Lösungen zum 17. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe :

(a) Definitionsbereich:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

(b) Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x) \qquad \forall x \in D_f$$

Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

(c) Unstetigkeitsstelle, senkrechte Asymptoten:

Der Nenner $x^2 - 4 = 0$ liefert $\left\{ \begin{array}{lcrl} x_1 & = & 2 & \text{Pol mit Vorzeichenwechsel} \\ x_2 & = & -2 & \text{Pol mit Vorzeichenwechsel} \end{array} \right.$

(d) Verhalten im Unendlichen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Polynomdivision ergibt:

$$\frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4};$$

somit ist die Gerade $y = x$ eine schiefe Asymptote.

(e) Nullstellen:

$$x^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 0$$

(f) Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} \\ f''(x) &= \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} \\ f'''(x) &= \frac{24(x^4 - 16) - 48x^2(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^4} \end{aligned}$$

(g) Extremstellen:
Notwendige Bedingung:

$$x^2(x^2 - 12) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 0, \;\; x_4 = 2\sqrt{3}, \;\; x_5 = -2\sqrt{3}$$

Hinreichende Bedingung:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 && \longrightarrow \text{siehe Punkt 8} \\ f''(2\sqrt{3}) &= \frac{4}{3}\sqrt{3} && \text{lokales Minimum} \\ f''(-2\sqrt{3}) &= -\frac{4}{3}\sqrt{3} && \text{lokales Maximum} \end{aligned}$$

Extrempunkte: T($2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$); H(-$2\sqrt{3}$, -$3\sqrt{3}$)

(h) Monotonieintervalle:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad -\infty < x < -2\sqrt{3} & \Longrightarrow \quad \text{streng monoton steigend} \\ < 0 & \text{für} \quad -2\sqrt{3} < x < -2 & \Longrightarrow \quad \text{streng monoton fallend} \\ < 0 & \text{für} \quad -2 < x < 2 & \Longrightarrow \quad \text{streng monoton fallend} \\ < 0 & \text{für} \quad 2 < x < 2\sqrt{3} & \Longrightarrow \quad \text{streng monoton fallend} \\ > 0 & \text{für} \quad 2\sqrt{3} < x < \infty & \Longrightarrow \quad \text{streng monoton steigend} \end{cases}$$

(i) Wendepunkte:
Notwendige Bedingung:
$8x(x^2 + 12) = 0 \qquad x_3 = 0$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''(0) = -\frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \text{konvex–konkav Wechsel bei W}(0,0)$$

2. Aufgabe :

(a) zu zeigen:

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{11} \in [0,1] \, \forall x \in [0,1]$$

Die Funktion ist streng monoton wachsend, da alle Summanden streng monoton wachsend sind. Also ist der kleinste Funktionswert bei $x = 0$, $f(0) = \frac{1}{11}$ und der größte Funktionswert bei $x = 1$, $f(1) = \frac{5}{11}$.

$$\Longrightarrow \quad f(x) \subset [0,1] \quad \text{für} \quad x \in [0,1]$$

(b) zu zeigen:
$f(x)$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante kleiner 1, L ¡ 1.
$f(x)$ ist in $[0,1]$ stetig differenzierbar, daraus folgt (siehe Vorlesung):

$$L = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{11} \right| \overset{x \geq 0}{=} \max_{x \in [0,1]} \frac{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{11}$$

Die rechte Seite ist streng monoton wachsend, also wird das Maximum bei $x = 1$ angenommen, $\Longrightarrow L = \frac{10}{11} < 1$. Fazit: Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt.

3. Aufgabe :

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1],\ f(x) = \frac{1}{11}\left(x^4 + x^3 + x^2 - 10x + 1\right)$$

$$\begin{array}{rcrcr}
f\left(\frac{1}{2}\right) & = & -0.3239 & \rightarrow & [0,\ \frac{1}{2}] \\
f\left(\frac{1}{4}\right) & = & -0.1289 & \rightarrow & [0,\ \frac{1}{4}] \\
f\left(\frac{1}{8}\right) & = & -0.0211 & \rightarrow & [0,\ \frac{1}{8}] \\
f\left(\frac{1}{16}\right) & = & 0.0345 & \rightarrow & [\frac{1}{16},\ \frac{2}{16}] \\
f\left(\frac{3}{32}\right) & = & 0.0066 & \rightarrow & [\frac{3}{32},\ \frac{4}{32}] \\
f\left(\frac{7}{64}\right) & = & -0.0073 & \rightarrow & [\frac{6}{64},\ \frac{7}{64}] \\
f\left(\frac{13}{128}\right) & = & -3.7782e-04 & \rightarrow & [\frac{12}{128},\ \frac{13}{128}] \\
f\left(\frac{25}{256}\right) & = & 0.0031 & \rightarrow & [\frac{25}{256},\ \frac{26}{256}] \\
f\left(\frac{51}{512}\right) & = & 0.0014 & \rightarrow & [\frac{51}{512},\ \frac{52}{512}] \\
f\left(\frac{103}{1024}\right) & = & 4.8893e-04 & \rightarrow & [\frac{103}{1024},\ \frac{104}{1024}] \\
f\left(\frac{207}{2048}\right) & = & 5.5523e-05 & &
\end{array}$$