Lösungen zu den 22. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe:
   Aus Aufgabe 3 von Serie 21 ist bekannt:

$$\begin{aligned} P_{00} &= -1.233963429739475 \\ P_{10} &= -0.661175888693897 \\ P_{20} &= -0.513162130182004 \\ P_{30} &= -0.475849090339943 \end{aligned}$$

   Romberg–Verfahren:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{4P_{10} - P_{00}}{3} \\ P_{21} &= \frac{4P_{20} - P_{10}}{3} \\ P_{31} &= \frac{4P_{30} - P_{20}}{3} \\ P_{22} &= \frac{4^2 P_{21} - P_{11}}{4^2 - 1} \\ P_{32} &= \frac{4^2 P_{31} - P_{21}}{4^2 - 1} \\ P_{33} &= \frac{4^3 P_{32} - P_{22}}{4^3 - 1} \end{aligned}$$

   Ergebnis:

$$\begin{aligned} P_{11} &= -0.470246708345371 \\ P_{21} &= -0.463824210678040 \\ P_{31} &= -0.463411410392589 \\ P_{22} &= -0.463396044166884 \\ P_{32} &= -0.463383890373559 \\ P_{33} &= -0.463383697456205 \end{aligned}$$

   Maple Ergebnis: $-.4633836839$

2. Aufgabe:

(a) $M_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, a_n = 0\}$
Bei einer additiven Verknüpfung zweier n–Tupel der obigen Form bleibt $a_n = 0$ erhalten. Die Addition ist also eine Verknüpfung. Falls das erfüllt ist, gelten nach Vorlesung Assoziativ– und Kommutativgesetz. Das neutrale Element ist ebenfalls vorhanden, $(0, \ldots, 0)$. Zu jedem Element gehört ein Inverses. Die Menge ist bzgl. der Addition also eine Abelgruppe.

Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \times M_1 \to M_1$ existiert mit $(r, m) \to rm$. Die vier Bedingungen, die bei dieser Abbildung erfüllt sein müssen,

- $r(sm) = (rs)m$
- $1m = m$
- $(r + s)m = rm + sm$
- $r(m + n) = rm + rn$

sind nach den Rechenregeln mit n–Tupeln, für $r, s \in \mathbb{R}$ und $m, n \in M_1$ erfüllt. M_1 bildet einen $\mathbb{R}$–Vektorraum.

(b) $M_2 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, a_1 + a_n = 1\}$
Bei einer additiven Verknüpfung zweier Elemente von M_2 ist:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (a'_1, \ldots, a'_n) \quad = \quad (a_1 + a'_1, \ldots, a_n + a'_n)$$

Es gilt dann:

$$a_1 + a_n \;=\; 1, \qquad a'_1 + a'_n \;=\; 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 + a'_1 + a_n + a'_n \;=\; 2$$

M_2 ist also keine abelsche Gruppe bzgl. der Addition und damit kein Vektorraum.

(c) $M_3 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, a_1 + a_2 = 0\}$
Bei einer additiven Verknüpfung zweier Elemente von M_3 bleibt die Eigenschaft $a_1 + a_2 = 0$ erhalten. Die Addition ist also eine Verknüpfung. Assoziativ– und Kommutativgesetz gelten. Ein neutrales Element bzgl. der Addition ist vorhanden. Zu jedem Element existiert ein Inverses mit der geforderten Eigenschaft. Damit ist M_3 bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe.

Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \times M_3 \to M_3$ existiert mit $(r, m) \to rm$. Die Rechenregeln sind erfüllt und M_3 bildet einen $\mathbb{R}$–Vektorraum.

(d) $M_4 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, a_1 \text{ ist ungerade }\}$
Bei der Addition zweier Elemente aus M_4 ergibt sich die erste Komponente des Ergebnisses als die Summe zweier ungerader ganzer Zahlen. Diese Komponente ist eine gerade ganze Zahl, die Addition ist also keine Verknüpfung. M_4 bildet keinen $\mathbb{R}$–Vektorraum.

(e) $M_5 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, a_3 \text{ ist durch 3 teilbare ganze Zahl }\}$
In diesem Fall existiert keine Verknüpfung,
$f : \mathbb{R} \times M_5 \to M_5$, $(r, m) \to rm$, $r \in \mathbb{R}$, $m \in M_5$
Dieses müsste für alle $r \in \mathbb{R}$ gelten.
$m = (a_1, 3, a_2, \ldots, a_n)$ ist in M_5.
Für $r = 0.5$ ist jedoch $rm = (a_1/2, 1.5, a_2/2, \ldots, a_n/2)$ nicht Element in M_5. M_5 bildet keinen $\mathbb{R}$–Vektorraum.