Lösungen zum 29. Präsenzblatt für MfI 3

1. Aufgabe :
   Zuerst um $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$, dann um $\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$ drehen:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Q_2 &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
A &= Q_2 Q_1 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe :

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -4 & -2 \\ -8 & 5-\lambda & 1 & -8 \\ 0 & 3 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
\text{nach der 3. Zeile} &= -3\left(-136-8x+x^2\right)+(1-\lambda)\left(-104+32x+5x^2-x^3\right) \\
&= \lambda^4-8\lambda^3-16\lambda^2+128\lambda \\
\lambda_1 &= 0 \quad \text{offensichtliche Lösung} \\
\lambda_2 &= 4 \quad \text{weitere Lösung}
\end{aligned}
$$

Polynomdivision liefert:

$$
\begin{aligned}
\lambda^4-8\lambda^3-16\lambda^2+128\lambda &= \lambda(\lambda-4)\left(\lambda^2-4\lambda-32\right) \\
\lambda_3 &= -4 \quad \text{weitere Lösung} \\
\lambda_4 &= 8 \quad \text{weitere Lösung}
\end{aligned}
$$

Der zum Eigenwert λ_i gehörende Eigenraum ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems

$$(A-\lambda_i I)\,\mathbf{x}_i = 0.$$

Die Matrix A hat nur reelle Eigenwerte und jeder Eigenraum hat die Dimension 1. Zu jedem Eigenwert ermittelt man einen Eigenvektor aus:

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x}_1 &= 0, \\
(A-4I)\,\mathbf{x}_2 &= 0, \\
(A+4I)\,\mathbf{x}_3 &= 0, \\
(A-8I)\,\mathbf{x}_4 &= 0
\end{aligned}
$$

und erhält als Lösung dieser Gleichungssysyteme etwa

$$
\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$