FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 08.11.2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung Modellierung und Programmierung

Serie 02

abzugeben vor der Vorlesung am 15.11.2006

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe :
   Man zeige, dass die Funktion
   $$u(x) = \left(1 + \frac{2}{\lambda^3}\right) e^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda^3}\left(\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2\right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
   das Anfangswertproblem (AWP)
   $$u'(x) = \lambda u + x^2 (= f(x,u)), \quad u(0) = 1 \tag{1}$$
   löst.

2. Aufgabe :
   Man berechne die numerische Lösung des AWP (1) mit $\lambda = 1$, im Intervall $[0,1]$, mit der Schrittweite $h = 0.1$ und mit
   - dem expliziten Euler-Verfahren
     $$u_{k+1}^h = u_k^h + hf(x_k, u_k), \quad u_0^h = u(0),$$
   - dem impliziten Euler-Verfahren
     $$u_{k+1}^h = u_k^h + hf(x_{k+1}, u_{k+1}^h), \quad u_0^h = u(0),$$
   - der Trapezregel
     $$u_{k+1}^h = u_k^h + \frac{h}{2}(f(x_k, u_k^h) + f(x_{k+1}, u_{k+1}^h)), \quad u_0^h = u(0).$$

   Man vergleiche die Ergebnisse mit der analytischen Lösung für $x = 1$ und betrachte in diesem Punkt den relativen Fehler,
   $$\frac{|u(1) - u^h(1)|}{|u(1)|} \cdot 100\%.$$
   Welches Verfahren liefert den kleinsten Fehler?
   Hinweise: Im Falle des gegebenen AWP kann man alle Formeln nach y_{k+1} umstellen und braucht dann nur noch einzusetzen. Zur Lösung benutze man einen Taschenrechner (3 Nachkommastellen sind ausreichend).

3. Aufgabe :
   Man bearbeite die gleiche Aufgabenstellung wie in Aufgabe 2 für $\lambda = -25$.