Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H.C. Grunau
PD Dr. V. John
Prof. Dr. L. Tobiska

5.08.2004

Klausur für Physiker zu den Lehrgebieten Analysis I+II, lineare Algebra und gewöhnliche Differentialgleichungen

Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.

---

1. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich D der Reihe

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie durch Produktbildung die Gültigkeit der Beziehung

$$F(z)\ F(-z) = F(z^2) \qquad \forall z \in D.$$

2. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2).$$

   (a) Ist f auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ stetig?

   (b) Kann f zu einer auf $\mathbb{R}^2$ stetigen Funktion g erweitert werden? Geben Sie ggfs. die Erweiterung g an!

3. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ auf dem Gebiet $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq 0,\ y \neq 0\}$ für

$$u(x,y) = \frac{4}{x} + \frac{2}{y} + xy.$$

4. Sei C der die Punkte $A = (1,0)$ und $B = (0,1)$ verbindene Teil des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$. Berechnen Sie das Kurvenintegral 2.Art

$$\int_C (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy,$$

wobei die Kurve C vom ausgehend vom Punkt A durchlaufen wird.

5. Man löse das lineare Gleichungssystem $A \circ \vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6. Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{6}}{2}i & -\frac{\sqrt{6}}{2}i \\ \frac{\sqrt{6}}{2}i & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2}i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ist M diagonalisierbar? Warum? Bestimmen Sie ggfs. die diagonale Matrix D und eine unitäre Matrix B so, dass $D = \overline{B}^t \circ M \circ B$.

7. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' + 2u + 3v &= 0 \\ v' + 3u + 2v &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

8. Man betrachte das Anfangswertproblem

$$4y' + y^2 + \frac{4}{x^2} = 0, \quad y(1) = 1.$$

- Wie heisst der spezielle Typ dieser Differentialgleichung?
- Man zeige, indem man die Voraussetzungen eines in der Vorlesung bewiesenen Satzes überprüft, dass dieses Anfangswertproblem lokal eine eindeutige Lösung besitzt.
- Die Lösung des Anfangswertproblems soll mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens mit der Schrittweite $h = 0.1$ approximiert werden. Man gebe den Wert der Approximation für $x = 1.1$ an. (Angabe als Bruch reicht.)