Kapitel 1

Analytisches Verhalten der Lösung

1.1 Das Modellproblem

Definition 1.1 Lineares Zwei–Punkt–Randwertproblem. Ein lineares Zwei–Punkt–Randwertproblem besitzt die Gestalt

$$-\varepsilon u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad \text{für } x \in (d, e), \tag{1.1}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_d u(d) - \beta_d u'(d) &= \gamma_d, \\ \alpha_e u(e) - \beta_e u'(e) &= \gamma_e. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Hierbei gelte $b, c, f \in C([e, d])$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ und die Konstanten $\alpha_d, \alpha_e, \beta_d, \beta_e, \gamma_d, \gamma_e$ sind gegeben. □

Bemerkung 1.2 Bedeutung linearer Zwei–Punkt–Randwertprobleme. Das Randwertproblem (1.1), (1.2) ist das einfachste Modellproblem zur Beschreibung von Prozessen, welche Diffusion und Transport beinhalten.

Ein Beispiel aus [Goe77] ist wie folgt. Fließt einem Stömungsreaktor bei konstanter Temperatur kontinuierlich eine Reaktionsmasse zu und ein Produkt ab, so berechnet sich die Konzentrationsverteilung $c(t, x, y, z)$ im Reaktor gemäß der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} c) + \operatorname{div}(c\mathbf{u}) = r(c),$$

wobei $\mathbf{u}$ der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit, $r(c)$ eine die Reaktion beschreibende Funktion und D der Diffusionskoeffizient sind. Bei einem stationären Reaktorbetrieb, das heißt die zeitliche Änderung ist sehr langsam und kann vernachlässigt werden, bei konstanten Parametern D, $\mathbf{u}$ und wenn die Konzentration sich nur in x–Richtung ändert, erhält man aus der partiellen Differentialgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung für $c(x)$

$$-Dc''(x) + uc'(x) = r(c(x)).$$

Sei $x \in [0, L]$, wobei L die Reaktorlänge bezeichne. Mit den dimensionslosen Größen

$$\xi := \frac{x}{L}, \quad \gamma := \frac{c}{c_0},$$

wobei c_0 eine Referenzkonzentration ist, gelangt man zu einer dimensionslosen gewöhnlichen Differentialgleichung. Es sind mit Kettenregel

$$\frac{d\gamma(\xi)}{d\xi} = \frac{d(c(x)/c_0)}{dx}\frac{dx}{d\xi} = L\frac{c'(x)}{c_0}, \quad \frac{d^2\gamma(\xi)}{d\xi^2} = L^2\frac{c''(x)}{c_0}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt, im Fall $u \neq 0$,

$$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}\gamma''(\xi) + \gamma'(\xi) = \rho(\gamma(\xi)),\ \xi \in (0,1), \quad \text{mit} \quad \mathrm{Pe} := \frac{uL}{D},\ \rho = \frac{L}{uc_0}r.$$

Die Zahl Pe wird Péclet[1]–Zahl genannt. Zur Vervollständigung der Problemstellung sind jetzt noch Randbedingungen für $\xi \in \{0,1\}$ nötig.

Aus der eben beschriebenen Anwendung heraus werden die Terme in (1.1) wie folgt genannt:

- $-\varepsilon u''$ – Diffusionsterm,
- $b(x)u'$ – Konvektions–, Advektions– oder Transportterm,
- $c(x)u$ – Reaktionsterm.

Das Modellproblem (1.1), (1.2) wird Konvektions–Diffusions–Problem genannt, falls $b(x) \not\equiv 0$.

Die Péclet–Zahl gibt das Verhältnis von Konvektion und Diffusion an. Falls dieses Verhältnis groß ist, wird dies in der numerischen Lösung von (1.1), (1.2) zu erheblichen Schwierigkeiten führen. □

Definition 1.3 Randbedingungen. Seien $\gamma_d, \gamma_e \in \mathbb{R}$, $\alpha_d, \alpha_e \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Randbedingungen der Gestalt:

1. $$u(d) = \gamma_d, \quad u(e) = \gamma_e$$
   heißen Randbedingungen erster Art oder Dirichlet[2]–Randbedingungen,
2. $$u'(d) = \gamma_d, \quad u'(e) = \gamma_e$$
   heißen Randbedingungen zweiter Art oder Neumann[3]–Randbedingungen,
3. $$\alpha_d u(d) + u'(d) = \gamma_d, \quad \alpha_e u(e) + u'(e) = \gamma_e$$
   heißen Randbedingungen dritter Art oder Robin[4]–Randbedingungen.

□

Bemerkung 1.4 Normierung eines linearen Zwei–Punkt–Randwertproblems.

- Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \in [0,1]$ annehmen. Das erreicht man durch die Transformation
  $$x \mapsto \frac{x-d}{e-d}.$$
- Man kann ebenfalls ohne Beschränkung der Allgemeinheit homogene Randbedingungen $\gamma_d = \gamma_e = 0$ annehmen, indem man von $u(x)$ eine glatte Funktion $\psi(x)$, welche die ursprünglichen Randbedingungen erfüllt, subtrahiert. Sind beispielsweise Dirichlet–Randbedingungen
  $$u(d) = \gamma_d, \quad u(e) = \gamma_e,$$

[1] Jean Claude Eugene Péclet (1793 – 1857)
[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859)
[3] Carl Gottfried Neumann (1832 – 1925)
[4] Gustave Robin (1855 – 1897)

gegeben, dann setzt man

$$\psi(x) = \gamma_d \frac{x-e}{d-e} + \gamma_e \frac{x-d}{e-d}$$

und

$$u^*(x) = u(x) - \psi(x).$$

Dann ist $u^*(x)$ die Lösung eines linearen Zwei–Punkt–Randwertproblems mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen.
Dirichlet–Randbedingungen sind

- in Anwendungen am wichtigsten,
- vom Standpunkt der Analysis am schwierigsten.

Deshalb werden wir uns auf diese konzentrieren.

□

Definition 1.5 Modellproblem. Das Modellproblem besitzt die Gestalt

$$Lu := -\varepsilon u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \quad \text{für } x \in (0,1), \tag{1.3}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{1.4}$$

Hierbei gelte $b, c, f \in C([0,1])$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung 1.6 Differentialoperator. In (1.3) bezeichnet L einen Differentialoperator. Unter einem Operator versteht man eine Abbildung zwischen zwei (Funktionen–)Räumen. Insoweit ist der Begriff des Operators synonym zum Begriff der Abbildung. Ein linearer Operator ist eine lineare Abbildung A auf einem linearen Raum X, so dass

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v$$

für alle Skalare α, β und alle $u, v \in X$ ist. Ein Differentialoperator ist ein Operator, der, angewandt auf geeignete Funktionen, Ableitungen enthält. Zur vollständigen Definition eines Operators ist dessen Definitionsbereich anzugeben. □

Beispiel 1.7 Das Randwertproblem

$$-\varepsilon u'' + u' = 1 \quad \text{auf } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

besitzt die Lösung (vorrechnen)

$$u(x) = x - \frac{\exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Je kleiner der Parameter ε ist, umso steiler wird die Lösung in der Nähe des rechten Randes, siehe Abbildung 1.1. Diesen Teil der Lösung nennt man Grenzschicht. Solche starken Änderungen der Lösung auf einem sehr kleinen Gebiet führen zu Komplikationen bei der numerischen Approximation der Lösung.

□

Bemerkung 1.8 Transformation des Modellproblems auf ein symmetrisches Problem. Sei $b(x)$ hinreichend glatt. Definiert man

$$\tilde{u}(x) := u(x) \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x b(\xi)\, d\xi\right), \quad x \in [0,1],$$

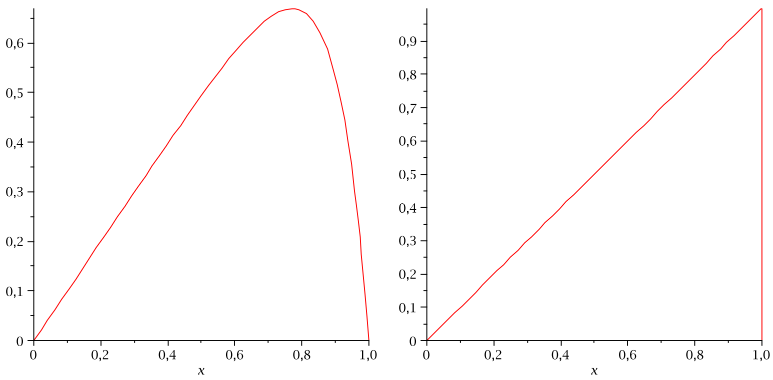

Abbildung 1.1: Lösung für $\varepsilon = 0.1$ links und $\varepsilon = 0.0001$ rechts.

so kann man (1.3), (1.4) in das symmetrische Problem

$$-\varepsilon\tilde{u}''(x) + \tilde{c}(x)\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x),\ x \in (0,1), \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0,$$

transformieren, wobei

$$\tilde{c}(x) := \frac{1}{4}\frac{b}{\varepsilon}^2(x) - \frac{1}{2}b'(x) + c(x), \quad \tilde{f}(x) := f(x)\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x b(\xi)\ d\xi\right),$$

sind. *Übungsaufgabe* □

Definition 1.9 Reduziertes Problem, reduzierte Lösung. Das reduzierte Problem erhält man, indem man formal $\varepsilon = 0$ setzt

$$L_0 u_0 := b(x)u_0' + c(x)u_0 = f(x), \quad \text{für } x \in (0,1).$$

Die Randbedingung muss immer dort gesetzt werden, wo die Konvektion herkommt. Im Fall $b(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$, besitzt dieses Problem also die Randbedingung

$$u_0(0) = 0,$$

im Fall $b(x) < 0$ für alle $x \in [0,1]$ die Randbedingung

$$u_0(1) = 0.$$

Die Lösung des reduzierten Problems wird reduzierte Lösung genannt. □

Beispiel 1.10 Das reduzierte Problem zu Beispiel 1.7 lautet

$$u_0' = 1 \quad \text{auf } (0,1), \quad u_0(0) = 0.$$

Seine Lösung ist $u_0(x) = x$.

Damit setzt sich die Lösung des nicht reduzierten Problems aus Beispiel 1.7 aus der Lösung des reduzierten Problems zusammen und einem Anteil, der dafür sorgt, dass die zweite Randbedingung erfüllt ist. □

1.2 Lösungsverhalten

Bemerkung 1.11 Für die Untersuchung der Lösbarkeit des Randwertproblems (1.3), (1.4) spielt die Größe von $\varepsilon > 0$ keine Rolle. Nach Division durch ε und Umbenennung der Daten betrachtet man das Problem

$$Lu := -u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \tag{1.5}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{1.6}$$

□

Definition 1.12 Klassische Lösung. Eine Funktion $u(x)$ wird klassische Lösung von (1.5), (1.6) genannt, falls

- $u \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$,
- $u(x)$ erfüllt die Gleichung (1.5) identisch,
- $u(x)$ genügt den Randbedingungen (1.6).

□

Wir betrachten zuerst nur die Differentialgleichung (1.5). Eine klassische Lösung von (1.5) muss die ersten beiden Eigenschaften der obigen Definition besitzen.

Satz 1.13 Superpositionsprinzip. *Betrachte die homogene, lineare Differentialgleichung*

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = 0, \quad x \in (0,1),$$

mit Koeffizienten $b, c \in C([0,1])$. Dann gibt es zwei linear unabhängige Lösungen in $C^2([0,1])$ und jede klassische Lösung ist als Linearkombination dieser darstellbar.

Beweis: Dies wurde in der Vorlesung Theorie und Numerik Gewöhnlicher Differentialgleichungen bewiesen. ■

Satz 1.14 *Betrachte die inhomogene, lineare Differentialgleichung*

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad x \in (0,1),$$

mit $b, c, f \in C([0,1])$. Dann gibt es eine klassische Lösung $u_p(x)$, die so genannte partikuläre Lösung, und jede klassische Lösung ist darstellbar als

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + u_p(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

wobei $(u_1(x), u_2(x))$ ein System von zwei linear unabhängigen Lösungen (Fundamentalsystem) der zugehörigen homogenen Gleichung ist. Es gilt $u \in C^2([0,1])$.

Beweis: Mit dem globalen Existenz– und Eindeutigkeitssatz von Picard[5]–Lindelöf[6], Übungsaufgabe. ■

Nun wird das Randwertproblem (1.5), (1.6) betrachtet.

Beispiel 1.15 Nichteindeutigkeit der Lösung eines Dirichlet–Randwertproblems. Betrachte die Differentialgleichung

$$-u''(x) - u(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen, linearen Differentialgleichung lautet

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

[5] Emile Picard (1856 – 1941)
[6] Ernst Lindelöf (1870 – 1946)

- Seien die Randbedingungen

$$u(0) = u(\pi/2) = 1$$

gegeben, dann lautet die eindeutig bestimmte Lösung $u(x) = \cos x + \sin x$.
- Sind die Randbedingungen

$$u(0) = u(\pi) = 1$$

gegeben, dann besitzt das Randwertproblem keine Lösung, da sowohl $c_1 = 1$ als auch $c_1 = -1$ gelten müssten.
- Seien die Randbedingungen

$$u(0) = 1, \quad u(\pi) = -1$$

vorgelegt, dann gibt es unendlich viele Lösungen, denn es folgt aus den Randbedingungen lediglich $c_1 = 1$. Der Wert c_2 kann beliebig gewählt werden.

Dieses Beispiel zeigt, dass selbst in einfachen Fällen keine eindeutige Lösung des Randwertproblems (1.5), (1.6) existieren muss. Es wird sich zeigen, dass die Koeffizientenfunktionen bestimmte Bedingungen erfüllen müssen, damit diese Eigenschaft gegeben ist. □

Satz 1.16 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit homogener rechter Seite. *Gegeben sei das Randwertproblem (1.5), (1.6) mit $b \in C^1([0,1])$, $c \in C([0,1])$ und $f(x) \equiv 0$. Gilt für alle $x \in (0,1)$*

$$\tilde{c}(x) := \frac{1}{4}b^2(x) - \frac{1}{2}b'(x) + c(x) \geq 0, \tag{1.7}$$

so besitzt das Problem (1.5), (1.6) nur die triviale Lösung.

Beweis: Zunächst ist offensichtlich, dass $u(x) \equiv 0$ eine Lösung des gestellten Problems ist.

Angenommen, $u(x) \not\equiv 0$ sei eine weitere klassische Lösung. Nach Satz 1.14 gilt $u \in C^2([0,1])$. Mit der Transformation von Bemerkung 1.8 erhält man das Problem

$$-\tilde{u}''(x) + \tilde{c}(x)\tilde{u}(x) = 0, \quad x \in (a,b), \ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0.$$

Eine Lösung dieses Problems ist $\tilde{u}(x) \equiv 0$. Sei $\tilde{u}(x)$ eine weitere Lösung. Multipliziere nun die Gleichung mit dieser Lösung und integriere partiell. Das führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left(-\tilde{u}''(x)\tilde{u}(x) + \tilde{c}(x)\tilde{u}^2(x)\right) \, dx \\ &= -\tilde{u}''(1)\tilde{u}(1) + \tilde{u}''(0)\tilde{u}(0) + \int_0^1 \left(\left(\tilde{u}'(x)\right)^2 + \tilde{c}(x)\tilde{u}^2(x)\right) \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\left(\tilde{u}'(x)\right)^2 + \tilde{c}(x)\tilde{u}^2(x)\right) \, dx, \end{aligned}$$

da $\tilde{u}(x)$ an den Randpunkten verschwindet. Wegen $\tilde{c}(x) \geq 0$ ist der Integrand nichtnegativ, also muss er verschwinden. Daraus folgt insbesondere $\left(\tilde{u}'(x)\right)^2 = 0$, also $\tilde{u}'(x) = 0$, also ist $\tilde{u}(x)$ konstant. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{u}(x)$ und wegen der Randbedingungen folgt $\tilde{u}(x) \equiv 0$. Daraus ergibt sich aber auch

$$u(x) = \tilde{u}(x) \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x b(\xi) \, d\xi\right) \equiv 0,$$

im Widerspruch zur Annahme. ■

Bemerkung 1.17 Konstante Koeffizienten. Im Spezialfall konstanter Koeffizienten reduziert sich die Bedingung (1.7) auf

$$D := \frac{b^2}{4} + c \geq 0.$$

Auch für den Fall $D < 0$ kann man das Lösungsverhalten des Randwertproblems genau beschreiben, Übungsaufgabe. $\square$

Bemerkung 1.18 Anderes Kriterium zur Eindeutigkeit der Lösung des vollhomogenen Randwertproblem. Betrachte das Randwertproblem mit homogener rechter Seite (1.5), (1.6). Seien $u_1(x), u_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen und bezeichne

$$R := \det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Die Koeffizienten bestimmen sich aus den Randbedingungen

$$0 = c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0), \quad 0 = c_1 u_1(1) + c_2 u_2(1),$$

was zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist. Diese Lösung ist genau dann eindeutig ($c_1 = c_2 = 0$), falls $R \neq 0$ gilt. Genau in diesem Fall besitzt das vollhomogene Randwertproblem nur die triviale Lösung. $\square$

Bemerkung 1.19 Zum inhomogenen Randwertproblem. Betrachte nun das Randwertproblem mit inhomogener rechter Seite (1.5), (1.6). Seien $u_1(x), u_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Weiter bezeichne

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}$$

die Wronski[7]–Determinante. Wegen der linearen Unabhängigkeit gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [0,1]$, siehe Vorlesung Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Weiter seien

$$A(x) \quad := \quad \det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{pmatrix}, \quad B(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix}.$$

Für die Betrachtung des Randwertproblems mit inhomogener rechter Seite, wird der Begriff der Greenschen Funktion wiederholt. $\square$

Definition 1.20 Green[8]sche Funktion. Die Funktion $\Gamma(x,\xi)$ heißt Greensche Funktion für das homogene Randwertproblem $Lu = 0$, $u(0) = u(1) = 0$, wenn:

1. $\Gamma(x,\xi)$ ist stetig auf dem Quadrat $Q := \{(x,\xi) \ : \ x,\xi \in [0,1]\}$.

[7] Joseph Marie Wronski (1758 – 1853)
[8] Georg Green (1793 – 1841)

2. In jedem der Dreiecke

$$Q_1 := \{(x,\xi) \;:\; 0 \le \xi \le x \le 1\}, \quad Q_2 := \{(x,\xi) \;:\; 0 \le x \le \xi \le 1\}$$

existieren stetige partielle Ableitungen $\Gamma_x(x,\xi)$ und $\Gamma_{xx}(x,\xi)$.
3. Bei festem $\xi \in I = (0,1)$ ist $\Gamma(x,\xi)$ als Funktion von x eine Lösung von $L\Gamma = 0$ für $x \ne \xi$, $x \in I$.
4. Auf der Diagonalen $x = \xi$ besitzt die erste Ableitung eine Sprung der Form

$$\Gamma_x(x+0,x) - \Gamma_x(x-0,x) = \frac{1}{p(x)}, \quad 0 < x < 1,$$

mit

$$p(x) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x b(s)\; ds\right).$$

5. $\Gamma(0,\xi) = \Gamma(1,\xi) = 0$ für alle $\xi \in (0,1)$.

□

Satz 1.21 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit inhomogener rechter Seite. *Betrachte das Modellproblem (1.5), (1.6) mit $b, c, f \in C([0,1])$. Besitzt das zugehörige Randwertproblem für die Gleichung mit homogener rechter Seite nur die triviale Lösung, so besitzt das Randwertproblem (1.5), (1.6) genau eine klassische Lösung. Diese hat die Gestalt*

$$u(x) = \int_0^1 \Gamma(x,\xi) f(\xi)\; d\xi$$

mit der Greenschen Funktion

$$\Gamma(x,\xi) = \frac{1}{R\; W(\xi)} \begin{cases} A(\xi)B(x) & \text{für } 0 \le \xi \le x \le 1, \\ A(x)B(\xi) & \text{für } 0 \le x \le \xi \le 1. \end{cases}$$

Beweis: Dass $\Gamma(x,\xi)$ eine Greensche Funktion ist, rechnet man direkt. Die Existenz einer Lösung zeigt man, indem man nachrechnet, dass $u(x)$ Lösung des Randwertproblems (1.5), (1.6) ist. Die Eindeutigkeit folgt schließlich analog zu Bemerkung 1.18, indem man zeigt, dass sich die freien Parameter der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung unter den gegebenen Voraussetzungen eindeutig bestimmen lassen. ■

Dass das vollhomogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, ist zum Beispiel gegeben, wenn (1.7) erfüllt ist. Die Umkehrung des vorstehenden Satzes gilt auch.

Satz 1.22 *Besitzt das inhomogene Randwertproblem (1.5), (1.6) genau eine klassische Lösung, so besitzt das zugehörige Randwertproblem mit homogener rechter Seite nur die triviale Lösung.*

Beweis: Sei $u(x)$ die eindeutige klassischen Lösung des inhomogenen Randwertproblems. Sei $u_h(x)$ eine nichttrivale Lösung des vollhomogenen Randwertproblems, dann folgt auf Grund der Linearität des Problems, dass dann $u(x) + u_h(x)$ eine klassischen Lösung des inhomogenen Randwertproblems ist, im Widerspruch zur vorausgesetzten Einzigkeit dieser Lösung. ■

Folgerung 1.23 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit beliebigen Dirichlet–Randdaten. *Betrachte das Modellproblem (1.5) mit $b \in C^1([0,1])$, $c, f \in C([0,1])$ und mit den Dirichlet–Randdaten $u(0) = a$, $u(1) = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Gilt für alle $x \in (0,1)$ die Beziehung (1.7), dann existiert genau eine klassische Lösung.*

Beweis: Inhomogene Dirichlet–Randdaten können in die rechte Seite transformiert werden, siehe Bemerkung 1.4. Diese Transformation ist zweimal stetig differenzierbar und sie kann so erfolgen, dass die neue rechte Seite stetig in $[0,1]$ ist. Für das so erhaltene Problem mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen kann man die obigen Aussagen anwenden. Nach Satz 1.16 besitzt das vollhomogene Problem nur die triviale Lösung. Aus Satz 1.21 folgt, dass es genau eine klassische Lösung gibt. Da die Rücktransformation zweimal stetig differenzierbar ist, existiert damit genau eine klassische Lösung für das Problem mit inhomogenen Dirichlet–Randbedingungen. ■

Bemerkung 1.24 Es gibt auch andere hinreichende Bedingungen als (1.7) dafür, dass das vollhomogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, siehe Folgerung 1.30. □

1.3 Maximumprinzip und Stabilität

Im Folgenden sei L der durch

$$(Lu)(x) := -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x), \quad x \in (0,1)$$

definierte lineare Differentialoperator, der für $b, c \in C([0,1])$ offenbar $C^2(0,1)$ in $C(0,1)$ abbildet.

Lemma 1.25 *Seien $b \in C([0,1])$ und $c(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Dann gilt für jedes $u \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$*

i) aus $(Lu)(x) \le 0$ für $x \in (0,1)$ folgt $u(x) \le \max\{u(0), u(1)\}$ für $x \in [0,1]$,

ii) aus $(Lu)(x) \ge 0$ für $x \in (0,1)$ folgt $u(x) \ge \min\{u(0), u(1)\}$ für $x \in [0,1]$.

Beweis: Es braucht nur i) gezeigt zu werden. Die Aussage ii) ergibt sich dann, wenn $u(x)$ durch $-u(x)$ ersetzt wird.

Es wird zuerst gezeigt, dass aus der schärferen Voraussetzung $(Lu)(x) < 0$ auf $(0,1)$ die Behauptung folgt. Angenommen, die Funktion $u(x)$ nimmt ihr Maximum nicht am Rand, sondern im Inneren des Intervalls an. Dann gibt es ein $x_0 \in (0,1)$, mit $u'(x_0) = 0$ (lokales Extremum) und $u''(x_0) \le 0$ (lokales Maximum). Es folgt

$$-u''(x_0) + b(x_0)u'(x_0) = -u''(x_0) \ge 0,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Nun wird i) gezeigt. Hierzu sei für $\delta, \lambda > 0$

$$w(x) = \delta e^{\lambda x}, \quad x \in [0,1].$$

Ist λ hinreichend groß, $\lambda > \max_{x\in[0,1]} b(x)$, so gilt für alle $x \in (0,1)$

$$(Lw)(x) = -\lambda^2 w(x) + b(x)\lambda w(x) = -\lambda\left(\lambda - b(x)\right) w(x) < 0.$$

Mit der Linearität des Differentialoperators folgt

$$\left(L(u+w)\right)(x) = (Lu)(x) + (Lw)(x) < 0.$$

Nach dem ersten Teil des Beweises gilt

$$u(x) + w(x) \le \max\{u(0) + w(0) + u(1) + w(1)\}.$$

Für $\delta \to 0$ ergibt sich die Behauptung. ■

Satz 1.26 Maximumprinzip. *Seien $b, c \in C([0,1])$ und $c(x)$ auf $[0,1]$ nichtnegativ. Dann gilt für jedes $u \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$*

i) aus $(Lu)(x) \le 0$ *für alle* $x \in (0,1)$ *folgt* $u(x) \le \max\{0, u(0), u(1)\}$ *für* $x \in [0,1]$,

ii) aus $(Lu)(x) \ge 0$ *für alle* $x \in (0,1)$ *folgt* $u(x) \ge \min\{0, u(0), u(1)\}$ *für* $x \in [0,1]$.

Beweis: Wiederum ergibt sich die zweite Aussage aus der ersten, wenn man dort $u(x)$ durch $-u(x)$ ersetzt.

Da $u(x)$ in $[0,1]$ stetig ist, ist die Menge

$$\mathcal{M}^+ := \{x \in (0,1) \ : \ u(x) > 0\}$$

entweder leer oder die Vereinigung offener Teilintervalle von $(0,1)$, Analyis I. Sei $\mathcal{M}^+ = \emptyset$, sei also $u(x)$ in $(0,1)$ nichtpositiv. Dann ist die die Behauptung trivialerweise erfüllt.

Sei $\mathcal{M}^+ = (0,1)$. Dann gilt für $x \in (0,1)$

$$-u''(x) + b(x)u'(x) \le -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = (Lu)(x) \le 0.$$

Nach Lemma 1.25 folgt

$$u(x) \le \max\{u(0), u(1)\},$$

was die Behauptung auch in diesem Falle zeigt.

Sei nun $\emptyset \ne \mathcal{M}^+ \ne (0,1)$. Es wird gezeigt, dass $\mathcal{M}^+$ an 0 oder 1 heranreichen muss. Sei $(a_0, b_0) \subseteq \mathcal{M}^+$. Gelten $a_0 \ne 0$ und $u(a_0) > 0$, so folgt, wegen der Stetigkeit von $u(x)$, dass entweder $u(0) > 0$ oder ein $0 \le a_1 < a_0$ existiert mit $u(a_1) = 0$. Analoges gilt für b_0. Man kann daher $a_0 = 0$ oder $u(a_0) = 0$ sowie $b_0 = 1$ oder $u(b_0) = 0$ annehmen. Nach der Voraussetzung gilt für alle $x \in (a_0, b_0)$

$$(Lu)(x) \le 0 \quad \Longrightarrow \quad -u''(x) + b(x)u'(x) \le -c(x)u(x) \le 0.$$

Damit kann man wieder Lemma 1.25 anwenden. Es folgt also für alle $x \in (a_0, b_0)$

$$0 < u(x) \le \max\{u(a_0), u(b_0)\}. \tag{1.8}$$

Offenbar kann nicht zugleich $u(a_0) = u(b_0) = 0$ gelten, denn dies würde dieser Relation widersprechen. Der Fall $a_0 = 0, b_0 = 1$ wurde bereits betrachtet. Es bleiben die Fälle $a_0 = 0$ und $u(b_0) = 0$ sowie $u(a_0) = 0$ und $b_0 = 1$.

Damit ist gezeigt: Ist die Menge $\mathcal{M}^+$ nicht leer, so gibt es Zahlen $\hat{a}, \hat{b} \in [0,1]$ mit $\hat{a} \le \hat{b}$, so dass

$$\mathcal{M}^+ = (0, \hat{a}) \cup (\hat{b}, 1),$$

wobei $u(\hat{a}) = 0$ wenn $\hat{a} \ne 0$, und $u(\hat{b}) = 0$, wenn $\hat{b} \ne 1$. Mit (1.8) gilt für $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u(x) &\le \max\left\{\max_{x\in(0,\hat{a})} u(x), \max_{x\in(\hat{b},1)} u(x), 0\right\} \\ &\le \max\left\{\max\{u(0), u(\hat{a})\}, \max\{u(\hat{b}), u(1)\}, 0\right\} \\ &= \max\{0, u(0), u(1)\}. \end{aligned}$$

■

Folgerung 1.27 Inverse Monotonie, Isotonie, Vergleichsprinzip. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.26 folgt für zwei Funktionen* $u, v \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$ *mit* $u(0) \le v(0)$ *und* $u(1) \le v(1)$ *aus* $(Lu)(x) \le (Lv)(x)$ *für* $x \in (0,1)$, *dass* $u(x) \le v(x)$ *für* $x \in [0,1]$.

Beweis: Satz 1.26 ist auf die Differenz $(u - v)(x)$ anzuwenden. ■

Mit Hilfe des Maximumprinzips kann man nun eine Stabilitätsabschätzung für Lösungen des inhomogenen Randwertproblems beweisen, welche die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten zeigt.

Satz 1.28 Stabilität der Lösung und stetige Abhängigkeit von den Daten. *Vorgelegt sei das Randwertproblem (1.5), (1.6), mit $b, c, f \in C([0,1])$. Ist $c(x)$ auf $[0,1]$ nichtnegativ, so gilt für jede klassische Lösung $u(x)$ die Abschätzung*

$$\|u\|_{C([0,1])} \le \Lambda \|f\|_{C([0,1])},$$

wobei die Konstante $\Lambda > 0$ von $b(x), c(x)$ abhängt, aber nicht von $f(x)$.

Beweis: Für ein noch zu spezifizierendes $\lambda > 0$ setzt man

$$w(x) := Be^{\lambda x} - A, \quad x \in (0,1),$$

mit

$$A := \Lambda B, \quad B := \|f\|_{C([0,1])}, \quad \Lambda := e^{\lambda} - 1 > 0.$$

Dann gilt für $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}(Lw)(x) &= -\big(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)\big) Be^{\lambda x} - Ac(x) \\ &\le -\big(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)\big) Be^{\lambda x}.\end{aligned}$$

Nun wählt man λ derart, dass $\big(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)\big) e^{\lambda x} \ge 1$. Diese Relation ist erfüllt, wenn λ groß genug ist, etwa

$$\lambda \ge \max_{x\in[0,1]} \left(\frac{b(x)}{2} + \sqrt{\frac{b^2(x)}{4} + c(x) + 1} \right),$$

da $e^{\lambda x} \ge 1$. Dann gilt für alle $x \in (0,1)$

$$(Lw)(x) \le -B = -\|f\|_{C([0,1])}.$$

Es folgt für alle $x \in (0,1)$ mit Hilfe der Normdefinition im Raum der stetigen Funktionen

$$(L(\pm u + w))(x) = \pm f(x) + (Lw)(x) \le |f(x)| - \|f\|_{C([0,1])} \le 0.$$

Nach dem Maximumprinzip gilt

$$\pm u(x) + w(x) \le \max\{0, \pm u(0) + w(0), \pm u(1) + w(1)\} = \max\{0, w(0), w(1)\}.$$

Damit folgt für alle $x \in (0,1)$

$$\pm u(x) \le \max\{0, w(0), w(1)\} - w(x).$$

Aus $e^{\lambda x} \ge 1$ folgt

$$w(x) \ge B - A = w(0), \quad w(1) = Be^{\lambda} - A,$$

also

$$\begin{aligned}|u(x)| &\le \max\{0, w(0), w(1)\} - w(x) \le \max\{0, B - A, Be^{\lambda} - A\} + A - B \\ &= \max\{A - B, 0, B(e^{\lambda} - 1)\} = \max\{A - B, 0, \Lambda B\} = \max\{A - B, 0, A\} = A,\end{aligned}$$

was die Behauptung war. ■

Bemerkung 1.29 Nichtnormiertes Problem. Für das nichtnormierte Problem (1.1), (1.2) mit Dirichlet–Randbedingungen $u(d) = \alpha$, $u(e) = \beta$ erhält man analog

$$\|u\|_{C([e,d])} \le \Lambda \|f\|_{C([e,d])} + \max\{|\alpha|, |\beta|\},$$

wobei Λ jetzt auch von $e - d$ abhängen kann, aber nicht von α, β abhängt, [Emm04, Satz 2.5.4], Übungsaufgabe.

Dass diese Abschätzung tatsächlich eine Stabilitätsabschätzung ist, sieht man ein, wenn man sie auf die Differenz $u(x) - \tilde{u}(x)$ anwendet. Dabei sei $u(x)$ Lösung des exakten Problems und $\tilde{u}(x)$ Lösung eines Problems mit gestörter rechter Seite $\tilde{f}$ oder gestörten Randbedingungen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. Aus der Linearität des Problems folgt sofort

$$\|u - \tilde{u}\|_{C([e,d])} \le \Lambda \left\|f - \tilde{f}\right\|_{C([e,d])} + \max\left\{|\alpha - \tilde{\alpha}|, \left|\beta - \tilde{\beta}\right|\right\}.$$

Das bedeutet, kleine Störungen in den Daten führen auch nur zu kleinen Störungen in der Lösung. □

Folgerung 1.30 Eindeutigkeit der Lösung des homogenen Problems. *Gegeben sei das Randwertproblem (1.5), (1.6), mit $b, c \in C([0,1])$ und $f(x) \equiv 0$. Ist $c(x)$ auf $[0,1]$ nichtnegativ, so besitzt das Problem nur die triviale Lösung $u(x) \equiv 0$.*

Beweis: Das folgt unmittelbar aus der Abschätzung von Satz 1.28 ∎

Bemerkung 1.31 Diese Aussage folgt auch schon aus dem Maximumprinzip, Satz 1.26, weil für ein homogenes Problem beide Teile i) und ii) dieses Satzes gelten. □

Folgerung 1.32 *Vorgelegt sei das Randwertproblem (1.5), (1.6) mit $b, c, f \in C([0,1])$. Ist $c(x)$ auf $[0,1]$ nichtnegativ, so besitzt das Randwertproblem genau eine klassischen Lösung.*

Beweis: Das folgt unmittelbar aus Folgerung 1.30 und Satz 1.21. ∎

Jetzt wird noch das starke Maximumprinzip eingeführt.

Lemma 1.33 *Seien $b, c \in C([0,1])$, sei $c(x)$ auf $[0,1]$ nichtnegativ und gelte $u \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$. Gilt $(Lu)(x) < 0$ für alle $x \in (0,1)$, so kann $u(x)$ kein nichtnegatives Maximum im Innern des Intervalls annehmen.*

Beweis: Übungsaufgabe. Angenommen, es gäbe ein nichtnegatives inneres Maximum $x_0 \in (0,1)$. Dann sind $u(x_0) \geq 0$, $u'(x_0) = 0$ und $u''(x_0) \leq 0$. Damit folgt

$$(Lu)(x_0) = -u''(x_0) + b(x_0)u'(x_0) + d(x_0)u(x_0) \geq 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ∎

Satz 1.34 Starkes Maximumprinzip. *Seien $b, c \in C([0,1])$ und sei $c(x)$ auf $[0,1]$ nichtnegativ. Nimmt $u \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$ im Inneren des Intervalls ein nichtnegatives Maximum an und gilt $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in (0,1)$, so ist $u(x)$ konstant.*

Beweis: Die Funktion $u(x)$ nehme in $x_0 \in (0,1)$ das größte nichtnegative Maximum an, also gilt insbesondere $u(x_0) \geq 0$.

Angenommen, $u(x)$ sei nicht konstant. Dann gibt es ein $x_1 \in (0,1)$ mit $u(x_1) < u(x_0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_1 > x_0$, der Fall $x_1 < x_0$ kann analog behandelt werden.

Es sei für $\delta, \lambda > 0$

$$w(x) := \delta \left(e^{\lambda(x - x_0)} - 1 \right), \quad x \in [0, x_1].$$

Offenbar gelten

$$w(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < x_0, \\ = 0 & \text{für } x = x_0, \\ > 0 & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

Nun wählt man λ hinreichend groß, etwa

$$\lambda \geq \max_{x \in [0, x_1]} \left(\frac{b(x)}{2} + \sqrt{\frac{b^2(x)}{4} + c(x)} \right),$$

so dass für alle $x \in (0, x_1)$ gilt

$$(Lw)(x) = -\left(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)\right) \delta e^{\lambda(x - x_0)} - c(x)\delta < 0.$$

Nun wird δ so klein gewählt, dass

$$u(x_1) + w(x_1) < u(x_0).$$

Dann gilt nach Voraussetzung auch

$$(L(u+w))(x) = (Lu)(x) + (Lw)(x) < 0, \quad x \in (0, x_1).$$

Wegen

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &< u(x_0), \quad \text{für } x \in (0, x_0), \\ u(x_0) + w(x_0) &= u(x_0), \\ u(x_1) + w(x_1) &< u(x_0), \end{aligned}$$

nimmt die Funktion $(u+w)(x)$ in $(0, x_1)$ ein nichtnegatives Maximum an. Das steht nach Lemma 1.33 im Widerspruch zu $(L(u+w))(x) < 0$. Demzufolge ist die Annahme, dass $u(x)$ nicht konstant ist, falsch. ■

Bemerkung 1.35 Durch Ersetzung von $u(x)$ mit $-u(x)$ erhält man aus den Maximumprinzipien entsprechende Minimumprinzipien. □