FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 29.05.2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Serie 04

abzugeben vor der Vorlesung am Dienstag, dem 05.06.2007

Die Programmtexte sind bis zur Vorlesung an den zuständigen Bremser per Email zu schicken; Email–Adressen siehe Homepage zur Lehrveranstaltung.

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Unter den Computerzahlen gibt es eine kleinste positive Zahl ε_M, so dass auf dem Computer $1 + \varepsilon_M > 1$ ist. Diese Zahl wird Maschinenepsilon genannt.

   Man schreibe ein Programm zur Berechnung von ε_M. Dabei gebe man sich einen Startwert $a > 0$ vor und teste ob $1 + a > 1$. Falls das der Fall ist, verkleinere man a, zum Beispiel durch Halbierung, solange, bis $1 + a = 1$. Daraus kann man dann das Maschinenepsilon berechnen.

2. *Zur Auslöschung.* Zur Berechnung der Nullstellen des quadratischen Polynoms

   $$(x-1)(x-a) = x^2 + px + q$$

   mit $a > 0$, stehen die folgenden beiden Wege zur Auswahl:

   1. Berechne zunächst die erste Nullstelle x_1 mit

      $$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

      und dann die zweite Nullstelle mit

      $$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

   2. Berechne zunächst die erste Nullstelle x_1 mit

      $$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

      und dann die zweite Nullstelle mit

      $$x_2 = q/x_1.$$

Diese Wege sind mathematisch äquivalent.

Man programmiere beide Wege und vergleiche die Ergebnisse für den Fall, dass a klein ist ($a = 10^{-i}, i \in \{10, 12, 14, 16, 17\}$). Für beide Verfahren und für alle Werte von a gebe man den relativen Fehler

$$\frac{|x_2 - a|}{a}$$

in der kleineren Nulltstelle an.

Bemerkung: Der große relative Fehler in einem der Wege liegt an der Subtraktion zweier fast gleich großer Zahlen (Auslöschung).

3. Man zeige:

   (a) Eine l^p–Vektornorm, $p \in [1, \infty]$, und ihre induzierte Matrixnorm sind verträglich.

   (b) Sei $A \in \mathbb{R}^n$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Dann gilt für die Spektralkonditionszahl

   $$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)},$$

   wobei $\lambda_{\max}(A)$ der größte und $\lambda_{\min}(A)$ der kleinste Eigenwert von A sind.

4. Man berechne detailiert die Anzahl der Flops für

   (a) die Vorwärts–(Rückwärts–)substitution,

   (b) die LU–Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^n$.

Ein Shellskript zum Aufruf von MATLAB im Computerpool, sowie Dokumentationen zu MATLAB sind auf der Homepage, von der man diese Blatt herunterladen kann, verfügbar,