Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 14.05.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 5

13.05. – 17.05.2002

Die Lösung der Aufgaben 1, 2 und 4 des Abschnittes "Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, uneigentliche Integrale" sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 22.05.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Das Riemann–Integral

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

   a) Warum existiert $\|f\|_{L^p}$ für $1 \leq p < \infty$?

   b) Man zeige
   $$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| =: \|f\|_{L^\infty}.$$

   Hinweis: Zur Abschätzung $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *betrachte man nur ein Intervall, in dem* $|f(x)| \geq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| - \varepsilon$ *für ein gegebenes* $\varepsilon > 0$ *gilt.*

Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, uneigentliche Integrale

1. Sei $x = 2 \arctan z$. Man zeige
   $$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{2}{1+z^2}.$$
   (Mit diesen Beziehungen kann man Winkelfunktionen im Integranden durch rationale Funktionen ausdrücken.)
   4 Punkte

2. Man berechne folgende Integrale mit Hilfe der Methode der partiellen Integration
   $$\int x^2 \log x dx, \quad \int \arctan x dx, \quad \int \sin(\log x) dx.$$
   3 Punkte

3. Man berechne folgende Integrale mit Hilfe der Methode der partiellen Integration
   $$\int x^2 \sin x dx, \quad \int x^3 e^{2x} dx, \quad \int x^2 e^{-3x} dx.$$

4. Mit berechne folgende Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}, \quad \int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}, \quad \int x^5 \sqrt{1-x^3}dx.$$

Hinweis: Substitution im dritten Integral: $z^2 = 1 - x^3$. **3 Punkte**

5. Seien $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Man berechne eine Rekursionsformel für

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k} dx$$

unter der Voraussetzung, daß $x^2 + cx + d$ keine reelle Nullstelle besitzt.
Hinweis: Vorgehen

- *trenne das Quadrat von* $x + c/2$ *von* $x^2 + cx + d$ *ab,*
- *substituiere* $t = x + c/2$, *man erhält einen Integranden der Form* $(t^2 + A^2)^k$ *mit* $A^2 = d - c^2/4$
- *zerlege entstandenes Integral in zwei Integrale, eines kann durch eine einfache Substitution gelöst werden, das andere mit Vorlesung Beispiel 16.6 (d).*

Die 1. Leistungskontrolle findet am Donnerstag, dem 23.05.2002, im Raum 05/211 von 13 - 15 Uhr statt. Es wird um pünktliches Erscheinen gebeten (einige Minuten vor 13.15 Uhr).