Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 27.06.2002

Leistungskontrolle Nr. 2 zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Aufgabe	Punkte	erreichte Punkte
1	3	
2	3	
3	4	
4	4	
5	7	
6	4	
7	4	
8	4	
9	5	
10	2	
Summe	40	

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte, die nicht ausdrücklich bewiesen werden sollen, können vorausgesetzt werden.

1. Man formuliere den Satz von Bernstein über hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Taylorreihe einer Funktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ gegen f. **3 Punkte**

2. Man untersuche das Integral
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
auf Konvergenz. **3 Punkte**

3. Man berechne die Länge der Kurve, die durch
$$x = t^2, y = t^3, 0 \le t \le 4$$
gegeben ist. **4 Punkte**

4. Im $\mathbb{R}^k$ seien n Punkte $a^1, \ldots, a^n$ gegeben. Für $x \in \mathbb{R}^k$ sei
$$f(x) = \sum_{j=1}^n \|x - a^j\|^2.$$
Man zeige, daß die Funktion ein Minimum im Punkt
$$x^0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a^j$$
annimmt. **4 Punkte**

5. Man klassifiziere die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \to x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

nach Minima, Maxima und Sattelpunkten in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. **7 Punkte**

6. Man bestimme die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \quad (x,y) \to \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich Glieder 2. Ordnung. **4 Punkte**

7. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx.$$

Sei $g(t) := f(x(t), y(t), z(t))$. Man gebe eine Formel für $\dfrac{dg}{dt}$ an. Wie lautet diese Ableitung im Spezialfall $x(t) = t, y(t) = 1/(x(t)), z(t) = (x(t))^2$? **4 Punkte**

8. Sei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a,b,c > 0.$$

Man gebe die Gleichung der Tangentialebene in (x_0, y_0, z_0) an. **4 Punkte**

9. Man formuliere den Banachschen Fixpunktsatz. Dann überprüfe man, ob der durch die Fixpunktgleichung

$$x = \frac{1}{20}\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right),$$

gegebene Operator für $x \in [0,1]$ die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt. **5 Punkte**

10. Man berechne $y' = \dfrac{dy}{dx}$ für die Funktion

$$e^x \sin(y) + e^y \sin(x) = 1.$$

2 Punkte