Lösungen zum 38. Präsenzblatt für MfI 3

1. Aufgabe:
   a) Z nimmt die Werte $k = 0, 1, 2, \ldots$ an, also nur einen nichtpositive Wert, nmlich $k = 0$. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten der auftretenden Ereignisse ist gleich 1
   leicht nachzuprüfen durch:
   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \frac{1}{e^{-a}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = \frac{e^a}{e^a} = 1$$
   somit gilt
   $$P(Z > 0) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-a} = 1 - e^{-a} (a > 0 \text{ nach Vor.})$$
   Die Wahrscheinlichkeit, dass Z einen positiven Wert annimmt ist somit $1-e^{-a}$.
   b) Da $z \in \mathbb{N}$ gilt, nimmt z in $(10, 13.9)$ die Werte 11,12,13 an.
   Es gilt dann
   $$\begin{aligned} P(z \in 10, 13.9) &= P(z = 11) + P(z = 12) + P(z = 13) = \left(\frac{a^{11}}{11!} + \frac{a^{12}}{12!} + \frac{a^{13}}{13!} \right) e^{-a} \\ &= \left(1 + \frac{a}{12} + \frac{a^2}{12 \cdot 13} \right) \frac{a^{11}}{11!} e^{-a} \end{aligned} \tag{1}$$

2. Aufgabe:
   Man zeige, dass die Poisson-Verteilung dem EW λ und die Varianz λ besitzt.

   Lösung: Poisson-Verteilung:
   $$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0 \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$
   - Erwartungswert
   $$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$
   - Varianz
   $$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k - E(x))^2 \frac{\lambda^2}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - 2\lambda k + \lambda^2) \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} - 2\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda^2 e^{\lambda} \right) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) + k) \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 \\ &= e^{-\lambda} \Big(\lambda^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^{\lambda}} + \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{k!}}_{e^{\lambda}} \Big) - \lambda^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$