Lösungen zu den 24. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe:
   Zunächst gilt laut Vorlesung:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(f) &\leq m, \\ \mathrm{Rg}(f) &\leq n. \end{aligned}$$

   Wenn $m < n$, so ist also auch durch $\mathrm{Rg}(f) < n$.
   Bleibt noch der Fall $n \leq m$. $\mathrm{Rg}(f) = n$ gilt genau dann, wenn bei der Abbildung $f : A\mathbf{x} \to \mathbf{c}$ alle Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind, wenn also aus $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (andernfalls gilt: $\mathrm{Rg}(f) < n$).

   Zunächst soll gezeigt werden, dass sich bei den elementaren Umformungen im linearen Gleichungssystem die Summe der Komponenten, wenn diese Null ist, nicht ändert.

   Das obige Problem läuft ja auf die Frage der Lösungsmenge von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hinaus. Dass sich beim Vertauschen zweier Zahlen die Summe der Komponenten nicht ändert ist offensichtlich. Beim Multiplizieren einer Zeile mit einer reellen Zahl bleibt die Summe ebenfalls Null.

   Falls man ein reelles Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addiert, ist die Komponentensumme des Ergebnisses Null. Es sei:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj} &= 0 \\ \Longrightarrow & \quad \text{addieren eines Vielfachen} \\ \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + c a_{kj}) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + c \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Damit kann man im obigen Gleichungssystem die elementaren Umformungen vornehmen. Es ist offensichtlich, dass man keine Zeile der Form $(0, 0, 1, 0, \ldots, 0 \mid 0)$ (ein Eintrag sonst Nullen))erhält, da die Summe der Komponenten in diesem Fall ungleich Null wäre. Somit müssen in jeder nichttrivialen Zeile mindestens zwei von Null verschiedene Zahlen stehen. Man erhält also mindestens einen Parameter und damit ist $\mathrm{Rg}(f) < n$, also $\mathrm{Rg}(f) \leq n - 1$.

2. Aufgabe :
Die Bestimmung der Basen von $\ker(f)$ läuft auf die Frage nach der Anzahl der Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = \mathbf{0}$ hinaus und damit auf die lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren von A; da $\ker(f)$ gleich der linearen Hülle dieser Spaltenvektoren ist. Damit ist auch hier das Problem der Lösungsmenge von $A\mathbf{x} = 0$ gegeben.

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \text{umformen} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Woraus folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{x_3}{3} \\ x_2 &= \frac{2}{3}x_3 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten beim Lösen des Gleichungssystems einen Parameter. Damit ist die Dimension von $\ker(f) = 1$ und für jedes beliebige $x_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ erhalten wir eine Basis von $\ker(f)$. Für $x_3 = 3$ ist dies z.B. $\mathbf{x} = (-1, 2, 3, 0)^T$. Der dritte Spaltenvektor läßt sich als Linearkombination der ersten zwei Spaltenvektoren darstellen ($\lambda = \frac{1}{3}$ und $\mu = -\frac{2}{3}$). Damit bilden folgende Vektoren eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) analog zu (a) erhält man:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \text{umformen} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Woraus folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

Für jede beliebige $x_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ erhält man eine Basis von $\ker(f)$, z.B. x_3 = -2 liefert $\mathbf{x} = (1, 1, -2)^T$. Der dritte Spaltenvektor läßt sich als Linearkombination der ersten zwei darstellen. Damit ist eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) analog zu (a) erhält man:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \text{einsetzen liefert} \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 0$$

Damit hat $\ker(f)$ die Dimension Null. Die drei Spaltenvektoren von C sind linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Basis von $\{\mathbf{0}\}$ ist $\emptyset$.

(d) analog zu (a) erhält man:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \text{einsetzen liefert} \quad x_3 = 0 \text{ und} \quad x_1, x_2 \text{ frei wählbar}$$

Man erhält also zwei Parameter. Eine Basis von $\ker(f)$ ist z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$ ist:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe :

Wenn ein beliebiger Vektor (a, b, c) vorgegeben ist, so läßt sich dieser als

$$(a, b, c) \quad = \quad a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$$

schreiben. Es ist,

$$f((a, b, c)) \quad = \quad f(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3)$$

und nach Definition der linearen Abbildung gilt:

$$f((a, b, c)) \quad = \quad af(\mathbf{e}_1) + bf(\mathbf{e}_2) + cf(\mathbf{e}_3)$$

Es ist demnach

$$\begin{aligned}
f((1, 2, 3)) &= 1f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2) + 3f(\mathbf{e}_3) \\
&= (1, 2) + 2(0, 3) + 3(-2, 4) \\
&= (-5, 20) \\
f((-1, 0, 1)) &= -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) \\
&= -(1, 2) + (-2, 4) \\
&= (-3, 2) \\
f((6, 5, 7)) &= 6f(\mathbf{e}_1) + 5f(\mathbf{e}_2) + 7f(\mathbf{e}_3) \\
&= 6(1, 2) + 5(0, 3) + 7(-2, 4) \\
&= (-8, 55)
\end{aligned}$$