Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 19.06.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 10

17.06. – 21.06.2002

Die Lösungen der Aufgaben 1, Abschnitt "Mittelwertsatz, Taylorformel, lokale Extrema", und der Aufgaben 1 und 3, Abschnitt "Die Sätze von der impliziten Funktion und von der inversen Abbildung" sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 26.06.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Mittelwertsatz, Taylorformel, lokale Extrema

1. Sei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt auf der Einheitssphähre des $\mathbb{R}^3$, d.h.

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Man gebe die Gleichung der Tangentialebene in (x_0, y_0, z_0) an. **3 Punkte**

Die Sätze von der impliziten Funktion und von der inversen Abbildung

1. Man berechne $y' = \frac{dy}{dx}$ für die implizit gegebenen Funktionen:

   (a) $x^2 + y^2 = 1$

   (b) $(x + y)e^y + x - 3 = 0$

   Hinweis: Zur Ableitung von $(y(x))^2$ bzw. $e^{y(x)}$ die Kettenregel verwenden; dann nach y' umstellen. **4 Punkte**

2. Man zeige, zum Beispiel mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß die Gleichung

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 11x$$

   im Intervall $[0, 1]$ genau eine Lösung besitzt.

3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^2([a, b])$ und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Eine Nullstelle von f wird mit Hilfe der Fixpunktiteration

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

   gesucht, wobei $x^0 \in [a, b]$ beliebig gewählt wird (Newton–Verfahren). Unter welchen Bedingungen an die Funktion f und ihre Ableitungen kann man sich sicher sein, daß f eine eindeutige Nullstelle besitzt und die obige Iteration gegen diese konvergiert ?

   Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz + Abschätzung der Lipschitz–Konstanten. **3 Punkte**

4. Eine Fixpunktiteration konvergiert desto schneller je kleiner die Lipschitz–Konstante ist. Seien x_0 eine Nullstelle der Funktion f und $f'(x_0) \neq 0$. Diese Nullstelle soll mit Hilfe der Fixpunktiteration

$$x^{k+1} = x^k - g(x^k)f(x^k) =: T(x^k)$$

berechnet werden, wobei g eine stetig differenzierbare Funktion ist. Die Lipschitz–Konstante kann man mit Hilfe der ersten Ableitung von T abschätzen. Wie muß g in x_0 gewählt werden, so daß man im Punkte x_0 eine optimale Abschätzung für die Lipschitz–Konstante erhält ?

5. Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Man zeige

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$