

Kapitel 6

Darstellungsformeln für Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen

6.1 Fundamentallösung

Man kennt eine spezielle Lösung der Poisson–Gleichung auf \mathbb{R}^d , die man Newton–Potential oder Fundamentallösung nennt.

Definition 6.1 *Fundamentallösung.* Im \mathbb{R}^d werden die Funktionen $\Phi \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\Phi(\mathbf{x}) := \begin{cases} -c_{\Phi,2} \log \|\mathbf{x}\|_2 & \text{für } d = 2, \\ c_{\Phi,d} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^{d-2}} & \text{für } d \geq 3 \end{cases} \quad (6.1)$$

mit den Konstanten

$$c_{\Phi,2} = \frac{1}{2\pi}, \quad c_{\Phi,d} = \frac{1}{d(d-2)\omega_d}, \quad d \geq 3,$$

ω_d – Volumen der Einheitskugel in \mathbb{R}^d , Fundamentallösungen oder Newton–Potential genannt. \square

Bemerkung 6.2

- 1.) Da $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(r)$, wird auch $\Phi(r)$ geschrieben.
- 2.) Tatsächlich gilt $\Phi \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$. *Übungsaufgabe, Integrale berechnen*
- 3.) Es gilt sogar $\Phi \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^d)$. Der Gradient hat die dimensionsunabhängige Gestalt

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^{d-1}} = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^d}. \quad (6.2)$$

Man nutzt, dass $\nabla \|\mathbf{x}\|_2 = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$. *Übungsaufgabe zu zeigen, dass diese Funktion in $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^d)$.* \square

Satz 6.3 *Es gilt $-\Delta \Phi = \delta_0$ im Sinne der Distributionen (Dirac–Distribution).*

Beweis: Wir betrachten zuerst $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. In diesen Punkten kann man die Ableitungen klassisch berechnen. Ausgehend vom Gradienten (6.2) erhält man mit Quotientenregel

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(\mathbf{x}) &= \nabla \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{1}{d\omega_d} \sum_{k=1}^d \partial_k \left(\frac{x_k}{\|\mathbf{x}\|_2^d} \right) = -\frac{1}{d\omega_d} \sum_{k=1}^d \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^d} - \frac{x_k d \|\mathbf{x}\|_2^{d-1} x_k}{\|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{x}\|_2^{2d}} \right) \\ &= -\frac{1}{d\omega_d} \left(\frac{d}{\|\mathbf{x}\|_2^d} - \frac{d}{\|\mathbf{x}\|_2^{d+2}} \sum_{k=1}^d x_k^2 \right) = \frac{1}{d\omega_d} \left(\frac{d}{\|\mathbf{x}\|_2^d} - \frac{d}{\|\mathbf{x}\|_2^d} \right) = 0.\end{aligned}$$

Für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ betrachten wir eine beliebige Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Man erhält mit der Definition der Ableitung einer Distribution, partieller Integration, dem kompakten Träger von φ , der Regularität von Φ und nochmaliger partieller Integration

$$\begin{aligned}\langle -\Delta\Phi, \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}^d} \Phi \Delta\varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\Phi \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \nabla\Phi \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \Delta\Phi \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} \, ds \right].\end{aligned}$$

Der erste Summand verschwindet, da $\Delta\Phi$ verschwindet. Die Normalenableitung im Randintegral ist die Richtungsableitung nach $-\mathbf{s}/\varepsilon$ (Normale ist zu $\mathbf{0}$ hin gerichtet, Division durch ε wegen Normierung). Mit der Darstellung des Gradienten von Φ erhält man ($\partial_{\mathbf{s}/\varepsilon} \Phi = \nabla\Phi \cdot \mathbf{s}/\varepsilon$)

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \frac{1}{d\omega_d} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{d+1}} \, ds = \frac{1}{d\omega_d \varepsilon^{d-1}} \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \, ds \\ &= \frac{1}{|\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)|} \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \, ds.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Das ergibt (beachte ω_d ist das Volumen der Einheitskugel)

$$\langle -\Delta\Phi, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \, ds = \varphi(\mathbf{0}).$$

Dadurch, dass (6.3) gerade der Mittelwert ist, ist auch die Wahl der Vorfaktoren motiviert. \blacksquare

Die Fundamentallösung gibt uns ein Mittel zum Lösen der Poisson-Gleichung im Gesamttraum in die Hand.

Satz 6.4 Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger. Dann löst die Funktion

$$u(\mathbf{x}) := (\Phi * f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}\tag{6.4}$$

die Gleichung $-\Delta u = f$ im Sinne der Distributionen. Es gilt $u \in W_{\text{loc}}^{1, \infty}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: Sei zunächst $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt mit Vertauschung von Integration und Differentiation, der Definition einer regulären Distribution und Satz 6.3

$$\begin{aligned}-\Delta u(\mathbf{x}) &= -\Delta(\Phi * f)(\mathbf{x}) = \langle \langle -\Delta\Phi, \cdot \rangle * f, \mathbf{x} \rangle = \langle -\Delta\Phi, f(\mathbf{x} - \cdot) \rangle \\ &= \delta_{\mathbf{0}}(f(\mathbf{x} - \cdot)) = f(\mathbf{x})\end{aligned}$$

(Funktionswert von f für $\cdot = \mathbf{0}$).

Nun betrachten wir ein allgemeines $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit Träger $S := \text{supp}(f) \subset \mathbb{R}^d$. Für die Fundamentallösung gilt sogar $\Phi \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ für ein $p > 1$. Es gilt insbesondere $f \in L^q(S)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, und in diesem Raum wird f mit Funktionen $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit Träger $\text{supp}(f_k) \subset S$ approximiert. Das geht nach Satz 4.4. Die zugehörigen Funktionen $u_k := \Phi * f_k$ erfüllen

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R)} |u_k(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| &\leq \sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R)} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k(\mathbf{y}) - f_m(\mathbf{y})| |\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R)} \int_S |f_k(\mathbf{y}) - f_m(\mathbf{y})| |\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \\ &\leq \|f_k - f_m\|_{L^q(S)} \sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R)} \|\Phi(\mathbf{x} - \cdot)\|_{L^p(S)} \\ &\leq \|f_k - f_m\|_{L^q(S)} \|\Phi\|_{L^p(S^*)} \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Höldersche Ungleichung genutzt wurde und S^* so gewählt wurde, dass

$$S \subset S^* \quad \forall \mathbf{y} \in S, \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R).$$

Damit folgt, dass u_k lokal (in $B(\mathbf{0}, R)$) gleichmäßig (unabhängig von \mathbf{x}) konvergiert, da der Wert des Supremums für eine feste Funktion und ein festes Gebiet genommen wird, also eine Konstante ist. Insbesondere folgt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Mit einer ähnlichen Rechnung erhält man auch $\nabla u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, indem man die Ableitung in das Integral zieht wo diese nur auf Φ wirkt und man nutzt, dass $\nabla \Phi \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Insbesondere gilt $u_k \rightarrow u$ und $f_k \rightarrow f$ im Sinne der Distributionen. Da die Ableitungen von Distributionen bezüglich der Konvergenz stetig sind, impliziert mit dem ersten Teil des Beweises dies $-\Delta u = f$. \blacksquare

6.2 Greensche Funktionen

Die Formel (6.4) ist sehr hilfreich, denn die Lösung u wird explizit als Integral dargestellt. Das nächste Ziel besteht darin, eine ähnliche Darstellung für ein beschränktes Gebiet Ω zu gewinnen.

Wir nehmen an, dass $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es folgt insbesondere $\Delta u \in L^p(\Omega)$ für $p > d/2$. Die Funktion u sei Lösung der Poisson-Gleichung im Sinne der Distributionen und die Spur von u auf dem Rand $\partial\Omega$ werde mit g bezeichnet. Dann setzen wir $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ und kehren mit dieser Funktion die obige Rechnung um (durch zweimalige Anwendung des Satzes von Gauß)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \delta_{\mathbf{x}}(u) = (-\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \cdot))(u) = \int_{\Omega} (-\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{s}) \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \nabla u(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, ds. \end{aligned} \tag{6.5}$$

In dieser Rechnung wurde nur $-\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \cdot) = \delta_{\mathbf{x}}$ (Satz 6.3) verwendet. Wir wollen nun die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ so modifizieren, dass in der obigen Rechnung das letzte Integral wegfällt. Dazu setzen wir

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + H(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

mit $H : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(\mathbf{x}, \cdot) \in H^2(\Omega)$ und $\Delta_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x}, \cdot) = 0$. Dazu muss H noch so gewählt sein, dass $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und für alle $\mathbf{y} \in \partial\Omega$. Damit hätten wir das Ziel erreicht und (6.5) wird

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{s})\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Nun ist die Lösung u durch ein Integral mit den Daten f und g dargestellt. Beachte, diese Darstellung ist zugeschnitten auf Dirichlet–Randwerte.

Definition 6.5 *Greensche Funktion.* Für jedes $\mathbf{x} \in \Omega$ sei die Funktion $H(\mathbf{x}, \cdot)$ Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x}, \cdot) &= 0 && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ H(\mathbf{x}, \cdot) &= -\Phi(\mathbf{x} - \cdot) && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann heißt die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ Greensche Funktion zum Dirichlet–Problem. \square

Satz 6.6 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^2 –Rand. Dann existiert eine Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zum Dirichlet–Problem gemäß Definition 6.5 mit $H(\mathbf{x}, \cdot) \in H^2(\Omega)$. Für jedes $u \in C(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ mit $f := -\Delta u \in L^p(\Omega)$, $p > d/2$ und g der Spur von u auf $\partial\Omega$ und jedes $\mathbf{x} \in \Omega$ gilt*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{s})\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (6.6)$$

Beweis: Die Existenz von $H(\mathbf{x}, \cdot)$ folgt aus Folgerung 5.6, da die Randwerte hinreichend glatt sind. Die Regularität von $H(\mathbf{x}, \cdot)$ folgt aus Satz 5.8. Das gibt die Existenz der Greenschen Funktion gemäß Definition 6.5.

Zur Darstellungsformel muss man die Rechnung in (6.5) rechtfertigen, da im Satz $u \notin \mathcal{D}(\Omega)$. Dazu wiederholt man die Rechnung aus dem Beweis von Satz 6.3 für $\varphi = u$. \blacksquare

Nun betrachten wir das Neumann–Problem zur Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= \psi && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir hatten für das Dirichlet–Problem die Funktion H so gewählt, dass in (6.5) das zweite Randintegral verschwindet. Für das Neumann–Problem wird nun das erste Randintegral zu Null gesetzt. Wir wählen also eine harmonische Funktion $H(\mathbf{x}, \cdot)$, für die

$$\nabla_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = -\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega$$

gilt. Es folgt für

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + H(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

dass

$$\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \cdot) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Damit liefert (6.5) die Darstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\psi(\mathbf{s}) \, ds.$$

Bemerkung 6.7 Man kann die Greensche Funktion in einer Reihe von Spezialfällen explizit angeben, so zum Beispiel auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+^d := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$ oder auf einer Kugel, siehe Literatur. \square

Bemerkung 6.8 Mit Hilfe der Greenschen Funktion hat man etwas geschafft, was mit Energiemethoden nicht möglich war: Man hat zu Randwerten g eine Lösung gefungen, obwohl nur vorausgesetzt war, dass g stetig ist. Die große Einschränkung bei diesem Verfahren ist, dass es so nur für den Laplace–Operator funktioniert. \square