Kapitel 4

Sobolev–Räume

Zu diesem Abschnitt ist das Buch von Adams [Ada75, AF03] zu empfehlen.

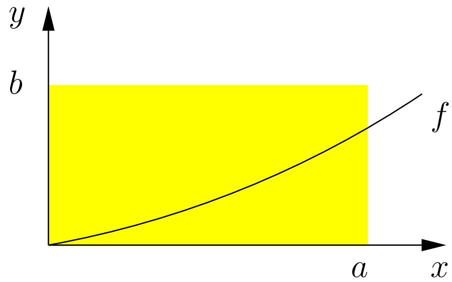
4.1 Elementare Ungleichungen

Viele Ungleichungen der Analysis lassen sich aus einem einfachen geometrischen Argument ableiten.

Lemma 4.1 *Sei $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$*

$$ab \leq \int_0^a f(x)\ dx + \int_0^b f^{-1}(y)\ dy.$$

Beweis:



Das Intervall $(0, a)$ wird auf der x–Achse abgetragen und das Intervall $(0, b)$ auf der y–Achse. Dann sind ab der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks, $\int_0^a f(x)\ dx$ die Fläche unterhalb der Kurve und $\int_0^b f^{-1}(y)\ dy$ die Fläche zwischen der positiven y–Achse und der Kurve. Damit ist die Ungleichung bewiesen. Gleichheit tritt genau dann auf, wenn $f(a) = b$ gilt. ■

Die Young[1]sche Ungleichung

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2 \quad \forall\ a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

erhält man aus diesem Lemma mit $f(x) = \varepsilon x$, $f^{-1}(y) = \varepsilon^{-1}y$. Sie lässt sich auch direkt mit der Binomischen Formel beweisen. Zum Beweis der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p}{p}a^p + \frac{1}{q\varepsilon^q}b^q, \quad \forall\ a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

[1] Young

mit $p^{-1} + q^{-1} = 1, p, q \in (1, \infty)$ wählt man $f(x) = x^{p-1}$, $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ und wendet das obige Lemma auf die Intervalle mit den Grenzen εa und $\varepsilon^{-1} b$ an.

Die Cauchy[2]–Schwarz[3]–Ungleichung

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \ \ \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

ist bereits bekannt. Man kann sie mit Hilfe der Youngschen–Ungleichung beweisen. Dazu stellt man zunächst fest, dass die Cauchy–Schwarz–Ungleichung richtig ist, falls einer der beiden Vektoren verschwindet. Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ mit $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1$. Man erhält aus der Youngschen Ungleichung

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \le \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = 1.$$

Damit gilt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung für $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Sind $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$ beliebig, nutzt man die Homogenität der Cauchy–Schwarz–Ungleichung aus. Aus der Gültigkeit der Cauchy–Schwarz–Ungleichung für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ folgt durch Skalierung

$$\left| (\underbrace{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^{-1} \tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{x}}, \underbrace{\|\tilde{\mathbf{y}}\|_2^{-1} \tilde{\mathbf{y}}}_{\mathbf{y}}) \right| \le 1$$

Die beiden Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ haben die Norm 1. Also

$$\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2 \|\tilde{\mathbf{y}}\|_2} |(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})| \le 1.$$

Das war zu beweisen.

Die verallgemeinerte Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

mit $p^{-1} + q^{-1} = 1, p, q \in (1, \infty)$ beweist man auf dem gleichen Wege mit Hilfe der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung.

Lemma 4.2 ***Höldersche Ungleichung.*** *Sei $p^{-1} + q^{-1} = 1, p, q \in (1, \infty)$. Wenn $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$, dann ist $uv \in L^1(\Omega)$ und es gilt*

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

(Für $p = q = 2$ wird dies Cauchy–Schwarz–Ungleichung genannt.)

Beweis: Man muss zunächst zeigen, dass $|uv|$ durch eine integrierbare Funktion abgeschätzt werden kann. Man setzt in der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung $\varepsilon = 1$, $a = |u(\mathbf{x})|$ und $b = |v(\mathbf{x})|$. Dann folgt

$$|u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x})| \le \frac{1}{p} |u(\mathbf{x})|^p + \frac{1}{q} |v(\mathbf{x})|^q.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung nach Voraussetzung integrierbar ist, ist $uv \in L^1(\Omega)$ gezeigt. Auch die Höldersche Ungleichung ist bereits für den Fall $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^q(\Omega)} = 1$ durch diese Ungleichung bewiesen

$$\int_\Omega |u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x})| \ d\mathbf{x} \le \frac{1}{p} \int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p \ d\mathbf{x} + \frac{1}{q} \int_\Omega |v(\mathbf{x})|^q \ d\mathbf{x} = 1.$$

[2] Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

[3] Schwarz

Die allgemeine Ungleichung folgt nun durch ein Homogenitätsargument wie bei der Cauchy–Schwarz–Ungleichung für den Fall dass beide Funktionen nicht fast überall verschwinden. Im Fall, dass eine Funktion fast überall verschwindet, ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. ■

4.2 Definition und Eigenschaften der Sobolev–Räume $W^{k,p}(\Omega)$

Es werden jetzt neue Banach[4]–Räume von Funktionen eingeführt. Dies sind Räume von k–fach distributionell differenzierbaren Funktionen mit Ableitungen in $L^p(\Omega)$.

Definition 4.3 *Sobolev[5]–Räume.* Für $k \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$ wird der Sobolev–Raum $W^{k,p}(\Omega)$ wie folgt definiert

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \ : \ D^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L^p(\Omega) \ \forall \ \boldsymbol{\alpha} \text{ mit } |\boldsymbol{\alpha}| \le k\}.$$

Diese Räume sind ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \le k} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} u\|_{L^p(\Omega)} \, . \tag{4.1}$$

□

Damit ist folgendes gemeint. Aus $u \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, folgt insbesondere $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Damit definiert u eine Distribution. Dann existieren auch die Ableitungen $D^{\boldsymbol{\alpha}} u$ als Distributionen. Mit der Aussage $D^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L^p(\Omega)$ ist gemeint, dass die Distribution $D^{\boldsymbol{\alpha}} u \in \mathcal{D}'$ durch eine Funktion in $L^p(\Omega)$ dargestellt werden kann.

Elemente in $W^{k,p}(\Omega)$ kann man addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren. Das Ergebnis ist wieder eine Funktion in $W^{k,p}(\Omega)$. Damit ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Vektorraum. Man rechnet leicht nach, dass (4.1) tatsächlich eine Norm ist. *Übungsaufgabe*

Es sind $D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ für $\boldsymbol{\alpha} = (0, \ldots, 0)$ und $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Nun wird untersucht, ob $W^{k,p}(\Omega)$ vollständig ist. Dazu betrachten wir eine Cauchy–Folge $\{u_j\} \in W^{k,p}(\Omega)$. Aus der Normdefinition (4.1) folgt, dass $\{u_j\}$ eine Cauchy–Folge in $L^p(\Omega)$ ist und da dieser Raum vollständig ist, besitzt sie einen Grenzwert $u \in L^p(\Omega)$. Ebenso sind auch die Folgen aller Ableitungen $\{D^{\boldsymbol{\alpha}} u_j\}$ Cauchy–Folgen in $L^p(\Omega)$ und besitzen dort Grenzwerte $u_{\boldsymbol{\alpha}}$. Wegen der Vertauschbarkeit von Ableitung und Distributionskonvergenz, (3.5), gilt

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} u_j \to D^{\boldsymbol{\alpha}} u \ \text{ in } \mathcal{D}'.$$

Da nach Konstruktion $D^{\boldsymbol{\alpha}} u_j \to u_{\boldsymbol{\alpha}}$, ist die Distributionsableitung $D^{\boldsymbol{\alpha}} u$ darstellbar durch die $L^p(\Omega)$–Funktion $u_{\boldsymbol{\alpha}}$. Damit ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Satz 4.4 Dichtheit von $C^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in W^{k,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Dann gelten*

i) Für $\Omega' \subset \Omega$ mit dist$(\overline{\Omega'}, \partial\Omega) > 0$ und eine Dirac–Folge $\{\psi_j\} \in C_0^\infty(\Omega)$ konvergieren die Funktionen $f_j := f * \psi_j \in C^\infty(\Omega')$

$$\|f - f_j\|_{W^{k,p}(\Omega')} \to 0.$$

ii) Für allgemeines Ω gibt es Funktionen $f_j \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit $\|f - f_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$.

[4] Banach
[5] Sobolev

Beweis: Siehe Literatur, zum Beispiel [Alt99], Satz 1.21, Satz 2.10, [Ada75], Lemma 3.15. ■

Dieser Satz erlaubt es, die Sobolevräume als Vervollständigung der Funktionen aus $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm (4.1) von $W^{k,p}(\Omega)$ zu charakterisieren.

Definition 4.5 Der Sobolev–Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm von $W^{k,p}(\Omega)$

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

□

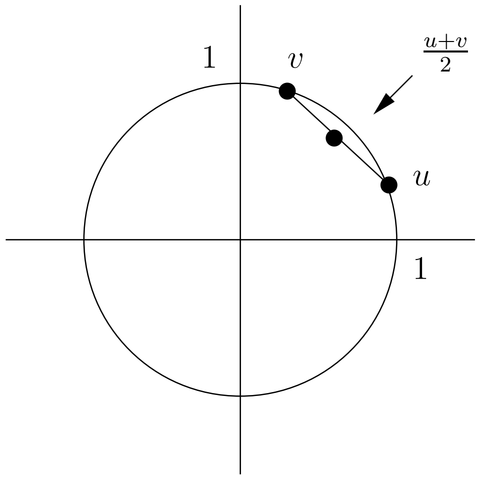
Bemerkung 4.6

1. Sei Omega ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand Γ. Für die dualen Räume der Lebesgue–Räume $L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ gilt

$$\begin{aligned} (L^p(\Omega))^* &= L^q(\Omega) \ \text{ mit } \ p,q \in (1,\infty),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \\ \left(L^1(\Omega)\right)^* &= L^\infty(\Omega), \\ (L^\infty(\Omega))^* &\neq L^1(\Omega). \end{aligned}$$

   Die Räume $L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)$ sind nicht reflexiv.

2. Die Sobolev–Räume sind:
   - Banach–Räume (vollständig und normiert),
   - separabel (besitzen eine abzählbare Basis),
   - uniform konvex für $p \in (1,\infty)$, d.h. für jedes $\varepsilon \in (0,2]$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so, dass falls für $u, v \in X$ mit $\|u\|_X = \|v\|_X = 1$ und $\|u-v\|_X > \varepsilon$ gilt, dass $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_X \le 1-\delta(\varepsilon)$.



   - reflexiv (der duale Raum des dualen Raums kann mit dem ursprünglichen Raum identifieziert werden) für $p \in (1,\infty)$.

3. Der Sobolev–Raum $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ist ein Hilbert–Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le k} \int_\Omega D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x}) D^{\boldsymbol{\alpha}} v(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}.$$

□

4.3 Die Spur (Verallgemeinerte Randfunktion)

Satz 4.7 Spursatz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, mit Lipschitz–Rand. Dann besitzen die Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$, Randwerte in folgendem Sinne. Es gibt genau einen linearen stetigen Operator $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)$, der für Funktionen $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ die klassischen Randwerte liefert*

$$g(\mathbf{x}) := \gamma u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Gamma,\ \forall\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega).$$

Das heißt $\gamma u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in\Gamma}$.

Da ein linearer und stetiger Operator beschränkt ist, gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|g\|_{L^p(\Gamma)} = \|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\ \ \forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$$

oder

$$\|\gamma\|_{\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega),L^p(\Gamma))} \leq C.$$

Der Operator γ wird Spuroperator (trace operator) genannt. Für $u \in C(\overline{\Omega})$ erhält man die klassischen Randwerte. Für alle anderen Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $\{u_k\} \in C(\overline{\Omega})$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, Satz 4.4. Die Spur von u ist definiert als $\gamma u = \lim_{k\to\infty}(\gamma u_k)$.

Es gelten

$$\begin{aligned} \gamma u(\mathbf{x}) &= 0\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \gamma D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x}) &= 0\ \forall u \in W_0^{k,p}(\Omega), |\boldsymbol{\alpha}| \leq k-1. \end{aligned}$$

4.4 Sobolev–Räume mit nichtganzzahligem und negativem Exponenten

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $p \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definition 4.8 Der Raum $W^{-k,q}(\Omega), k \in \mathbb{N}, k \geq 0$, ist wie folgt definiert

$$W^{-k,q}(\Omega) = \{\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}'(\Omega)\ :\ \|\varphi\|_{W^{-k,q}} < \infty\}$$

mit

$$\|\varphi\|_{W^{-k,q}} = \sup_{u\in\mathcal{D}(\Omega),u\neq 0} \frac{\langle \varphi, u\rangle}{\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

□

Lemma 4.9 *Es gilt $W^{-k,q}(\Omega) = \left[W_0^{k,p}(\Omega)\right]^*$, das heißt, $W^{-k,q}(\Omega)$ kann mit dem dualen Raum zum $W_0^{k,p}(\Omega)$ identifiziert werden.*

Es gilt

$$\ldots \subset W^{2,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega) \subset W^{-2,q}(\Omega) \ldots$$

Definition 4.10 Sei $s \in \mathbb{R}$. Der Sobolev–Slobodeckij[6]–Raum $H^s(\Omega)$ ist wie folgt definiert:

- $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$, $s \in \mathbb{Z}$,

[6] Slobodeckij

- $s > 0$ mit $s = k + \sigma$, $\sigma \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s}^2 &= \|u\|_{H^k}^2 + |u|_{k+\sigma}^2 \\ (u,v)_{H^s} &= (u,v)_{H^k} + (u,v)_{k+\sigma},\ |u|_{k+\sigma}^2 = (u,u)_{k+\sigma} \\ (u,v)_{k+\sigma} &= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} \int_\Omega \int_\Omega \frac{(D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x}) - D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{y}))\,(D^{\boldsymbol{\alpha}} v(\mathbf{x}) - D^{\boldsymbol{\alpha}} v(\mathbf{y}))}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2^{d+2\sigma}}\, d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

- $s < 0$: $H^s(\Omega) = \left[H_0^{-s}(\Omega)\right]^*$ mit $H_0^{-s}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{-s}}}$.

□

4.5 Satz über äquivalente Normierungen

Definition 4.11 Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen auf dem linearen Raum X äquivalent, wenn Konstanten C_1, C_2 existieren mit

$$C_1 \|u\|_1 \le \|u\|_2 \le C_2 \|u\|_1 \ \ \forall\ u \in X.$$

□

Viele wichtige Eigenschaften, wie Stetigkeit und Konvergenz, ändern sich beim Übergang zu einer äquivalenten Norm nicht.

Satz 4.12 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Gebiet mit $C^{0,1}$–Rand Γ, $p \in [1,\infty]$, $k = 1, 2, \ldots$. Das System $\{f_i\}_{i=1}^l$ sei ein System von Halbnormen, d.h.*

1) $f_i\ :\ W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,

2) $\exists C_i > 0$ mit $0 \le f_i(v) \le C_i \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, $\forall v \in W^{k,p}(\Omega)$,

3) gilt für $v \in P_{k-1} = \left\{\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le k-1} C_{\boldsymbol{\alpha}} x^{\boldsymbol{\alpha}}\right\}$, dass $f_i(v) = 0$, $i = 1, \ldots, l$, dann ist $v \equiv 0$.

Dann sind die Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ und die Norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^* &:= \left(\sum_{i=1}^l f_i^p(u) + |u|_{W^{k,p}(\Omega)}^p\right)^{1/p} \quad \text{mit} \\ |u|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} \int_\Omega |D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x})|^p \ d\mathbf{x}\right)^{1/p} \end{aligned}$$

äquivalent.

Bei Halbnormen muss aus $f_i(v) = 0$ nicht $v = 0$ folgen.

Beispiel 4.13 Im $W^{1,p}(\Omega)$ sind die folgenden Normen äquivalent zur Standardnorm:

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^* &= \left(\left|\int_\Omega u\ d\mathbf{x}\right|^p + |u|_{W^{1,p}(\Omega)}^p\right)^{1/p}, \\ \text{b)}\quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^* &= \left(\left|\int_\Gamma u\ d\mathbf{s}\right|^p + |u|_{W^{1,p}(\Omega)}^p\right)^{1/p}, \\ \text{c)}\quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^* &= \left(\int_\Gamma |u|^p\ d\mathbf{s} + |u|_{W^{1,p}(\Omega)}^p\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

In $W^{k,p}(\Omega)$ ist

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^* = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int_\Gamma \left|\frac{\partial^i u}{\partial \mathbf{n}^i}\right|^p \ d\mathbf{s} + |u|_{W^{k,p}(\Omega)}^p\right)^{1/p}$$

zur Standardnorm äquivalent. Hierbei ist $\mathbf{n}$ die Außennormale an Γ mit $\|\mathbf{n}\|_2 = 1$.

In $W_0^{k,p}(\Omega)$ wird die Voraussetzung der Glattheit des Randes nicht mehr benötigt. Es gilt

$$\|u\|^*_{W_0^{k,p}(\Omega)} = |u|_{W^{k,p}(\Omega)} ,$$

das heißt in den Räumen $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist die Standardhalbnorm äquivalent zur Standardnorm. Insbesondere gilt für $u \in H_0^1(\Omega)$ $(k = 1, p = 2)$

$$C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le C_2 nou H^1(\Omega).$$

Daraus folgt insbesondere, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.2}$$

□

4.6 Einige Ungleichungen in Sobolev–Räumen

Nun soll unter anderem das Ergebnis des letzten Beispieles verallgemeinert werden, indem gezeigt wird, dass man für eine Ungleichung vom Typ (4.2) nicht mehr benötigt, dass die Spur der Funktionen auf dem gesamten Rand verschwindet.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Rand Γ und $\Gamma_1 \subset \Gamma$ mit $\text{meas}_{\mathbb{R}^{d-1}}(\Gamma_1) = \int_{\Gamma_1} d\mathbf{s} > 0$.

Wir betrachten den Raum

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) \ : \ v|_{\Gamma_1} = 0 \right\} \subset W^{1,p}(\Omega) \text{ falls } \Gamma_1 \subset \Gamma, \\ V_0 &= W_0^{1,p}(\Omega) \text{ falls } \Gamma_1 = \Gamma \end{aligned}$$

mit $p \in [1, \infty)$.

Lemma 4.14 ***Friedrichs[7]–Ungleichung, Poincaré[8]–Ungleichung, Poincaré–Friedrichs–Ungleichung.*** *Seien $p \in [1, \infty)$ und $\text{meas}_{\mathbb{R}^{d-1}}(\Gamma_1) > 0$. Dann gilt für alle $u \in V_0$*

$$\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p \ d\mathbf{x} \le C_P \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p \ d\mathbf{x}.$$

Beweis: Wir zeigen die Ungleichung mit Hilfe des Satzes 4.12 über äquivalente Normierungen. Sei $f_1(u) \ : \ W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ mit

$$f_1(u) = \left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p \ d\mathbf{s} \right)^{1/p}.$$

Diese Funktion erfüllt:

1) $f_1(u)$ ist eine Halbnorm.
2) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\le f_1(u) = \left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p \ d\mathbf{s} \right)^{1/p} \le \left(\int_{\Gamma} |u(\mathbf{s})|^p \ d\mathbf{s} \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_{L^p(\Gamma)} = \|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \le C \|u\|_{W^{1,p}} . \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus der Stetigkeit des Spuroperators.

[7] Friedrichs
[8] Poincaré

3) Sei $v \in P_0$, d.h. eine Konstante. Dann folgt aus

$$0 = f_1(v) = \left(\int_{\Gamma_1} |v(\mathbf{s})|^p \ d\mathbf{s} \right)^{1/p} = |v| \left(\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^{d-1}} (\Gamma_1) \right)^{1/p},$$

dass $|v| = 0$ ist.

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über äquivalente Normierungen erfüllt. Es gibt also zwei Konstanten C_1, C_2mit

$$\underbrace{C_1 \left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p \ d\mathbf{s} + \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p \ d\mathbf{x} \right)^{1/p}}_{\|u\|^*_{W^{1,p}}} \le \|u\|_{W^{1,p}} \le C_2 \|u\|^*_{W^{1,p}} \ \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere gilt

$$\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p \ d\mathbf{x} + \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p \ d\mathbf{x} \le C_2^p \left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p \ d\mathbf{s} + \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p \ d\mathbf{x} \right)$$

oder

$$\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p \ d\mathbf{x} \le C_P \left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p \ d\mathbf{s} + \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p \ d\mathbf{x} \right)$$

mit $C_P = C_2^p$. Da $u \in V_0$ auf Γ_1 verschwindet, folgt die Behauptung des Lemmas. ∎

Auf V_0 wird damit $|\cdot|_{W^{1,p}}$ zu einer zu $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ äquivalenten Norm. Die klassische Friedrichs– oder Poincaré–Ungleichung ist für $\Gamma_1 = \Gamma$ und für $p = 2$ gegeben:

$$\|u\|_{L^2} \le C_P \|\nabla u\|_{L^2} \ \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

wobei die Konstante nur vom Durchmesser des Gebiets Ω abhängt.

Lemma 4.15 *Sei $\Omega' \subset \Omega$ mit $\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega') = \int_{\Omega'} d\mathbf{x} > 0$. Dann gilt für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ die Ungleichung*

$$\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p \ d\mathbf{x} \le C \left(\left| \int_{\Omega'} u(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} \right|^p + \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p \ d\mathbf{x} \right).$$

Beweis: Es wird wiederum der Satz 4.12 über äquivalente Normierungen genutzt, diesmal mit

$$f_1 \ : \ W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad f_1(u) = \left| \int_{\Omega'} u(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} \right|.$$

Es gilt:

1) $f_1(u)$ ist eine Halbnorm.
2) Mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} 0 \ &\le \ f_1(u) = \left| \int_{\Omega'} u(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} \right| \le \left(\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega') \right)^{1/q} \left(\int_{\Omega'} |u(\mathbf{x})|^p \ d\mathbf{x} \right)^{1/p} \\ &\le \ \left(\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega') \right)^{1/q} \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p \ d\mathbf{x} \right)^{1/p} \le \left(\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega') \right)^{1/q} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

3) Sei $v \in P_0$, d.h. eine Konstante. Dann folgt aus

$$0 = f_1(v) = \left| v \int_{\Omega'} d\mathbf{x} \right| = |v| \, \mathrm{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega') \implies |v| = 0 \implies v(\mathbf{x}) \equiv 0.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

4.7 Der Gaußsche Satz

In diesem Abschnitt wird untersucht, inwieweit der Gaußsche Satz auch für Funktionen aus Sobolev–Räumen gilt.

Satz 4.16 Satz von Gauß. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein Gebiet mit einem $C^{0,1}$–Rand Γ. Dann gilt die sogenannte Bilanzidentität*

$$\int_\Omega \partial_i u(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} = \int_\Gamma u(\mathbf{s})\mathbf{n}_i(\mathbf{s}) \ d\mathbf{s},$$

$\mathbf{n}$ – *Einheitsaußennormale an Γ, für alle $u \in W^{1,1}(\Omega)$.*

Beweis: Die Behauptung wurde für Funktionen aus $C^1(\overline{\Omega})$ im Satz 2.8 bewiesen. Der Raum $C^1(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $W^{1,1}(\Omega)$, Satz 4.4, das heißt, für alle $u \in W^{1,1}(\Omega)$ gibt es eine Folge $\{u_m\}_{m=1}^\infty \in C^1(\overline{\Omega})$ mit

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\|_{W^{1,1}} = 0,$$

insbesondere

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \partial_i u_m(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} = \int_\Omega \partial_i u(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x}.$$

Aus der Stetigkeit des Spuroperators erhalten wir

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\|_{L^1(\Gamma)} \leq C \lim_{m\to\infty} \|u - u_m\|_{W^{1,1}} = 0,$$

woraus folgt

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Gamma u_m(\mathbf{s}) \ d\mathbf{s} = \int_\Gamma u(\mathbf{s}) \ d\mathbf{s}$$

und da die Normale $\mathbf{n}$ bei einem $C^{0,1}$–Gebiet fast überall stetig ist

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Gamma u_m(\mathbf{s})\mathbf{n}_i(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \int_\Gamma u(\mathbf{s})\mathbf{n}_i(\mathbf{s}) \ d\mathbf{s}.$$

Das beweist die Behauptung. ■

Durch Addition erhält man

Folgerung 4.17 *Sei $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \left(W^{1,1}(\Omega)\right)^d$ ein Vektorfeld. Dann gilt die Bilanzidentität*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} = \int_\Gamma \mathbf{u}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{s}) \ d\mathbf{s}.$$

Folgerung 4.18 ***Partielle Integration.*** *Seien $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $p \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \partial_i u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} = \int_\Gamma u(\mathbf{s})v(\mathbf{s})\mathbf{n}_i(\mathbf{s}) \ d\mathbf{s} - \int_\Omega u(\mathbf{x})\partial_i v(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x}.$$

Beweis: *Übungsaufgabe.* ■

Folgerung 4.19 ***Erste Greensche Formel.*** *Es gilt*

$$\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s})v(\mathbf{s}) \ d\mathbf{s} - \int_\Omega \Delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x}$$

für alle $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$.

Beweis: Nach Hölderscher Ungleichung ist

$$\partial_i uv \in W^{1,1}(\Omega).$$

Nun geht es im Prinzip weiter wie im Beweis der vorangegangenen Folgerung, wobei man noch aufsummieren muss. ■

Die erste Greensche Formel ist die Formel der einmaligen partiellen Integration. Das Randintegral kann man äquivalent in der Form

$$\int_\Gamma \nabla u(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{s}) v(\mathbf{s}) \ d\mathbf{s}$$

schreiben. Die Formel der zweimaligen partiellen Integration nennt man zweite Greensche Formel.

Folgerung 4.20 ***Zweite Greensche Formel.*** *Es gilt*

$$\int_\Omega \Delta u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) - \Delta v(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \ d\mathbf{x} = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s}) v(\mathbf{s}) - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s}) u(\mathbf{s}) \ d\mathbf{s}$$

für alle $u, v \in H^2(\Omega)$.

4.8 Einbettungssätze und Sobolev-Ungleichungen

Das erste Lemma gibt Auskunft über Sobolev–Räume mit gleicher Integrationspotenz p aber unterschiedlichem Grad der Ableitung.

Lemma 4.21 *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *ein Gebiet,* $p \in [1, \infty)$, $k \le m$, *dann gilt* $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Defintion der Räume. ■

Beim nächsten Lemma ist der Grad der Ableitung gleich, aber die Integrationspotenz ist unterschiedlich.

Lemma 4.22 *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *ein beschränktes Gebiet,* $k \ge 0$ *und* $p, q \in [1, \infty]$ *mit* $q > p$. *Dann gilt* $W^{k,q}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.

Beweis: *Übungsaufgabe.* ■

Das nächste Lemma ist über Sobolev–Räume mit gleicher Integrationspotenz und gleichem Ableitungsordnung, aber auf ineinandergeschachtelten Gebieten.

Lemma 4.23 *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *ein Gebiet mit einem* $C^{0,1}$*–Rand* Γ, $k \ge 0$ *und* $p \in [1, \infty]$. *Dann existiert eine Abbildung* $E \ : \ W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ *mit*

a) $Ev|_\Omega = v$,

b) $\|Ev\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \le \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Die natürliche Einschränkung $e \ : \ W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \to W^{k,p}(\Omega)$ ist also möglich und es gilt $\|ev\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \|ev\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)}$.

Satz 4.24 ***Sobolev–Ungleichung.*** *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *ein Gebiet mit einem* $C^{0,1}$*–Rand* Γ, $k \ge 0$ *und* $p \in [1, \infty)$ *mit*

$$\begin{array}{ll} k \ge d & \text{für } p = 1, \\ k > d/p & \text{für } p > 1. \end{array}$$

Dann existiert eine Konstante C *so, dass für alle* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *gilt*

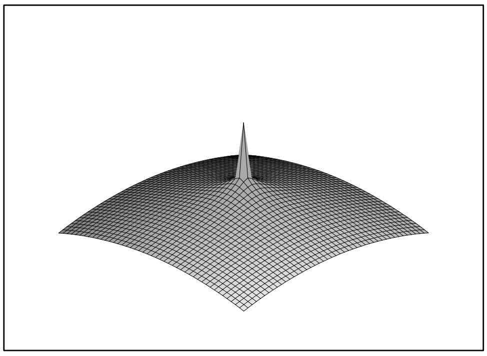
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

In der $L^\infty(\Omega)$*–Äquivalenzklasse von* u *ist sogar eine stetige Funktion enthalten.*

Der Satz besagt, dass jede Funktion mit genügend vielen schwachen Ableitungen (die Anzahl hängt von der Dimension von Ω und der Integrierbarkeit der Potenzen der schwachen Ableitungen ab) als stetige, beschränkte Funktion betrachtet werden kann. Man sagt, $W^{k,p}(\Omega)$ ist in $C(\Omega)$ eingebettet. Wendet man den Satz auf Ableitungen von Funktion an, erhält man beispielsweise die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \to C^s(\Omega)$ für $(k-s)p > d, p > 1$. Weitere Einbettungen findet man in [Ada75].

Beispiel 4.25 Sei $d = 1$ und Ω ein beschränktes Intervall. Dann ist jede Funktion des $H^1(\Omega)$ $(k = 1, p = 2)$ bereits stetig in Ω. □

Beispiel 4.26 Für $d \geq 2$ sind die Funktionen aus $H^1(\Omega)$ im allgemeinen nicht mehr stetig. Dazu wird ein Beispiel konstruiert.



Seien $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \ : \ \|\mathbf{x}\|_2 < 1/2\}$ und $f(\mathbf{x}) = \ln |\ln \|\mathbf{x}\|_2|$. Für $\|\mathbf{x}\|_2 < 1/2$ ist $|\ln \|\mathbf{x}\|_2| = -\ln \|\mathbf{x}\|_2$ und es folgt für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\partial_i f = -\frac{1}{\ln \|\mathbf{x}\|_2} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_2} = -\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_2^2 \ln \|\mathbf{x}\|_2}.$$

Für $p \leq d$ erhalten wir

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^p = \underbrace{\left|\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_2}\right|^p}_{\leq 1} \underbrace{\left|\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2 \ln \|\mathbf{x}\|_2}\right|^p}_{\geq e} \leq \left|\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2 \ln \|\mathbf{x}\|_2}\right|^d,$$

da $d \geq p = 2$ (die Abschätzung des zweiten Faktors erhält man beispielsweise mit einer Kurvendiskussion). Damit folgt (Übergang in sphärische Koordinaten, $\rho = e^{-t}$)

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\partial_i f|^p \, d\mathbf{x} &\leq \int_\Omega \frac{d\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^d \left|\ln \|\mathbf{x}\|_2\right|^d} = \int_{S^{d-1}} \int_0^{1/2} \frac{\rho^{d-1}}{\rho^d \left|\ln \rho\right|^d} \, d\rho d\omega \\ &= \text{meas}\left(S^{d-1}\right) \int_0^{1/2} \frac{d\rho}{\rho \left|\ln \rho\right|^d} = -\text{meas}\left(S^{d-1}\right) \int_\infty^{\ln 2} \frac{dt}{t^d} < \infty \end{aligned}$$

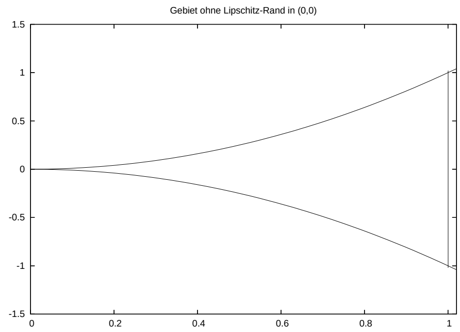
weil $d \geq 2$.

Es gilt damit $\partial_i f \in L^p(\Omega)$ mit $p \leq d$. Analog beweist man $f \in L^p(\Omega)$ mit $p \leq d$. Also gilt $f \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $p \leq d$. Es gilt jedoch $f \notin L^\infty(\Omega)$. Dieses Beispiel zeigt, dass die Bedinungung $k > d/p$ für $p > 1$ scharf ist.

Insbesondere haben wir für $p = 2$ dass aus $f \in H^1(\Omega)$ im allgemeinen nicht $f \in C(\Omega)$ folgt. □

Beispiel 4.27 Auch die Bedingung, dass Ω einen Lipschitz–Rand Γ besitzt ist wichtig.

Betrachte dazu $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1, \ |y| < x^r, r > 1\}$, siehe Abbildung für $r = 2$.



Für $u(x,y) = x^{-\varepsilon/p}$, $0 < \varepsilon < r$ gilt

$$\partial_x u = x^{-\varepsilon/p-1}\left(-\frac{\varepsilon}{p}\right) = C(\varepsilon,p)x^{-\varepsilon/p-1}, \ \partial_y u = 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=1} \int_\Omega |D^{\boldsymbol{\alpha}} u|^p \ dxdy &= C(\varepsilon,p)\int_\Omega x^{-\varepsilon-p} \ dxdy \\
&= C(\varepsilon,p)\int_0^1 x^{-\varepsilon-p}\left(\int_{-x^r}^{x^r} dy\right) dx \\
&= \tilde{C}(\varepsilon,p)\int_0^1 x^{-\varepsilon-p+r} \ dx.
\end{aligned}$$

Dieser Wert ist endlich für $-\varepsilon - p + r > -1$ bzw. für $p < 1 + r - \varepsilon$. Wählt man $r \geq \varepsilon > 0$, so ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Für $\varepsilon > 0$ ist u aber in Ω unbeschränkt, also $u \notin L^\infty(\Omega)$.

Die unbeschränkten Funktionswerte werden beim Integrieren dadurch kompensiert, dass das Gebiet in der Umgebung der singulären Stelle $(0,0)$ ein sehr kleines Maß besitzt. $\square$

Für $\Omega = \mathbb{R}^d$ gilt die Sobolev–Ungleichung nicht.