Lösungen zu den 19. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe :

   (a) Um das Integral zu bestimmen, wird die partielle Integration verwendet.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^3 e^{2x}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x^3e^{2x}\right]_0^2 - \frac{3}{2}\int_0^2 x^2e^{2x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}2^3e^4\right) - \frac{3}{2}\int_0^2 x^2e^{2x}\mathrm{d}x \\
&= \left(4e^4\right) - \frac{3}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right]_0^2 - \int_0^2 xe^{2x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \left(4e^4\right) - \frac{3}{2}\left(\left(2e^4\right) - \int_0^2 xe^{2x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \left(4e^4\right) - \frac{3}{2}\left(2e^4\right) + \frac{3}{2}\int_0^2 xe^{2x}\mathrm{d}x \\
&= \left(4e^4\right) - \frac{3}{2}\left(2e^4\right) + \frac{3}{2}\left(\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \left(4e^4\right) - \frac{3}{2}\left(2e^4\right) + \frac{3}{2}e^4 - \frac{3}{4}\int_0^2 e^{2x}\mathrm{d}x \\
&= \left(4e^4\right) - \frac{3}{2}\left(2e^4\right) + \frac{3}{2}e^4 - \frac{3}{8}\left[e^{2x}\right]_0^2\mathrm{d}x \\
&= \left(4e^4\right) - \frac{3}{2}\left(2e^4\right) + \frac{3}{2}e^4 - \frac{3}{8}e^4 + \frac{3}{8} \\
&= \frac{17}{8}e^4 + \frac{3}{8} \\
&\approx 116.39607
\end{aligned}$$

   (b) Um das Integral zu bestimmen, wird die partielle Integration verwendet.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x &= \left[-\sin(x)e^{-x}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \left(-\sin(\pi)e^{-pi} + \sin(0)e^0\right) + \int_0^\pi \cos(x)e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= 0 + \left[-\cos(x)e^{-x}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\cos(\pi)e^{-\pi} + \cos(0)e^0\right] - \int_0^\pi \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \left(e^{-\pi} + 1\right) - \int_0^\pi \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

   Umstellen der Gleichung nach $\int_0^\pi \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x$ liefert:

$$\int_0^\pi \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} + 1\right)$$

(c) Um das Integral zu bestimmen, wird Substitution verwendet. Es gilt,

$$t = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

und damit:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3(x)} &= \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)} \\
&= -\frac{1}{2\ln^2(3)} + \frac{1}{2\ln^2(2)} \\
&\approx 0.62642
\end{aligned}$$

2. Aufgabe :

(a) Um das Integral zu bestimmen, wird eine Partialbruchzerlegung verwendet.

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} &= \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \\
3x+5 &= A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1) \\
3x+5 &= x^2(A+B) + x(-2A+C) + A - B + C \\
\Rightarrow 0 &= A + B \\
\Rightarrow 3 &= -2A + C \\
\Rightarrow 5 &= A - B + C \\
A &= \frac{1}{2} \\
B &= -\frac{1}{2} \\
C &= 4
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 4\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]_2^4 - \frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_2^4 - \left[\frac{4}{x-1}\right]_2^4 \\
&\approx 2.37277
\end{aligned}$$

(b) Um das Integral zu bestimmen, wird eine Partialbruchzerlegung verwendet.

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+3)} \\
x+1 &= A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \\
x+1 &= x^2(A+B+C) + x(A+3B-2C) - 6A \\
\Rightarrow 0 &= A+B+C \\
\Rightarrow 1 &= A+3B-2C \\
\Rightarrow 1 &= -6A \\
A &= -\frac{1}{6} \\
B &= \frac{3}{10} \\
C &= -\frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{6}\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{3}{10}\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \frac{2}{15}\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)} \\
&= -\frac{1}{6}\left[\ln|x|\right]_3^4 + \frac{3}{10}\left[\ln|x-2|\right]_3^4 - \frac{2}{15}\left[\ln|x+3|\right]_3^4 \\
&\approx 0.139444
\end{aligned}$$