# Lösungen zu den 19. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe :

   (a) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2+3x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$$\begin{aligned} x^2+3x &= x^2A + x(2A+B) + A + B + C \\ A &= 1 \\ B &= 1 \\ C &= -2 \end{aligned}$$

Daraus folgt,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)^3}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{-2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x \\ \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x &= [\ln(x+1)]_0^1 \\ &= \ln(2) \\ \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x &= \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \\ \int_0^1 \frac{-2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{(x+1)^2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{3}{4} \\ \int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)^3}\mathrm{d}x &= \ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \\ &= \ln(2) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   (b) Substitutionsregel:
$z(x) = 1 + 4x^2$ liefert $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{8x}$, daraus folgt,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{1+4x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x}{z(x)}\frac{\mathrm{d}z}{8x} \\ &= \frac{1}{8}\int_{z(0)}^{z(1)} \frac{\mathrm{d}z}{z(x)} \\ &= \frac{1}{8}\,[\ln(z)]_{z(0)}^{z(1)} \\ &= \frac{1}{8}\,[\ln(z)]_1^5 \\ &= \frac{1}{8}\ln(5) \end{aligned}$$

(c) partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\mathrm{d}x &= \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x(-\cos(x))\mathrm{d}x \\
&= \pi^2 + 2\int_0^{\pi} x\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \pi^2 + 2\left[x\sin(x)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\sin(x)\mathrm{d}x \\
&= \pi^2 + 0 - 2\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} \\
&= \pi^2 - 4
\end{aligned}$$

2. Aufgabe :

$$\int_a^b \frac{e^x + e^{2x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$$

Beide Summanden berechnet man mittels Substitutionsregel. Für den ersten Summanden setzen wir $u(x) = e^x$, dann ist $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^x = u'(x)$. Daraus folgt,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{u'(x)}{u^2(x)+1}\mathrm{d}x \\
&= \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2(x)+1} \\
&= \left[\arctan(u)\right]_{u(a)}^{u(b)} \\
&= \arctan(u(b)) - \arctan(u(a)) \\
&= \arctan(e^b) - \arctan(e^a)
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden wählen wir $v(x) = e^{2x}+1$, dann ist $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2e^{2x}$. Daraus folgt,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{v'(x)}{v(x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{v(a)}^{v(b)} \frac{\mathrm{d}v}{v(x)} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|v|\right]_{v(a)}^{v(b)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln|v(b)| - \ln|v(a)|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{e^{2b}+1}{e^{2a}+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

3. Aufgabe :
Induktion über $n$:
Ind.Anfang: $n = 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\cdot 0+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 1 \\
\frac{4^0(0!)^2}{(2\cdot 0+1)!} &= 1
\end{aligned}$$

Ind.Voraussetzung:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!}\end{aligned}$$

Ind.Behauptung:
Es gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Beweis: Schritt von $n-1 \longrightarrow n$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\sin'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\cos^{2n}(x)\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n\,\cos^{2n-1}(x)\,(-\sin(x))\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n\,\cos^{2n-1}(x)\,\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n\,\cos^{2n-1}(x)\,(1-\cos^2(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n\,\cos^{2n-1}(x) - 2n\cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ I_n &= 2nI_{n-1} - 2nI_n \\ (2n+1)I_n &= 2nI_{n-1} \\ I_n &= \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}\end{aligned}$$

IV benutzen:

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{2n}{2n+1}\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \\ &= \frac{2n\cdot 2n}{(2n+1)\cdot 2n}\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \\ &= \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$