Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 29.11.2001

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 7

3.12. – 7.12.2001

Die Lösung der Aufgabe 6 ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 6.12.2001, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf ihrem Definitionsbereich D einer Lipschitz-Bedingung genügt. Man zeige, daß die Menge

$$N := \{x \in D \,:\, f(x) = 0\}$$

aller Nullstellen von f abgeschlossen in D ist. Gilt allgemein, daß das Urbild $f^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Menge A abgeschlossen in D ist.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann bildet Y mit der induzierter Metrix $d|_{Y\times Y}$ einen metrischen Raum.

   a) Sei Y eine offene Teilmenge von X. Man zeige, daß eine Menge $M \subset Y$ genau dann in Y offen ist, wenn M in X offen ist. Man gebe ein konkretes Beispiel (metrischer Raum (X, d), Mengen Y und M) dafür an, daß eine in Y abgeschlossene Menge M nicht abgeschlossen in X ist.

   b) Sei Y eine abgeschlossene Teilmenge von X. Man beweise, daß eine Menge $M \subset Y$ genau dann in Y abgeschlossen ist, wenn M in X abgeschlossen ist. Man gegebe ein konkretes Beispiel (metrischer Raum (X, d), Mengen Y und M) dafür an, daß eine in Y offene Menge M nicht offen in X ist.

3. Sei (E, d) ein diskreter metrischer Raum (vgl. Aufgabe 2 der Serie 6). Man zeige, daß eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in E genau dann konvergiert, wenn es eine natürliche Zahl n_0 derart gibt, daß

$$a_i = a_j, \qquad \forall i, j \geq n_0$$

gilt, d.h., wenn die Folge ab einem Index n_0 konstant ist.

4. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen a konvergiert, d.h., zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein k_0 derart, daß für alle $k \geq k_0$ die Beziehung

$$|a - a_k| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Man zeige, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein k_1 derart existiert, daß

$$|a - a_k| \leq \varepsilon$$

für alle $k \geq k_1$ gilt, d.h., hier kann $<$ durch $\leq$ ersetzt werden.

5. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im metrischen Raum (X, d). Dann ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in folgendem Sinne: Es gibt ein $x_0 \in X$ und ein $M \in \mathbb{R}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung
$$d(x_0, a_k) < M$$
gilt, d.h., alle a_k liegen in der Kugel um x_0 mit dem Radius M.

6. Gegeben sei die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Weiterhin definieren wir die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

   a) Man bestimme einen einfachen Ausdruck für s_n.
   b) Man bestimme den Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.
   c) Man gebe ein $n_0(\varepsilon)$ an, so daß für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ die Beziehung

   $$|s - s_n| \leq \varepsilon$$

   erfüllt ist. **5 Punkte**