Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 12.12.2001

Leistungskontrolle Nr. 1 zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Aufgabe	Punkte	erreichte Punkte
1	4	
2	8	
3	10	
4	8	
5	8	
6	4	
7	4	
8	4	
9	10	
10	6	
Summe	66	

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte, die nicht ausdrücklich bewiesen werden sollen, können vorausgesetzt werden.

1. Man beweise die Youngsche Ungleichung: Für beliebiges $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$xy \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

4 Punkte

2. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt

$$\frac{x+4}{x+1} < x.$$

8 Punkte

3. Man beweise mit vollständiger Induktion

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

10 Punkte

4. Man zeige, daß für beliebige Mengen U, V, W gilt

$$U \setminus (V \cap W) = (U \setminus V) \cup (U \setminus W).$$

Hinweis: Die de Morganschen Regeln können benutzt werden. **8 Punkte**

5. Was bedeutet es, daß eine Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L genügt ? Gegeben sei eine konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \in [a, b]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Liegt der Grenzwert x dieser Folge in $[a, b]$? (Begründung !) Man zeige, daß für eine Funktion f, die einer Lipschitz-Bedingung mit Konstanten L genügt, gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x).$$

8 Punkte

6. Man untersuche, ob folgende Teilmengen $F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sind :

   i) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \tan x\}$,

   ii) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 = x^2\}$.

   Hinweis: Schulwissen über die Funktionen kann genutzt werden. **4 Punkte**

7. Man untersuche folgende Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität :

   i) $F \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $F(x) = \exp(x^4)$,

   ii) $F \ : \ [0, \pi^2] \to [-1, 1]$ mit $F(x) = \cos\sqrt{x}$.

   Hinweis: Schulwissen über die Funktionen kann genutzt werden. **4 Punkte**

8. Man untersuche ob $(\mathbb{R}^2, d)$ mit

$$d(x, y) = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

ein metrischer Raum ist. **4 Punkte**

9. Man zeige, daß $(\mathbb{R}^n, d)$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

ein metrischer Raum ist. **10 Punkte**

10. Sei (E, d) ein metrischer Raum. Was bedeutet, daß die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (E, d) ist ? Wie nennt man metrische Räume, in denen alle Cauchyfolgen konvergent sind ? Man gebe ein Beispiel eines metrischen Raumes an, der diese Eigenschaft nicht besitzt (ohne Beweis). **6 Punkte**