Teil I

Theorie Partieller Differentialgleichungen

Kapitel 1

Erste Eigenschaften von Lösungen partieller Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden einige elementar beweisbare Aussagen über Lösungen verschiedener Gleichungen präsentiert.

1.1 Partielle Integration

Eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Theorie partieller Differentialgleichungen ist der Gaußsche Satz. Er wird hier in der Formulierung der partiellen Integration angegeben. In Kapitel 2 werden wir uns eingehender mit diesem Satz beschäftigen.

Satz 1.1 ***Partielle Integration.*** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, beschränkte Teilmenge mit C^1–Rand $\partial\Omega$ und äußeren Einheits–Normalen $\mathbf{n}$. Dann gilt für Funktionen $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$*

$$\int_\Omega u\nabla v \; d\mathbf{x} = -\int_\Omega v\nabla u \; d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} uv\mathbf{n} \; d\mathbf{s}. \tag{1.1}$$

Alle Integrale sind als Lebesgue[1]–Integrale zu verstehen. Die Forderung, dass Ω einen C^1–Rand haben soll, wird später in Definition 2.1 konkretisiert. Für den Moment sei nur gesagt, dass der Rand von Ω gewissen Bedingungen genügen muss, das Gebiet also nicht beliebig sein darf.

Insbesondere erhält man für $u = 1$

$$\int_\Omega \nabla v \; d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v\mathbf{n} \; d\mathbf{s} \quad \text{oder} \quad \int_\Omega \partial_i v \; d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v\mathbf{n}_i \; d\mathbf{s}, \; i = 1, \ldots, d.$$

Falls $\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega})$ eine vektorwertige Funktion ist, kann man diese Formel auf jede Komponente anwenden und addieren. Man erhält damit den klassischen Gaußschen Satz

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{v} \; d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \; d\mathbf{s}.$$

[1] Henri Lebesgue (1875 – 1941)

1.2 Die Laplace–Gleichung

1.2.1 Die Laplace–Gleichung im Eindimensionalen

Zusammenhängende Gebiete in einer Dimension sind Intervalle $\Omega = (a, b)$ mit $a < b$. Sei $u \in C^2((a, b))$ eine Funktion, die die Laplace–Gleichung löst, also

$$-u'' = 0 \quad \text{in } (a, b).$$

Damit ist die Ableitung u' konstant in (a, b) und daraus folgt wiederum, dass u linear ist

$$u(x) = cx + d, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Die freien Parameter c, d müssen für ein konkretes Problem durch geeignete Nebenbedingungen bestimmt werden, beispielsweise durch die vorgegebenen Randbedingungen $u(a)$ und $u(b)$.

1.2.2 Mittelwerteigenschaft

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ ein offenes Gebiet. Wir bezeichnen die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $\mathbf{x}$ mit $B(\mathbf{x}, r)$.

Mittelwerte über eine Mannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ werden mit

$$\fint_\Sigma u \; d\mathbf{s} := \frac{1}{|\Sigma|} \int_\Sigma u \; d\mathbf{s} \quad \text{mit} \quad |\Sigma| = \int_\Sigma d\mathbf{s}$$

bezeichnet.

Satz 1.2 Mittelwertformel für harmonische Funktionen. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ in Ω. Dann gilt*

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \; d\mathbf{s}. \tag{1.2}$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$.

Beweis: Sei $\mathbf{x} \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt. Wir transformieren die Integrale in (1.2) auf den Rand der Einheitskugel

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} d\mathbf{s} &= r^{d-1} \int_{\partial B(\mathbf{0},1)} d\mathbf{y}, \\ \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{s}) \; d\mathbf{s} &= r^{d-1} \int_{\partial B(\mathbf{x},1)} u(r\mathbf{y}) \; d\mathbf{y} = r^{d-1} \int_{\partial B(\mathbf{0},1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) \; d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die rechte Seite von (1.2) mit $\Phi(r)$. Man erhält also

$$\Phi(r) := \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{s}) \; d\mathbf{s} = \fint_{\partial B(\mathbf{0},1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) \; d\mathbf{y}. \tag{1.3}$$

Auf Grund der vorausgesetzten Glattheit von u existiert die Ableitung nach r

$$\Phi'(r) = \fint_{\partial B(\mathbf{0},1)} \nabla u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \; d\mathbf{y}.$$

Rücktransformation der Integrale liefert

$$\Phi'(r) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \nabla u(\mathbf{s}) \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{x}}{r} \; d\mathbf{s} = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \nabla u(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \; d\mathbf{s},$$

wobei die Darstellung des äußeren Einheits–Normalenvektors an die Kugel $B(\mathbf{x},r)$ genutzt wurde. Der Gaußsche Satz liefert nun

$$|\partial B(\mathbf{x},r)|\Phi'(r) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} \nabla u(\mathbf{s})\cdot\mathbf{n}\ d\mathbf{s} = \int_{B(\mathbf{x},r)} \nabla\cdot\nabla u\ d\mathbf{x} = \int_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u\ d\mathbf{x} = 0.$$

Also ist $\Phi(r)$ konstant. Aus der Stetigkeit von u folgt $\Phi(r)\to u(\mathbf{x})$ für $r\to 0$, siehe beispielsweise in (1.3): $\Phi(0)=u(\mathbf{x})$. Da Φ konstant ist, gilt damit $\Phi(r)=u(\mathbf{x})$. Das ist die Behauptung. ■

Folgerung 1.3 Variante der Mittelwertformel. *Sei $u\in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ in Ω und $B(\mathbf{x},r)\subset\Omega$. Für jede Gewichtsfunktion $\varphi\ :\ [0,r]\to\mathbb{R}$ mit*

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} \varphi(\|\mathbf{x}\|_2)\ d\mathbf{x} = 1,$$

wobei $\|\mathbf{x}\|_2$ die Euklidische[2] Norm von $\mathbf{x}$ ist, gilt

$$u(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})\varphi(\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_2)\ d\mathbf{y}. \tag{1.4}$$

Beweis: Man erhält die Aussage, indem man das Volumenintegral in verallgemeinerten Polarkoordinaten schreibt. Für $\mathbf{y}\in B(\mathbf{x},r)$ wird die Darstellung $\mathbf{y}=\mathbf{x}+t\mathbf{s}$ mit $t\in[0,r]$ und $\mathbf{s}\in\partial B(\mathbf{0},1)$ verwendet. Man erhält, unter Verwendung der Mittelwertformel (1.2) und der Eigenschaft der Gewichtsfunktion,

$$\begin{aligned}\int_{B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})\varphi(\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_2)\ d\mathbf{y} &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(\mathbf{0},1)} u(\mathbf{x}+t\mathbf{s})\ d\mathbf{s}\right)\varphi(\underbrace{\|t\mathbf{s}\|_2}_{=t})t^{d-1}\ dt \\ &= u(\mathbf{x})\underbrace{|\partial B(\mathbf{0},1)|\int_0^r \varphi(t)t^{d-1}\ dt}_{=\int_{B(\mathbf{0},r)}\varphi(\|\mathbf{x}\|_2)\ d\mathbf{x}=1} = u(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Die Beziehung unter der Klammer sieht man, wenn man in der ersten Zeile $u(\mathbf{y})=1$ und $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ setzt. ■

Die Mittelwertformel besagt, dass harmonische Funktionen in jedem Punkt mit ihrem Mittelwert in einer Umgebung übereinstimmen. Es gilt auch die Umkehrung: die Mittelwerteigenschaft charakterisiert harmonische Funktionen.

Satz 1.4 Charakterisierung harmonischer Funktionen. *Sei $u\in C^2(\overline{\Omega})$ mit*

$$u(\mathbf{x}) = ⨍_{\partial B(\mathbf{x},r)} u\ d\mathbf{s} \tag{1.5}$$

für alle Kugeln $B(\mathbf{x},r)\subset\Omega$. Dann ist u harmonisch.

Beweis: Angenommen, es gilt $\Delta u(\mathbf{x})\neq 0$ für ein $\mathbf{x}\in\Omega$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\Delta u(\mathbf{x})>0$. Wegen der Stetigkeit der partiellen zweiten Ableitungen findet man eine Kugel $B(\mathbf{x},R)$ mit $R>0$, so dass $\Delta u(\mathbf{y})>0$ für alle $\mathbf{y}\in B(\mathbf{x},R)$. Sei $\Phi(r)$ die rechte Seite von (1.5). Nach Voraussetzung gilt $\Phi(r)=u(\mathbf{x})$, also $\Phi'(r)=0$. Die Rechnung des Beweises von Satz 1.2 liefert jedoch

$$|\partial B(\mathbf{x},r)|\ \Phi'(r) = \int_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u\ d\mathbf{x} > 0$$

für $r\le R$. Das ist ein Widerspruch. ■

[2]Euklid (ca. 365 – 300 v. Chr.)

1.2.3 Regularität

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt eine erstaunliche Regularitätsaussage.

Sei u harmonisch in Ω und $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$. Wir wählen eine Funktion $\phi : [0, r) \to \mathbb{R}$ mit $\phi \in C^\infty([0, r))$. Wir fordern, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\phi(s) = 0$ für alle $s > r - \varepsilon$. Mit Hilfe dieser Funktion wird eine weitere Funktion definiert:

$$\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|_2),$$

wobei $\phi(s) = 0$ für $s \geq r$ gesetzt wird. Damit ψ ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist, muss ϕ in einer rechtsseitigen Umgebung von $s = 0$ konstant sein. Anderenfalls würde ψ eine Regularitätsabfall in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitzen. Wir fordern $\phi(s) = c > 0$ für alle $s \in [0, \varepsilon]$. Des weiteren wird ψ (beziehungsweise ϕ) so normiert, dass

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_0^r \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \phi(\|\mathbf{s}\|_2) \, d\mathbf{s} \, dt = |\partial B(\mathbf{0}, 1)| \int_0^r t^{d-1} \phi(t) \, dt$$

gilt, siehe Rechnung im Beweis von Folgerung 1.3.

Satz 1.5 *Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion. Dann gilt sogar $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis: Die konstruierte Gewichtsfunktion ϕ erfüllt die Bedingungen der Gewichtsfunktion aus Folgerung 1.3. Wir betrachten den Differenzenquotienten von $u(\mathbf{x})$ in die k-te Einheitsrichtung $\mathbf{e}_k$. Der Radius r sei so klein gewählt, dass $B(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k, r) \subset \Omega$. Unter Verwendung von (1.4) erhält man für $0 < h < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - u(\mathbf{x})}{h} \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_{B(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_k, r)} u(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x} - h\mathbf{e}_k) \, d\mathbf{y} - \int_{B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\mathbf{y} \right) \\
&= \int_{B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y}) \frac{\psi(\mathbf{y} - \mathbf{x} - h\mathbf{e}_k) - \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{h} \, d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt daher, dass h so klein gewählt worden ist, dass ψ nur in $B(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k, r) \cap B(\mathbf{x}, r)$ ungleich Null ist, siehe Abbildung 1.1.

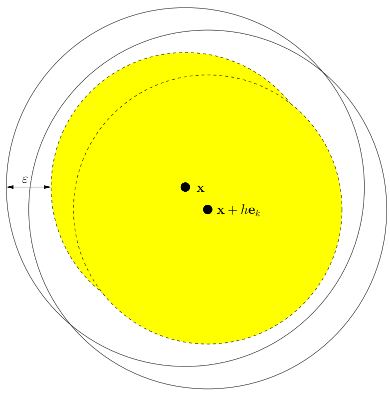

Abbildung 1.1: Skizze zum Beweis von Satz 1.5.

Aus den Voraussetzungen an ψ folgt, dass die rechte Seite für $h \to 0$ wohldefiniert ist. Folglich erhält man beim Grenzübergang

$$\partial_k u(\mathbf{x}) = -\int_{B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y}) \partial_k \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\mathbf{y}.$$

Insbesondere folgt damit, dass u differenzierbar ist (was allerdings schon vorausgesetzt ist). Die gleiche Argumentiation kann nun wiederholt werden und liefert per Induktion für höhere Ableitungen nach dem Multiindex $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x}) = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_{B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y}) D^{\boldsymbol{\alpha}} \psi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\ d\mathbf{y},$$

wobei $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$. Insbesondere existieren alle Ableitungen von u. ■

Dieses Ergebnis ist erstaunlich, da eigentlich nur die Informationen vorliegen, dass u zweimal differenzierbar ist und dass die Summe der nichtgemischten zweiten Ableitungen für jedes $\mathbf{x} \in \Omega$ verschwindet. Zunächst ist sogar unklar, wie man daraus überhaupt Informationen über einen der Summanden bekommt. Es stellt sich aber heraus, dass man sogar Informationen über alle Ableitungen erhält!

Auch das Beweisprinzip ist bemerkenswert. Man beweist die Differenzierbarkeit mittels der vorausgesetzten Differenzierbarkeit der Testfunktion ψ. Dieses Prinzip werden wir auch bei den Distributionen wieder antreffen, siehe Definition 3.5.

1.2.4 Das Maximumprinzip

Satz 1.6 Maximumprinzip. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt sowie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω. Dann gelten*

1. *Schwaches Maximumprinzip*

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} u(\mathbf{x}). \tag{1.6}$$

2. *Starkes Maximumprinzip. Falls Ω zusammenhängend ist und das Maximum im Inneren angenommen wird, d.h. $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$ für ein $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, dann ist u konstant, also*

$$u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) \quad \forall\ \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \tag{1.7}$$

Beweis: Wir beweisen (1.7). Das schwache Maximumprinzip (1.6) folgt daraus. Sei $u(\mathbf{x}_0) = M := \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Für jede Kugel $B(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$ gilt nach der Mittelwertformel (1.2)

$$M = \frac{1}{|\partial B(\mathbf{x}_0, r)|} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0,r)} u\ d\mathbf{s}.$$

Da u stetig ist und $u(\mathbf{x}) \le M$ gilt, kann diese Beziehung nur gelten, wenn $u = M$ auf $\partial B(\mathbf{x}_0, r)$ ist. Also gibt es eine offene Umgebung von $\mathbf{x}_0$ in der $u \equiv M$.

Wir betrachten die Menge $Q := \{\mathbf{x} \in \Omega\ :\ u(\mathbf{x}) = M\}$. Für jedes $\mathbf{x} \in Q$ findet man mit den obigen Betrachtungen eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}) \subset Q$. Also ist Q eine offene Menge. Wegen der Stetigkeit von u sind aber auch alle Häufungspunkte von Q in Ω wieder in Q enthalten. Da Ω zusammenhängend ist, stimmen Q und Ω überein. *Übungsaufgabe: diesen Schluss detailliert nachvollziehen.* ■

1.2.5 Das Dirichlet–Prinzip

Oft liefert der physikalische Hintergrund des betrachteten Problems eine Größe, die von der Lösung der zu Grunde liegenden Gleichung minimiert wird, eine sogenannte Energie.

Wir betrachten das Dirichlet[3]–Funktional

$$E(u) := \int_\Omega \|\nabla u\|_2^2\ d\mathbf{x}. \tag{1.8}$$

[3]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 –1859)

Da im physikalischen System die Randbedingungen eine entscheidende Rolle spielen, betrachten wir für stetiges $g \; : \; \partial\Omega \to \mathbb{R}$ nur Funktionen aus dem Raum

$$V := \left\{ u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \; : \; u|_{\partial\Omega} = g \right\}.$$

Satz 1.7 Dirichlet–Prinzip. *Sei Ω offen und $u \in V$ ein Funktion mit*

$$E(u) = \min_{v \in V} E(v).$$

Dann ist u eine harmonische Funktion.

Beweis: Wir wählen eine Funktion $w \in C^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Damit definieren wir die gestörte Funktion $u_\varepsilon := u + \varepsilon w$. Es gilt $u_\varepsilon \in V$ und wegen der Minimalität des Dirichlet–Funktionals von u gilt (als notwendige Bedingung)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} E(u_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + 2\varepsilon \nabla u \cdot \nabla w + \varepsilon^2 \nabla w \cdot \nabla w \; d\mathbf{x}\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_\Omega 2\nabla u \cdot \nabla w + 2\varepsilon \nabla w \cdot \nabla w \; d\mathbf{x}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega 2\nabla u \cdot \nabla w \; d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nun wird partiell integriert. Dabei tritt kein Randterm auf, da w kompakten Träger besitzt

$$0 = \int_\Omega 2\nabla u \cdot \nabla w \; d\mathbf{x} = 2 \int_\Omega (-\Delta u) w \; d\mathbf{x}.$$

Da w beliebig war, gilt $\Delta u = 0$. ■

Wir werden später sehen, Abschnitt **??**, dass man auf diesem Prinzip ein Verfahren konstruieren kann, um die Laplace–Gleichung zu lösen.

1.3 Eigenschaften anderer partieller Differentialgleichungen

1.3.1 Eindeutigkeit der Poisson–Gleichung

Satz 1.8 *Seien $g \in C(\partial\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$ gegeben. Dann gibt es höchstens ein $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, welches die Poission–Gleichung*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

löst.

Beweis: Seien u und v zwei Lösungen der Poisson–Gleichung zu den gleichen Daten. Dann erfüllt die Differenz $w = u - v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die Gleichung

$$-\Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Das heißt, w ist harmonisch. Nach dem schwachen Maximumprinzip (1.6) nimmt w sein Maximum auf dem Rand hat, also ist $w \le 0$ in $\overline{\Omega}$. Gleichzeitig ist aber auch $-w$ harmonisch und nimmt sein Maximum auf dem Rand an, dass heißt $-w \le 0$ in $\overline{\Omega}$. Daraus folgt $w \equiv 0$ und damit $u = v$. ■

Für vorgegebene Daten (rechte Seite und Randwerte) ist die Lösung also eindeutig. Es bleibt noch die Frage zu klären, ob überhaupt eine Lösung existiert, siehe Satz 5.1.

1.3.2 Das Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1–Rand. Wir betrachten für $T > 0$ den Raum–Zeit–Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (0, T] \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

Als parabolischen Rand des Zylinders bezeichnet man die Menge $\Gamma_T := \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$, das heisst der parabolische Rand ist die Vereinigung der seitlichen Ränder und des Randes $t = 0$. Aus der Intuition kann man erwarten, dass die Temperatur u niemals größer wird, als dies durch die Randwerte auf Γ_T vorgegeben ist, sofern es keine Wärmequelle in Ω gibt. Das soll jetzt bewiesen werden.

Satz 1.9 Parabolisches Maximumprinzip. *Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in } \Omega_T. \tag{1.9}$$

Dann gilt

$$\max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{\Omega}_T} u(\mathbf{x}, t) \le \max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{\Gamma}_T} u(\mathbf{x}, t). \tag{1.10}$$

Beweis: Man kann annehmen, dass $\max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{\Gamma}_T} u(\mathbf{x}, t) = 1$, andernfalls wird eine entsprechende Konstante zu u addiert oder von u subtrahiert. Angenommen, es gilt $u(\mathbf{x}_0, T) = 1 + \varepsilon$ für ein $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$. Diese Annahme soll zu einem Widerspruch geführt werden.

Dazu betrachtet man die Funktion

$$v(\mathbf{x}, t) := e^{\lambda(T-t)} u(\mathbf{x}, t).$$

Für $0 < \lambda < \ln(1 + \varepsilon/2)/T; (e^{\lambda T} < 1 + \varepsilon/2)$ gilt $v \le 1 + \varepsilon/2$ auf Γ_T. Im Punkt $(\mathbf{x}_0, T)$ gilt $v(\mathbf{x}_0, T) = 1 + \varepsilon$. Also besitzt v genauso wie u ein inneres Maximum:

$$v(\mathbf{x}_1, t_1) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{\Omega}_T} v(\mathbf{x}, t) > \max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{\Gamma}_T} v(\mathbf{x}, t).$$

Die Funktion v löst auf Ω_T die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t v = -\lambda v + \Delta v.$$

Der Punkt $(\mathbf{x}_1, t_1)$ ist ein lokales Maximum. Falls $t_1 < T$, verschwindet der Gradient (notwendige Bedingung), also gilt insbesondere $\partial_t v(\mathbf{x}_1, t_1) = 0$. Ist $t_1 = T$, dann gilt wegen der Maximaleigenschaft $\partial_t v(\mathbf{x}_1, t_1) \ge 0$. Ein weiteres notwendiges Kriterium besteht darin, dass $\Delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \le 0$ (betrachte die Ableitungen in die jeweiligen Koordinatenrichtungen und die notwendigen eindimensionalen Kriterien). Das Argument ist unabhängig von t_1 gültig, da $\mathbf{x}_1 \in \Omega$. Es folgt für den Punkt $(\mathbf{x}_1, t_1)$

$$0 \le \partial_t v(\mathbf{x}_1, t_1) = (-\lambda v + \Delta v)(\mathbf{x}_1, t_1) \le -\lambda v(\mathbf{x}_1, t_1) < 0.$$

Das ist ein Widerspruch, also besitzt v kein inneres Maximum. Aus der Definition von v folgt, dass damit auch u kein inneres Maximum besitzt. ■

Genauso wie bei der Poisson–Gleichung liefert das Maximumprinzip eine Eindeutigkeitsaussage.

Folgerung 1.10 Eindeutigkeit. *Für $f \in C(\Omega_T)$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega \times [0, T])$ gibt es höchstens ein $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$, welches die inhomogene Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f && \text{in } \Omega_T, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(., 0) &= u_0 && \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

löst.

1.3.3 Elementare Lösung einer Transportgleichung

Wir betrachten zunächst die homogene Transportgleichung erster Ordnung

$$\partial_t u + \partial_x u = 0 \quad \text{in} \ \ \mathbb{R} \times [0, \infty). \tag{1.11}$$

Das räumliche Gebiet besitzt keinen Rand. Wir wollen das Anfangswertproblem lösen, das heißt, wir suchen eine Lösung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eine gegebene Anfangsbedingung

$$u(.,0) = u_0, \quad \text{mit} \ \ u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \tag{1.12}$$

erfüllt.

Eine Lösung von (1.11), (1.12) lässt sich unmittelbar angeben, nämlich

$$u(x,t) = u_0(x - t).$$

Das Erfülltsein der Anfangsbedingung ist offensichtlich. Es folgt mit Kettenregel

$$\partial_t u(x,t) = u_0'(x-t)\frac{d(x-t)}{dt} = -u_0'(x-t) = -\partial_x u(x,t).$$

Die Lösung verschiebt also einfach die Startwerte in der Zeit nach rechts.

Man sieht zum einen, dass die Lösung mit der Zeit nicht glatter wird, sondern immer in $C^1(\mathbb{R})$ für jeden Zeitpunkt ist. Man sagt, dass die Gleichung nicht glättet.

Zum anderen sieht man, dass Informationen über den Anfangswert in einem vorgegebenen Punkt zu einer gewissen Zeit t nicht alle Punkten von $\mathbb{R}$ beeinflussen. Zum Beispiel wird die Information von $u_0(0)$ zur Zeit t nur von Punkten mit $0 \leq x \leq t$ wahrgenommen. Man spricht von einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit. Diese Eigenschaft ist im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung. Dort werden die Anfangswerte nach beliebig kurzer Zeit überall in Ω wahrgenommen.

Wir betrachten nun die inhomogene Transportgleichung

$$\partial_t u + \partial_x u = f \quad \text{in} \ \ \mathbb{R} \times [0, \infty), \tag{1.13}$$

wobei $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ist.

Wie bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen gilt auch hier eine Art Superpositionsprinzip, um eine Lösung von (1.13) zu finden. Für die homogene Gleichung (1.11) gilt, dass entlang der Linien (Charakteristiken) $(x-t+s, s)$, $s \geq 0$, die Lösung u konstant ist. Für die inhomogene Gleichung gilt, dass entlang dieser Linien u um den Wert f zunimmt. Aus dieser Überlegung kann man einen Ansatz für die Lösung der inhomogenen Gleichung gewinnen

$$u(x,t) = u_0(x-t) + \int_0^t f(x-t+s, s)\ ds. \tag{1.14}$$

Einsetzen zeigt, dass der Ansatz richtig ist. *Übungsaufgabe.*

Diese Herangehensweise nennt man das Prinzip der Charakteristiken.

1.3.4 Eine Wellengleichung

Die einfachste Wellengleichung zweiter Ordnung lautet

$$\partial_t^2 u = \Delta u. \tag{1.15}$$

Zu ihrer Herleitung betrachten wir die vertikale Auslenkung u einer dünnen, unendlich ausgedehnten, horizontalen Membran falls $d = 2$ (einer Saite für $d = 1$). Im einfachsten Modell sind die vertikalen Kräfte durch ∇u gegeben, das heißt, über einer Linie $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ mit Einheitsnormalen $\mathbf{n}$ wird die vertikale Kraft $\nabla u \cdot \mathbf{n}$

übertragen. Das ist das Hooke'sche Gesetz Kraft $\sim$ Auslenkung ($F \sim u$). Nun verwendet man das Newton'sche Gesetz Beschleunigung $\sim$ Kraft ($\partial_t^2 u \sim F$) zur Beschreibung der Kinetik. Für ein beliebiges Volumen $V \subset \mathbb{R}^2$ gilt dann, nach Normalisierung

$$\int_V \partial_t^2 u \; d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \nabla u \cdot \mathbf{n} \; d\mathbf{s} = \int_V \Delta u \; d\mathbf{x}.$$

Bei dieser Herleitung haben wir wieder den Gaußschen Satz angewendet. Da V beliebig ist, folgt die Wellengleichung (1.15).

Wir betrachten hier die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u \quad \text{in} \;\; \mathbb{R} \times (0, \infty) \tag{1.16}$$

mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen

$$u(.,0) = u_0, \quad \partial_t u(.,0) = u_1 \quad \text{in} \;\; \mathbb{R},$$

mit $u_0, u_1 \in C^2(\mathbb{R})$. Das heißt, die Auslenkung der Saite und ihre Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ sind gegeben.

Zwei Lösungen von (1.16) (ohne Anfangsbedingungen) lassen sich elementar angeben, nämlich für beliebige $\phi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$

$$u(x,t) = \phi(x+t), \quad u(x,t) = \psi(x-t).$$

Das rechnet man durch Einsetzen nach.

Man kann nun versuchen, mit Hilfe dieser beiden sogenannten Elementarlösungen, eine Lösung zu konstruieren, die auch die Anfangsbedingungen erfüllt. Dazu schreiben wir zunächst die Gleichung (1.16) in der Form

$$(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x) u = 0 \quad \text{in} \;\; \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Die Funktion

$$v(x,t) := (\partial_t - \partial_x) u(x,t)$$

löst nun offensichtlich folgendes Anfangswertproblem

$$(\partial_t + \partial_x) v = 0, \quad v(.,0) = u_1 - \partial_x u_0.$$

Das ist eine Transportgleichung wie sie im Abschnitt 1.3.3 behandelt wurde. Man findet die Lösung

$$v(x,t) = (u_1 - \partial_x u_0)(x-t).$$

Nun muss man für u die inhomogene Transportgleichung

$$(\partial_t - \partial_x) u(x,t) = v(x,t)$$

lösen. Dazu verwenden wir die Darstellung (1.14), wobei wir das negative Vorzeichen vor der Ortsableitung beachten müssen

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x+t) + \int_0^t v(x+t-s, s) \; ds \\
&= u_0(x+t) + \int_0^t (u_1 - \partial_x u_0)(x+t-2s) \; ds \\
&= u_0(x+t) + \frac{1}{2}(u_0(x-t) - u_0(x+t)) - \frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t} u_1(y) \; dy \\
&= \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y) \; dy.
\end{aligned}$$

Das ist die sogenannte d'Alembertsche[4] Lösungsformel für die eindimensionale Wellengleichung. Durch Einsetzen kann man leicht verifizieren, dass sie tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems der eindimensionalen Wellengleichung liefert.

Die Anfangswerte u_0 werden auch bei der Wellengleichung nur transportiert und nicht geglättet.

[4] Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783)