Lösungen zu den 16. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe :

   (a) Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(a+h)-f(a)]+[f(a)-f(a-h)]}{2h}\\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right]\end{aligned}$$

   Nach Voraussetzung existieren beide Grenzwerte und es ist

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= f'(a)\\ \lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h} &\overset{h=-\overline{h}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+\overline{h})}{-\overline{h}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+\overline{h})-f(a)}{\overline{h}}\\ &= f'(a)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}(f'(a)+f'(a))=f'(a)$$

   Die Existenz des Grenzwertes impliziert nicht die Differenzierbarkeit von f an der Stelle a, zum Beispiel:
   $f(x)=|x|$, $a=0$:

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\frac{h-h}{2h}=0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=0$$

   Aber: $f(x)=|x|$ ist an der Stelle $a=0$ nicht differenzierbar.

   (b)

$$f(x)^{g(x)}=\exp\left(\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)\right)=\exp\left(g(x)\ln\left(f(x)\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\left(f(x)^{g(x)}\right)' &= \exp\left(g(x)\ln\left(f(x)\right)\right)\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right)+\frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right)\\ &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right)+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)\end{aligned}$$

2. Aufgabe :
   Lösung: $f(1.2)\approx 0.218785868\ldots$
   $f(x)$ ist in 1.2 beliebig oft differenzierbar. Die Darstellung mit Taylorpolynom mit Entwicklungsstelle $x_0=1$ lautet:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-k)^k\\ &= f(1)(0.2)^0+f'(1)(0.2)^1+\frac{1}{2}f''(1)(0.2)^2+\frac{1}{6}f'''(1)(0.2)^3+\ldots\end{aligned}$$

i	**i-te Ableitung**	$f^{(i)}(1)$	$\frac{1}{i!}f^{(i)}(1)(0.2)^i$	$\sum_{k=0}^{i}\frac{f^{(k)(1)}}{k!}(0.2)^k$
0	$x\ln(x)$	0	0	0
1	$\ln(x)+1$	1	0.2	0.2
2	$\frac{1}{x}$	1	0.02	0.22
3	$-\frac{1}{x^2}$	-1	$-\frac{0.008}{6}$	$0.21866\overline{6}$
4	$\frac{2}{x^3}$	2	$\frac{2}{24}0.2^4$	0.2188
5	$\frac{-6}{x^4}$	-6	$-\frac{6}{120}0.2^5$	0.218784