FR Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 26.04.2005

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Serie 3

abzugeben in der Vorlesung am 09.05.2005

Die Lösungen der Aufgaben 2, 3, 4 sind schriftlich abzugeben, inklusive der Quelltexte der Programme (diese per Email) !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $A^T = A^{-1}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Man zeige, dass
$$\|AB\|_2 = \|B\|_2$$
gilt. (Insbesondere für $m = 1$, d.h. B ist ein Vektor b, gilt $\|Ab\|_2 = \|b\|_2$.)

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Man zeige, dass für die Spektralkonditionszahl gilt
$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)},$$
wobei $\lambda_{\max}(A)$ der größte und $\lambda_{\min}(A)$ der kleinste Eigenwert von A sind.
Hinweis: Sei λ ein Eigenwert von A. Man beweise zuerst, dass dann λ^2 ein Eigenwert von A^2 ist und λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}. Danach nutze man die allgemeine Formel für die Spektralkonditionszahl.

3. Sei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre untere Dreiecksmatrix. Man berechne die Anzahl der Flops zur Lösung von $Lx = b$ mittels Vorwärtssubstitution.

4. Sei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre untere Dreiecksmatrix. Man programmiere die Vorwärtssubstitution zur Lösung von $Lx = b$ und berechne damit die Lösung für
$$L = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -10 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$