Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska
Dr. V. John

Magdeburg, den 14.02.2001

Leistungskontrolle zur Erlangung des Übungsscheines
Grundkurs Analysis
Studiengänge Mathematik, Technomathematik
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte, die nicht ausdrücklich bewiesen werden sollen, können vorausgesetzt werden.

1. Man zeige
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}.$$
3 Punkte

2. Man untersuche folgende Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität :
   i) $F\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $F(x) = \exp(x^3)$,
   ii) $F\ :\ [\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$ mit $F(x) = \sin x$.

   2 Punkte

3. Man untersuche ob $(\mathbb{R}^2, d)$ mit
$$d(x,y) = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$
ein metrischer Raum ist. **2 Punkte**

4. Man zeige, dass die Abbildung
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\| = \sum_{i=1}^{n} i|x_i|$$
auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ eine Norm definiert. **4 Punkte**

5. Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^4 + 5x^2y^2 + 3x^2y + xy}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$
im Punkt $(0,0)$. **2 Punkte**

6. Für die Menge $M = \{x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ mit
$$x_n = \sin \frac{\pi}{2n}$$
bestimme man Infimum und Supremum. **2 Punkte**

7. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Was bedeutet, daß $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchy–Folge ist? Man berechne die Grenzwerte für $n \to \infty$ der Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ mit

$$a_n = 2n(\sqrt{4n^2+2} - 2n), \quad a_n = \left(1 + \frac{6}{n}\right)^{2n}.$$

5 Punkte

8. Für $x \in \mathbb{R}^+$ berechne man: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - n}{x^n + n}$. **3 Punkte**

9. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}.$$

4 Punkte

10. Man untersuche folgende Reihe für $t \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n3^n}.$$

3 Punkte

Der Übungsschein wird bei 15 erreichten Punkten erteilt.