Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 28.05.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 8

03.06. – 07.06.2002

Die Lösungen der Aufgabe 1 des Abschnittes "Differenzierbare Funktionen und Abbildungen in $\mathbb{R}^n$" und der Aufgabe 1 des Abschnittes "Mittelwertsatz, Taylorformel, lokale Extrema" sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 12.06.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Differenzierbare Funktionen und Abbildungen in $\mathbb{R}^n$

1. (Zustandsgleichung für reale Gase.) Für ein reales Gas mit dem Druck P, dem Molvolumen V_m und absoluter Temperatur T gilt die van der Waalsche Gleichung

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT,$$

wobei a, b und R Konstanten sind. Man zeige, daß für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V_m}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V_m} = -1$$

gilt. Durch "Kürzen" erhält man hier das falsche Ergebnis 1 !!! **4 Punkte**

2. Mit Hilfe der Kettenregel zeige man, daß für $U(x,y) = U(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = G(r,\varphi)$ die Beziehung

$$U_{xx} = G_{rr}r_x^2 + (G_{r\varphi} + G_{\varphi r})r_x\varphi_x + G_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + G_r r_{xx} + G_\varphi \varphi_{xx}$$

gilt. Mit Hilfe dieser Formel berechne man den Laplace-Operator

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

in Polarkoordinaten.

3. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind die **Divergenz** durch

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

und im Fall $n = 3$ die **Rotation** durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

gegeben. Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $U : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ wird der **Laplaceoperator** durch

$$\Delta U := \text{div grad } U$$

definiert. Man zeige, daß bei entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen folgende Rechenregeln gelten:

(a) rot grad $U = \mathbf{0}$, $n = 3$,

(b) div rot $\mathbf{v} = 0$, $n = 3$,

(c) div $(U\mathbf{v}) = \langle \text{grad } U, \mathbf{v} \rangle + U \text{div } \mathbf{v}$,

(d) rot rot $\mathbf{v} =$ grad div $\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}$, $n = 3$, ($\Delta \mathbf{v}$ ist komponentenweise zu verstehen)

(e) div $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \text{rot } \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{w} \rangle$, $n = 3$.

Mittelwertsatz, Taylorformel, lokale Extrema

1. Man finde die lokalen Extrema der Funktionen:

   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$,

   (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(-(x^2 + y^2))$.

   Hinweis: Bei der zweiten Funktion kann man die Art eines Extremas nicht mit den von in der Vorlesung her bekannten Mitteln bestimmen. Der Übergang zu Polarkoordinaten hilft weiter. **6 Punkte**

2. Man approximiere die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^y$ in Umgebung des Punktes $x_0 = (1, 1)$ durch ein Taylorpolynom 2. Grades. Man ermittle so Näherungswerte für $\sqrt{1.03}$ und $(0.95)^{1.3}$.