FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 19.06.2008

Theoretische Übungsaufgaben zur Vorlesung Praktische Mathematik

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 16.04.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
  `http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre_2.html`
  abrufbar

Serie 09

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 02.07.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, und betrachte die Fixpunktgleichung $f(x) = x$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt die Fixpunktgleichung eine eindeutige Lösung, falls

   - $f(I) \subset I$,
   - I ist abgeschlossen,
   - $f(x)$ ist Lipschitz–stetig mit $L < 1$.

   Man finde jeweils ein Beispiel dafür, dass die Fixpunktgleichung nicht mehr eindeutig lösbar ist, falls zwei der drei obigen Bedingungen erfüllt sind, aber die dritte Bedingung verletzt ist. **4 Punkte**

2. Man zeige, dass
$$\frac{f[x^{(k-1)}, x^{(k)}] - f[x^{(k)}, \alpha]}{x^{(k-1)} - \alpha}$$
   eine Approximation an $f''(x^{(k)})/2$ im Sinne von
$$\frac{f[x^{(k-1)}, x^{(k)}] - f[x^{(k)}, \alpha]}{x^{(k-1)} - \alpha} = \frac{f''(x^{(k)})}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{(x^{(k-1)} - x^{(k)})^2}{x^{(k-1)} - \alpha}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{(x^{(k)} - \alpha)^2}{x^{(k-1)} - \alpha}\right)$$
   ist, siehe Beweis von Satz 6.20. **4 Punkte**

3. Man beweise folgende Aussage. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^2([a,b])$, $|f'(x)| \geq C > 0$ für alle $x \in [a,b]$ und der Nullstelle $\alpha \in (a,b)$. Gilt

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1,$$

in einer Umgebung $U(\alpha)$ um α, dann konvergiert das Newton–Verfahren für jeden Startwert aus $U(\alpha)$ gegen α.
Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz. **4 Punkte**

4. Man gebe das vollständige Horner–Schema für

$$p(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^2 + 7x - 11$$

an, womit der Funktionswert und die Werte aller Ableitungen an der Stelle $z = 2$ berechnet werden. **4 Punkte**