Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John, Dr. A. Linke
john@wias-berlin.de, linke@wias-berlin.de

Berlin, 15.12.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Simulation inkompressibler Strömungen (Numerik IVb)

Serie 02

abzugeben vor der Vorlesung am Montag, dem 10.01.2011

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

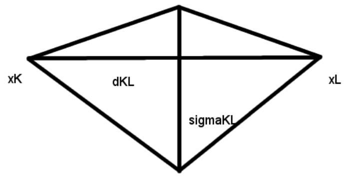
1. *Zur Inf–sup–Bedingung.* Man zeige, dass die im zweiten Teil des Beweises von Lemma 3.9 konstruierte Abbildung $\phi \mapsto \psi$ ein Isomorphismus $(V_0^\perp)' \to \tilde{V}'$ ist. **4 Punkte**

2. *Exakte Lösung einer Navier–Stokes–Gleichung.* Eine viskose Flüssigkeit mit konstanter Dichte und konstanter Viskosität fällt durch die Gravitation bedingt zwischen zwei parallelen Platten mit Abstand $2b$. Die Strömung sei stationär und voll ausgebildet, das heißt, die Geschwindigkeit hat die Gestalt $\mathbf{u} = (0, 0, u_3(x))$, wobei x die Koordinatenrichtung senkrecht zu den Platten bezeichnet. Druckgradienten liegen nicht vor, es wirkt lediglich die Schwerkraft. Die Flüssigkeit haftet an den Platten.

   Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass die Ebene $x = 0$ gerade in der Mitte der Platten liegt. Man bestimme das Geschwindigkeitsprofil der Strömung. **4 Punkte**

3. *Exponential Fitting in 1d.* Gegeben sei eine Triangulierung des Intervalls $[0, 1]$, die durch eine Menge von n Knoten $x_1 = 0 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ beschrieben ist. Man berechne die Steifigkeitsmatrix A_h und die rechte Seite s_h des Problems
$$-Dc_{xx} + c_x = 1$$
   mit homogenen Dirichlet–Randdaten bei Verwendung der Finite–Volumen–Methode mit Exponential Fitting. Man berechne das diskrete Residuum
$$res_h = s_h - A_h\bar{c}_h,$$
   wenn für $\bar{c}_h$ die knotenexakte Interpolation der Lösung c des kontinuierlichen Ausgangsproblems verwenden wird, d.h.,
$$\bar{c}_h = \left(0, \ldots, x_i - \frac{1}{e^{1/D} - 1} e^{x_i/D} + \frac{1}{e^{1/D} - 1}, \ldots, 0\right)^T$$
   mit $i = 2, \ldots, n - 1$. **4 Punkte**

4. *Konsistenz des diskreten Flusses.*



Man betrachte die Finite–Volumen–Diskretisierung für $d > 1$ einer Konvektions–Diffusionsgleichung, d.h., es gilt $\mathbf{q} = -D\nabla c + c\mathbf{v}$ mit einem Strömungsfeld $\mathbf{v} \in C^1(\Omega)$. Weiter wird angenommen, dass $c \in C^2(\Omega)$ liegt und dass σ_{KL} die Begrenzungsfläche der Voronoi-Boxen K und L bilde. Mit welcher Ordnung in der lokalen Gitterweite d_{KL} wird dann der durchschnittliche Fluss durch die Seite σ_{KL}

$$\bar{g}_{KL} := \frac{1}{|\sigma_{KL}|} \int_{\sigma_{KL}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{h}_{\sigma_{KL}}$$

durch den diskreten Ausdruck

$$g_{KL}(c(\mathbf{x}_K), c(\mathbf{x}_L), v_{\sigma_{KL}})$$

approximiert ?

Hinweis: Es genügt sich auf den Fall $d = 2$ zu beschränken, und zu beachten, dass auf Grund der Regularität des Gitters $|\sigma_{KL}| < Cd_{KL}$ gilt. Man betrachte den konvektiven und diffusiven Fluss separat, und benutze Taylor–Entwicklungen der Funktion c. **4 Punkte**

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !