Lösungen zum 39. Aufgabenblatt für MfI 3

1. Aufgabe :
   Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)^2}$$

gegeben:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0.95} f(t)\,\mathrm{d}t &= 0.1 \\
\int_{-\infty}^{1.05} f(t)\,\mathrm{d}t &= 0.95 \\
\int_{-\infty}^{\mu} f(t)\,\mathrm{d}t &= 0.5
\end{aligned}$$

gesucht: μ, σ
Es ist:

$$\begin{aligned}
F_z\,(X = 0.95) &= \int_{-\infty}^{0.95} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0.1 \\
&= \Phi_z\left(X = \frac{0.85-\mu}{\sigma}\right) \\
F_z\,(X = 1.05) &= \int_{-\infty}^{1.05} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0.95 \\
&= \Phi_z\left(X = \frac{1.05-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

$\Phi(X)$ normierte Normalverteilung. Aus Tabellen erhält man (mit Rundung):

$$\begin{aligned}
0.95 &= \Phi\,(1.65) \\
0.1 &= \Phi\,(-1.28)
\end{aligned}$$

Man erhält zwei Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
-1.28\sigma &= 0.95 - \mu \\
1.65\sigma &= 1.05 - \mu \\
-\mu &= -1.28\sigma - 0.95 \\
1.65\sigma &= 1.05 - 1.28\sigma - 0.95 \\
2.93\sigma &= 0.1 \\
\sigma &= 3.413 \cdot 10^{-2} \\
\mu &= 0.9937
\end{aligned}$$

2. Aufgabe :
   Normalverteilung:

$$\begin{aligned} \mu &= 10\,\mathrm{mm} \\ \sigma &= 0.02\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} P\left(Z < 9.97\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.02}\int_{-\infty}^{9.97} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{0.02}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \Phi\left(\frac{9.97-10}{0.02}\right) \\ &= \Phi\left(-1.5\right) \\ &= 1-\Phi\left(1.5\right) \\ &= 1-0.933193 \\ &= 0.066807 \end{aligned}$$

D.h. 6.6807% Ausschuss sind zu erwarten.

(b)

$$\begin{aligned} P\left(Z > 10.05\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.02}\int_{10.05}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{0.02}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 1-\Phi\left(\frac{10.05-10}{0.02}\right) \\ &= 1-\Phi\left(1.5\right) \\ &= 1-0.993790 \\ &= 0.00621 \end{aligned}$$

D.h. 0.621% Ausschuss sind zu erwarten.

(c)

$$\begin{aligned} 0.05 &\geq \int_{-\infty}^{10-c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.02} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{0.02}\right)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{10+c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.02} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{0.02}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \Phi\left(\frac{10-c-10}{0.02}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{10+c-10}{0.02}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-c}{0.02}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{c}{0.02}\right) + 1 \\ &= -2\Phi\left(\frac{c}{0.02}\right) + 2 \\ \Phi\left(\frac{c}{0.02}\right) &= 0.975 \\ \frac{c}{0.02} &= 1.96 \\ c &\geq 0.0392 \end{aligned}$$

Bei einer Toleranz von $c \geq 0.0392$ ist 5% Ausschuss zu erwarten.

3. Aufgabe :

(a)

$$\alpha = 12$$

(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 12\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right), & 0 < x \leq 1, \quad E(X) = \frac{3}{5}, \quad D^2(X) = \frac{1}{25} \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

(c)

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = 0.3125$$

$$P\left(X < E(X)\right) = 0.4752$$