FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 25.05.2005

Übungsaufgaben zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Serie 7

abzugeben in der Vorlesung am 06.06.2005

Die Lösungen der Aufgaben 1, 2, 3 sind schriftlich abzugeben, inklusive der Quelltexte der Programme (diese per Email) !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Man zeige, dass die Fixpunktgleichung

$$\frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{11} = x, \quad x \in [0, 1]$$

   die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
   Hinweis: bei der Untersuchung der Funktion beachte man deren Monotonie.

2. Man forme die Fixpunktgleichung aus Aufgabe 1 äquivalent in eine Nullstellengleichung um und berechne die Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit dem Bisektions-Verfahren (Startwerte $x^{(0)} = 0, x^{(1)} = 1$). Man gebe die Anzahl der benötigten Iterationen an, bis erreicht ist, dass die Länge des Intervalls I_k, in dem sich die Nullstelle befindet, kleiner als 10^{-7} ist.

3. Auf die gleiche Nullstellengleichung wie in Aufgabe 2 wende man das Sekantenverfahren an (Startwerte $x^{(0)} = 0, x^{(1)} = 1$). Man gebe die Anzahl der benötigten Iterationen an, bis erreicht ist, dass sich zwei aufeinanderfolgende Iterierte um weniger als 10^{-7} unterscheiden.

4. Sei $f \in C^1([a, b])$ eine Funktion, die die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Man beweise, dass die Fixpunktiteration angewandt auf f linear mit dem Konvergenzfaktor L (Lipschitz-Konstante von f) konvergiert:

$$\frac{|\alpha - x^{(k)}|}{|\alpha - x^{(k-1)}|} \leq L.$$

   Hinweis: Man wende eine Taylorentwicklung auf $\alpha - x^{(k)}$ an, wobei diese Größen mit Hilfe von f zu beschreiben sind. Dann braucht man noch die Formel für die Lipschitz-Konstante bei stetig differenzierbaren Funktionen.