Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 21.05.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 6

20.05. – 24.05.2002

Die Lösung der Aufgaben 1 und 2 sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 29.05.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, uneigentliche Integrale

1. Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ Riemann–integrierbar und sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Desweiteren sei $\varphi(x) : \mathbb{R} \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Funktion. Die Funktionen $F_o(x)$ und $F_u(x)$ sind durch

$$F_o(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt, \quad F_u(x) = \int_{\varphi(x)}^b f(t)dt$$

gegeben. Man berechne die erste Ableitung von $F_o(x)$ und $F_u(x)$.
Hinweis: Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung **4 Punkte**

2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. Man untersuche die Konvergenz des uneigentlichen Integrales

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x(-\log(x))^\alpha}$$

und berechne gegebenenfalls den Integralwert.
Hinweis: Stammfunktion suchen **6 Punkte**

3. Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann–integrierbar.

   a) Man gebe ein Beispiel dafür an, daß fg
      - uneigentlich Riemann–integrierbar ist,
      - nicht uneigentlich Riemann–integrierbar ist.

      Konkrete Angabe von a, b, f, g !

   b) Seien f^2 und g^2 ebenfalls uneigentlich Riemann–integrierbar. Man zeige, daß dann fg und $|fg|$ auch uneigentlich Riemann–integrierbar sind.

4. Man untersuche die folgenden Integrale auf Konvergenz:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}.$$

5. Man ermittle, für welche $x > 0$

$$\int_2^x \frac{dt}{4t - t^2} = -\frac{1}{4} \log 3$$

gilt?

6. Man zeige, daß $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist.
Hinweis: Man zeige, daß die k–te Ableitung von $f(x)$ für $x > 0$ die Gestalt $\exp(-1/x)p(1/x)$ *hat, wobei $p(1/x)$ ein Polynom vom Grak $2k$ in $1/x$ ist.*