R^2 - x^2 - y^2) \quad \text{mit } \alpha > 0,$$

welche nur nichtnegative Werte für $(x, y) \in \Omega$ annimmt. Für diese Funktion gelten

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{u}(\mathbf{x}) &= -\alpha \Lambda(x^2 + y^2 - R^2) \\ &= -\alpha \left(\frac{(x + h_x)^2 - 2x^2 + (x - h_x)^2}{h_x^2} + \frac{(y + h_y)^2 - 2y^2 + (y - h_y)^2}{h_y^2} \right) \\ &= -4\alpha =: -\bar{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Lambda^* \bar{u}(\mathbf{x}) &= -\alpha \left[\frac{1}{\bar{h}_x} \left(\frac{(x + h_x^+)^2 - x^2}{h_x^+} - \frac{x^2 - (x - h_x^-)^2}{h_x^-} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{h}_y} \left(\frac{(y + h_y^+)^2 - y^2}{h_y^+} - \frac{y^2 - (y - h_y^-)^2}{h_y^-} \right) \right] \\ &= -\alpha \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{\bar{h}_x} + \frac{h_y^+ + h_y^-}{\bar{h}_y} \right) =: -\bar{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h^*. \end{aligned}$$

Somit hat die Aufgabe

$$\begin{aligned} L_h \bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ \bar{u}(\mathbf{x}) &= \alpha (R^2 - x^2 - y^2) > 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

gerade die Lösung $\bar{u}(\mathbf{x})$. Es gilt $\bar{u}(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \gamma_h$. Für $\alpha = \frac{1}{4} \|f^\circ\|_{l^\infty(\omega_h)}$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{f}(\mathbf{x}) &= 4\alpha = \|f^\circ\|_{l^\infty(\omega_h)} \geq |f^\circ(\mathbf{x})|, & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, \\ \bar{f}(\mathbf{x}) &\geq 0 = |f^\circ(\mathbf{x})| & \mathbf{x} \in \omega_h^*. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Majorante konstruiert und es folgt, Folgerung 9.11 (Vergleichslemma),

$$\|u_1^\circ\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq \alpha R^2 = \frac{R^2}{4} \|f^\circ\|_{l^\infty(\omega_h)}.$$

Die letzte Abschätzung kommt daher, dass $(0, 0)$ nicht in Ω oder in ω_h liegen muss.

Für die Funktion $u_1^*(\mathbf{x})$ benutzen wir die Folgerung 9.14. Für $\mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ ist $d(\mathbf{x}) = 0$, siehe Beispiel 9.7. Für $\mathbf{x} \in \omega_h^*$ ist

$$d(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \frac{1}{h^2}$$

mit $h = \max\{h_x, h_y\}$, da die Summanden die Form

$$\frac{1}{\bar{h}_x h_x^+}, \frac{1}{\bar{h}_x h_x^-}, \frac{1}{\bar{h}_y h_y^+}, \frac{1}{\bar{h}_y h_y^-}$$

besitzen, Beispiel 9.7. Damit erhalten wir

$$\|u_1^*\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq \|D^+ f^*\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq h^2 \|f^*\|_{l^\infty(\omega_h)}.$$

Zusammenfassung der Abschätzungen für $u_1^\circ(\mathbf{x})$, $u_1^*(\mathbf{x})$ und $u_2(\mathbf{x})$ liefert die Stabilität in der $l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)$ -Norm bezüglich der Randbedingung und der rechten Seite.

Lemma 9.15 *Die diskrete Lösung der Dirichlet-Aufgabe erfüllt*

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)} + \frac{R^2}{4} \|\phi\|_{l^\infty(\omega_h^\circ)} + h^2 \|\phi\|_{l^\infty(\omega_h^*)}$$

mit $R \geq \|\mathbf{x}\|_2$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und $h = \max\{h_x, h_y\}$.

Konvergenz

Satz 9.16 *Seien u die Lösung der Poisson-Gleichung und u_h ihre Finite-Differenzen-Approximation (9.4). Dann gilt*

$$\|(u - u_h)\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq Ch^2$$

mit $h = \max\{h_x, h_y\}$.

Beweis: Für den Fehler $e_{ij} = u(x_i, y_j) - u^h(x_i, y_j)$ gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} \Lambda e(\mathbf{x}) &= -\psi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, & \psi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(h^2), \\ \Lambda^* e(\mathbf{x}) &= -\psi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^*, & \psi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1), \\ e(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

wobei $\psi(\mathbf{x})$ der Approximationsfehler, Abschnitt 9.2, ist. Mit der Stabilitätsabschätzung folgt

$$\|e\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \frac{R^2}{4} \|\psi\|_{l^\infty(\omega_h^\circ)} + h^2 \|\psi\|_{l^\infty(\omega_h^*)} = \mathcal{O}(h^2).$$

■

9.6 Das Dirichlet–Problem im Rechteck

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, dass $\Omega = (0, l_x) \times (0, l_y)$. Insbesondere wird nun keine Modifikation der Differenzensterne in Randnähe mehr nötig sein. Die Konvergenz des der Finite–Differenzen–Approximation ist durch den vorangegangenen Abschnitt geklärt. Bei der Berechnung der Finite–Differenzen–Lösung muss man ein großes lineares Gleichungssystem $Au = f$ lösen. In diesem Abschnitt wird ein Weg aufgezeigt, der die Lösung dieses Gleichungssystem im Falle eines Rechteckgebietes in einer fast optimalen Art und Weise erlaubt.

Die stetige Aufgabe lautet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = (0, l_x) \times (0, l_y), \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

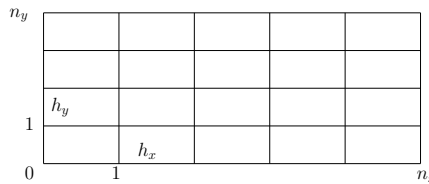
und die diskrete Aufgabe

$$\begin{aligned} \Lambda u &= \phi & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ u &= g & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

wobei der diskrete Laplace–Operator die Form

$$\Lambda u = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_y^2} =: \Lambda_x u + \Lambda_y u$$

mit $h_x = l_x/n_x, h_y = l_y/n_y, i = 0, \dots, n_x, j = 0, \dots, n_y$, besitzt.



Wir betrachten das folgende Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} \Lambda v + \lambda v &= 0 & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ v &= 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

und suchen die Lösung in der Produktform (Separationsansatz)

$$v_{ij}^{(\mathbf{k})} = v_i^{(k_x),x} v_j^{(k_y),y}, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y)^T.$$

Es gilt

$$\Lambda v_{ij}^{(\mathbf{k})} = \Lambda_x v_i^{(k_x),x} v_j^{(k_y),y} + v_i^{(k_x),x} \Lambda_y v_j^{(k_y),y} = -\lambda_{\mathbf{k}} v_i^{(k_x),x} v_j^{(k_y),y}$$

mit

$$v_0^{(k_x),x} = v_{n_x}^{(k_x),x} = v_0^{(k_y),y} = v_{n_y}^{(k_y),y} = 0.$$

Damit kann man das Eigenwertproblem separieren

$$\frac{\Lambda_x v_i^{(k_x),x}}{v_i^{(k_x),x}} + \lambda_{k_x}^{(x)} = -\frac{\Lambda_y v_j^{(k_y),y}}{v_j^{(k_y),y}} - \lambda_{k_y}^{(y)}$$

mit $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda_{k_x}^{(x)} + \lambda_{k_y}^{(y)}$. Beide Seiten müssen konstant sein, da die eine nur von i (d.h. von x) abhängt und die andere nur von j (d.h. von y). Die Zerlegung von $\lambda_{\mathbf{k}}$ sei so gewählt, dass die Konstante gleich Null ist. Man erhält

$$\Lambda_x v_i^{(k_x),x} + \lambda_{k_x}^{(x)} v_i^{(k_x),x} = 0, \quad \Lambda_y v_j^{(k_y),y} + \lambda_{k_y}^{(y)} v_j^{(k_y),y} = 0.$$

Die Lösung dieser Eigenwertprobleme ist bekannt:

$$v_i^{(k_x),x} = \sqrt{\frac{2}{l_x}} \sin\left(\frac{k_x \pi i}{n_x}\right), \quad \lambda_{k_x}^{(x)} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \pi}{2n_x}\right),$$

$$i = 0, \dots, n_x, \quad k_x = 1, \dots, n_x - 1,$$

$$v_j^{(k_y),y} = \sqrt{\frac{2}{l_y}} \sin\left(\frac{k_y \pi j}{n_y}\right), \quad \lambda_{k_y}^{(y)} = \frac{4}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{k_y \pi}{2n_y}\right),$$

$$j = 0, \dots, n_y, \quad k_y = 1, \dots, n_y - 1.$$

Die Lösung des gesamten Eigenwertproblems ist dann

$$v_{ij}^{(\mathbf{k})} = \frac{2}{\sqrt{l_x l_y}} \sin\left(\frac{k_x \pi i}{n_x}\right) \sin\left(\frac{k_y \pi j}{n_y}\right), \quad \lambda_{\mathbf{k}} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \pi}{2n_x}\right) + \frac{4}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{k_y \pi}{2n_y}\right).$$

Bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle u, v \rangle = h_x h_y \sum_{\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x})$$

sind die Eigenvektoren orthonormal

$$\langle v^{(\mathbf{k})}, v^{(\mathbf{m})} \rangle = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{m}}.$$

Das obige Differenzschema ist äquivalent zu einem Gleichungssystem $Au = f$. Die Knoten nennt man lexikographisch numeriert, wenn der Knoten (i_1, j_1) vor dem Knoten (i_2, j_2) kommt, falls für die entsprechenden Koordinaten gilt

$$y_1 < y_2 \quad \text{oder} \quad (y_1 = y_2) \wedge (x_1 < x_2).$$

Bei lexikographischer Numerierung der Knoten, erhält man für die inneren Knoten ein System der Gestalt

$$A = \text{BlockTriDiag}(C, B, C) \in \mathbb{R}^{(n_x-1)(n_y-1) \times (n_x-1)(n_y-1)},$$

$$B = \text{TriDiag}\left(-\frac{1}{h_x^2}, \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}, -\frac{1}{h_x^2}\right) \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)},$$

$$C = \text{Diag}\left(-\frac{1}{h_y^2}\right) \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)},$$

$$f = \begin{cases} \phi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, \\ \phi(\mathbf{x}) + \frac{g(x \pm h_x, y)}{h_x^2} & i \in \{1, n_x - 1\}; j \notin \{1, n_y - 1\}, \\ \phi(\mathbf{x}) + \frac{g(x, y \pm h_y)}{h_y^2} & i \notin \{1, n_x - 1\}; j \in \{1, n_y - 1\}, \\ \phi(\mathbf{x}) + \frac{g(x \pm h_x, y)}{h_x^2} + \frac{g(x, y \pm h_y)}{h_y^2} & i \in \{1, n_x - 1\}; j \in \{1, n_y - 1\}. \end{cases}$$

Die letzte Zeile ist für die inneren Knoten, die in den Eckpunkten von ω_h° liegen. Bei dieser Herangehensweise sind die bekannten Randwerte bereits eingesetzt und tauchen nun auf der rechten Seite auf. Die Matrizen B, C weisen für die Knoten, die einen Nachbarn auf dem Rand besitzen, auch noch Modifikationen auf.

Das Gleichungssystem ist:

1. *hoch dimensioniert*, $N = (n_x - 1)(n_y - 1) \sim 10^3 \dots 10^7$,
2. *schwach besetzt*, pro Zeile/Spalte gibt es nur 3,4 oder 5, Nichtnulleinträge,
3. *symmetrisch*, damit sind alle Eigenwerte reell,

4. *positiv definit*, weil alle Eigenwerte positiv sind. Man hat

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= \lambda_{(1,1)} \sim \pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) = \mathcal{O}(1), \\ \lambda_{\max} &= \lambda_{(n_x-1, n_y-1)} \sim \pi^2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) = \mathcal{O}(h^{-2})\end{aligned}$$

mit $h = \max\{h_x, h_y\}$,

5. *schlecht konditioniert*. Für die Spektralkonditionszahl einer symmetrisch und positiv definiten Matrix gilt

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \mathcal{O}(h^{-2}).$$

Da die Matrix sehr groß ist, bieten sich iterative Löser an. Die Anzahl der Iterationen vieler iterativer Löser hängt von der Konditionszahl ab. Der wesentliche Kostenfaktor bei iterativen Lösern sind Matrix–Vektor–Multiplikationen (oft eine pro Iteration). Der Aufwand von Matrix–Vektor–Multiplikationen für schwach besetzte Matrizen ist proportional zur Anzahl der Unbekannten.

- (gedämpftes) Jacobi–Verfahren, SOR: Anzahl der Iterationen verhält sich proportional zu $\kappa_2(A)$. Verfeinert man das Gitter einmal $h \rightarrow h/2$, dann erhöht sich die Anzahl der Unbekannten um den Faktor 4 (in zwei Dimensionen) und auch die Anzahl der Iterationen erhöht sich um den Faktor 4. Damit steigen die Gesamtkosten um den Faktor 16.
 - (vorkonditioniertes) Verfahren der konjugierten Gradienten: die Anzahl der Iterationen ist proportional zu $\sqrt{\kappa_2(A)}$. Damit steigen die Kosten bei jeder Verfeinerung um den Faktor 8.
 - Mehrgitterverfahren: Hier ist die Anzahl der Iterationen konstant. Die Gesamtkosten sind damit proportional zur Anzahl der Unbekannten. Das ist optimal, da beim Lösen jede Unbekannte mindestens einmal „angefasst“ werden muss.
6. *besonders strukturiert*. Eine direkte Lösungsmethode basiert auf der Benutzung der schnellen Fourier–Transformation (fast Fourier transform, FFT). Setze

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} v^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x})$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$f_{\mathbf{k}} = \langle f, v^{(\mathbf{k})} \rangle = \frac{2}{h_x h_y} \sqrt{l_x l_y} \sum_{i,j} f_{ij} \sin\left(\frac{k_x \pi i}{n_x}\right) \sin\left(\frac{k_y \pi j}{n_y}\right).$$

Die Lösung $u(\mathbf{x})$ sucht man in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x})$$

mit unbekanntem Koeffizienten $u_{\mathbf{k}}$. Damit erhält man

$$Au = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} A v^{(\mathbf{k})} = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}} v^{(\mathbf{k})}.$$

Da die Eigenfunktionen eine Basis des Raumes der Gitterfunktionen bilden, liefert der Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite $u_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}/\lambda_{\mathbf{k}}$ oder

$$u_{ij} = \frac{2}{h_x h_y} \sqrt{l_x l_y} \sum_{k_x, k_y} \frac{f_{ij}}{\lambda_{\mathbf{k}}} \sin\left(\frac{k_x \pi i}{n_x}\right) \sin\left(\frac{k_y \pi j}{n_y}\right).$$

Der numerische Aufwand beträgt

$$\mathcal{O}(n_x n_y \log_2 n_x + n_x n_y \log_2 n_y) = \mathcal{O}(N \log_2 N), \quad N = (n_x - 1)(n_y - 1),$$

Operationen und er ist damit fast optimal.