

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
FACHGEBIET NUMERISCHE MATHEMATIK

MASTERARBEIT

**Zeitliche Behandlung des nichtlinearen
Konvektionsterms in inkompressiblen
Navier-Stokes-Gleichungen**

Von:

Nima Sharifian

Betreut von:

Univ.-Prof. Dr. Volker John

Matrikelnummer:

5137679

Zweitkorrektor:

Dr. Ulrich Wilbrandt

*Zur Erlangung des akademischen Grades Master of Science
im Studiengang: Mathematik*

29. September 2019

Danksagung

Ich möchte mich hiermit bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. An erster Stelle ist mein Betreuer Prof. Dr. Volker John, der mir das Thema dieser Arbeit vorgestellt und mich voller Geduld und Präzision angeleitet hat. Weiter danke ich herzlich Dr. Ulrich Wilbrandt, der mir jederzeit sorgfältig geholfen und mich in vielerlei Hinsicht unterstützt hat.

Danken möchte ich außerdem das Weierstraß-Institut (WIAS), dessen Rechner ich für die Berechnungen dieser Arbeit verwenden durfte, und Najib Alia sowie Laura Blank in der Forschungsgruppe Numerische Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen des WIAS, die mir bei Software-Problemen geholfen haben.

Ich danke meinen tollen Mitbewohner Jan H., der mich während dieser Arbeit ausgehalten und mich brüderlich viel unterstützt hat. Außerdem danke ich herzlich meine Freunde Enrico Sch., Jan B. und Jan H. für das Korrekturlesen meiner Masterarbeit. All der Freunde und Freundinnen wie Alex H., Malte L. und Jan B. danke ich, die mir in Bibliotheken Gesellschaft geleistet und die Zeit erträglicher gemacht haben. Meine lieben Kollegen und Kolleginnen von der VERKA VK danke ich für ihre berufliche Unterstützung.

Zum Schluss möchte ich mich bei meinen wundervollen Eltern und meiner allerliebsten Schwester bedanken, die mir stets beigestanden sind.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	vi
Einleitung	1
1 Mathematische Grundlagen	3
2 Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen	9
2.1 Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Fluide	9
2.1.1 Anfangs- und Randbedingung	10
2.1.2 Schwache Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen	11
2.1.3 Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen	14
2.2 Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen	17
2.2.1 Zeitliche Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen	17
2.2.1.1 Zeitliche Behandlung des Konvektionsterms	18
2.2.2 Finite-Elemente-Methode	20
2.2.3 Totale Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen	31
2.2.3.1 Matrizen-schreibweise der drei linearen Gleichungssysteme	32
3 Numerische Benchmarks	38
3.1 Strömung um einen Zylinder in 2D mit $Re \in [0, 100]$	39
3.1.1 Problembeschreibung	39
3.1.2 Simulationseinstellungen	42
3.1.3 Ergebnisse und Auswertung	44
3.2 Exponentiell abnehmende Strömungen in 3D, Beltrami-Strömungen	51

3.2.1	Problembeschreibung	51
3.2.2	Simulationseinstellungen	52
3.2.3	Ergebnisse und Auswertung	53
	Fazit	56
	A Auswertungstabellen	57
A.1	Zweidimensionales Benchmark-Problem	58
A.2	Dreidimensionales Benchmark-Problem	62
	Literaturverzeichnis	66

Abbildungsverzeichnis

2.1	Das Finite-Element $P_1(\mathbf{K})$	25
2.2	Das Finite-Element $P_2(\mathbf{K})$	26
2.3	Das Finite-Element $Q_1(\mathbf{K})$	28
2.4	Das Finite-Element $Q_2(\mathbf{K})$	28
3.1	2D : Skizze des Gebiets	39
3.2	2D : Referenzkurven aus (John and Rang, 2010)	42
3.3	2D : Ausgangsgitter (Stufe 0)	43
3.4	2D : Fehler zur Referenzkurve des Widerstandsbeiwertes	45
3.5	2D : Fehler zur Referenzkurve des Auftriebsbeiwertes	46
3.6	2D : Fehler zur Referenzkurve der Druckdifferenz	47
3.7	2D : Rechenzeiten gegen Fehler	49
3.8	3D : Rechenzeiten gegen Fehler	54

Tabellenverzeichnis

2.3	Übersicht für Einschnitt- θ -Verfahren	17
3.2	2D : ausgewählte Referenzwerte aus (John and Rang, 2010)	42
3.3	2D : Freiheitsgrade je Verfeinerungsstufe des Ausgangsgitters	43
3.4	3D : Gitterweite und Freiheitsgrade je Verfeinerungsstufe des Ausgangsgitters	52
A.1	2D : Auswertung der Simulationen bezüglich der Fehler zu Fehler $_{wid}^{ref}$	58
A.2	2D : Auswertung der Simulationen bezüglich Fehler $_{auf}^{ref}$	59
A.3	2D : Auswertung der Simulationen bezüglich Fehler $_{\Delta p(8)}^{ref}$	60
A.4	2D : Auswertung der Simulationen bezüglich der Rechenzeit	61
A.5	3D : Auswertung der Simulationen bezüglich $\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)(1)\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}$	62
A.6	3D : Auswertung der Simulationen bezüglich $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}^h\ _{\mathbf{L}^2(0,1;H^1(\Omega))}$	63
A.7	3D : Auswertung der Simulationen bezüglich $\ p - p^h\ _{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}$	64
A.8	3D : Auswertung der Simulationen bezüglich der Rechenzeit	65

Einleitung

Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben die dynamische Bewegung¹ eines inkompressiblen Fluides², wobei die Unbekannten (die Geschwindigkeit und der Druck) Funktionen von Raum- und Zeitvariablen sind. Eine Lösung dieser Gleichungen sagt das Verhalten des Fluides voraus, sofern ihre Anfangs- und Randzustände bekannt sind. Diese Gleichungen sind eines der wichtigsten Modelle der mathematischen Physik und obwohl sie seit bald zweihundert Jahren Gegenstand intensiver Forschung sind, gibt es aufgrund der in den Gleichungen enthaltenen Nichtlinearität noch viele offene Probleme. Insbesondere die Frage der Lösungsregularität für dreidimensionale Probleme wurde vom Clay Mathematics Institute zu einem der Millenniumsprobleme, die Schlüsselprobleme der modernen Mathematik, ernannt, siehe (Fefferman, 2006). Das Problem bleibt für Mathematiker herausfordernd und faszinierend und die Anwendungen der Navier-Stokes-Gleichungen reichen von der Aerodynamik (Widerstands- und Auftriebskräfte) über die Konstruktion von Wasserkraftwerken bis hin zur Wettervorhersage. Die Navier-Stokes-Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich der Zeit und zweiter Ordnung bezüglich des Raumes

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } (0, T] \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{in } (0, T] \times \Omega,\end{aligned}$$

wobei Ω das Gebiet, $(0, T]$ ein Zeitintervall, \mathbf{u} das Geschwindigkeitsfeld, p den Druck, \mathbf{f} die äußere Kraft und ν die Viskosität bezeichnen.

Da es für diese Gleichungen im Allgemeinen keine analytische³ Lösung gibt, müssen numerische Simulationen zur Hilfe genommen werden, um eine zufriedenstellende Näherungslösung zu finden. Zu diesem Zweck müssen Diskretisierungsmethoden für Raum und Zeit angewendet werden, weil die Computer nicht in der Lage sind, mit unendlichen Dimensionen umzugehen. In dieser Arbeit werden die Finite-Elemente-Methode für die Diskretisierung im Raum und das BDF2-Verfahren⁴ für die Diskretisierung in der Zeit

¹Strömung

²In dieser Arbeit ist mit einem Fluid stets ein newtonsches Fluid gemeint.

³exakte

⁴auf Englisch backward differentiation formula of order two

eingesetzt.

Für die Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichungen ist der sogenannte Konvektionsterm $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ verantwortlich, welcher den Effekt zeitunabhängiger Beschleunigung einer Strömung bezüglich des Raumes repräsentiert. Dieser Term bereitet sowohl bei der theoretischen Analyse, als auch bei den numerischen Simulationen besondere Schwierigkeit und führt zu Phänomenen wie Wirbelströmungen und Turbulenzen. Aus der mathematischen Sichtweise ist eine Behandlung der Nichtlinearität des Konvektionsterms in der Zeit notwendig. Hierzu kommen folgende drei zeitliche Behandlungen infrage:

- i. **implizite** Behandlung : Die beiden Geschwindigkeitsvektoren des Konvektionsterms entsprechen dem aktuellen Zeitschritt.
- ii. **IMEX**⁵ Behandlung : Der Konvektionsterm wird mittels der Approximation des ersten Geschwindigkeitsvektors vom Konvektionsterm durch eine konstante oder lineare Extrapolation in der Zeit linearisiert.
- iii. **explizite Behandlung** : Die beiden Geschwindigkeitsvektoren des Konvektionsterms werden durch eine konstante oder lineare Extrapolation in der Zeit approximiert.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der numerischen Untersuchung der Auswirkung dieser Behandlung auf die Genauigkeit und Effizienz.

Das **erste** Kapitel dieser Arbeit bietet einen kurzen Einblick in die für diese Arbeit relevanten Grundlagen aus Funktionalanalysis, während das **zweite** Kapitel sich mit den Navier-Stokes-Gleichungen, deren räumlichen sowie zeitlichen Diskretisierungen und vor allem den zeitlichen Behandlungen des Konvektionsterms auseinandersetzt. Im **dritten** Kapitel werden diese Behandlungen anhand von numerischen Benchmarks in zwei und drei Dimensionen untersucht. Zum Schluss werden die Ergebnisse dieser Arbeit im **Fazit** zusammengestellt.

⁵implizit-explizit

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

Dieses Kapitel stellt eine zusammengefasste Übersicht der für diese Arbeit notwendigen mathematischen Begriffe und Sätze aus Funktionalanalysis bereit. Die Inhalte dieses Kapitels sind in meisten Literatur wie (John, 2016) und (Brenner and Scott, 2002) zu finden.

Bemerkung 1.1. (Notationen)

Der Einfachheit halber werden hier folgende Notationen für die gesamte Arbeit festgelegt:

- $d \in \{2, 3\}$,
- Fette Buchstaben zeigen an, dass es sich um ein kartesisches Produkt handelt. Wenn F beispielsweise ein Funktionsraum ist, dann gilt $\mathbf{F} = \underbrace{F \times \dots \times F}_{d\text{-mal}}$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{F}$ ist eine vektorwertige Funktion,
- $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ist ein beschränktes, zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet, dessen Rand mit $\Gamma = \partial\Omega$ bezeichnet wird.

□

Definition 1.2. (Lipschitz-Gebiet)

Eine offene Teilmenge $\Omega \in \mathbb{R}^d$ wird Lipschitz-Gebiet genannt, wenn es für jedes $\mathbf{x} \in \Gamma$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ von \mathbf{x} und neue orthogonale Koordinaten (y_1, \dots, y_d) gibt, sodass

1. U ist ein Hyperwürfel in den neuen Koordinaten

$$U = \{(y_1, \dots, y_d) : -a_i < y_i < a_i, i = 1, \dots, d\} .$$

2. Es gibt eine Lipschitz-stetige Funktion ϕ , definiert in

$$U' = \{(y_1, \dots, y_{d-1}) : -a_i < y_i < a_i, i = 1, \dots, d-1\},$$

sodass

$$|\phi(\mathbf{y}')| \leq \frac{a_d}{2} \quad \forall \mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_{d-1}) \in U',$$

$$\Omega \cap U = \{y = (\mathbf{y}', y_d) \in U : y_d < \phi(\mathbf{y}')\},$$

$$\Gamma \cap U = \{y = (\mathbf{y}', y_d) \in U : y_d = \phi(\mathbf{y}')\}.$$

Bemerkung 1.3. (Eigenschaften des Lipschitz-Gebiets)

- Der Rand Γ ist der Graph von ϕ und das Gebiet Ω liegt ausschließlich auf einer Seite des Randes Γ .
- Der äußere Normalenvektor ist fast überall am Rand Γ definierbar und fast überall stetig. □

Definition 1.4. (C_0^∞ -Raum)

Der Raum von unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω wird mit

$$C_0^\infty = \{v : v \in C^\infty, Tr(v) \subset \Omega\}$$

bezeichnet, wobei

$$Tr(v) := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : v(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Die Funktionen von C_0^∞ haben die Eigenschaft, dass sie in einer Umgebung des Randes Γ verschwinden.

Bemerkung 1.5. ($C_{0,div}^\infty$ - Raum)

Ein wichtiger Raum für die Untersuchung der Navier-Stokes-Gleichungen ist

$$C_{0,div}^\infty = \{v : v \in C_0^\infty, \nabla \cdot v = 0\}.$$

□

Definition 1.6. (Lebesgue-Bochner-Räume)

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum. Für $1 \leq p \leq \infty$ werden die Lebesgue-Bochner-Räume

$$L^p(\Omega; X) := \{f : \Omega \rightarrow X : f \text{ ist Bochner-messbar und } \|f\|_{L^p(\Omega; X)} < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{L^p(\Omega; X)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega \|f(\mathbf{x})\|_X^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} \|f(\mathbf{x})\|_X & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

definiert, wobei f eine Klasse von Funktionen repräsentiert, die fast überall gleich sind. Die Bochner-Räume sind mit der oberen Norm vollständig, also Banach-Räume, siehe (Papageorgiou and Winkert, 2018)[p. 306-307].

Bemerkung 1.7. (Lebesgue-Räume)

Die klassischen Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ sind die spezielle Lebesgue-Bochner-Räume mit dem Banach-Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. □

Bemerkung 1.8. ($L^2(\Omega)$ -Raum)

Im Besonderen ist $L^2(\Omega)$ ein Hilbert-Raum mit dem Innenprodukt

$$(f, g) := \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall f, g \in L^2(\Omega) .$$

In der gesamten Arbeit ist mit (\cdot, \cdot) stets das Innenprodukt im $L^2(\Omega)$ -Raum gemeint. □

Bemerkung 1.9. (L^1_{loc} -Raum)

Der Raum der lokal integrierbaren Funktionen wird durch

$$L^1_{loc} := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega'} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} < \infty, \text{ für jede kompakte Untermenge } \Omega' \subset \Omega \right\}$$

definiert. □

Definition 1.10. (Distribution)

Ein auf $C_0^\infty(\Omega)$ definiertes Funktional wird eine Distribution genannt, falls es stetig und linear ist. Die Menge aller Distributionen wird mit $(C_0^\infty(\Omega))'$ bezeichnet.

Bemerkung 1.11. (Bezüglich der Distribution)

Die Anwendung einer Distribution $\psi \in (C_0^\infty(\Omega))'$ auf eine Funktion $u \in C_0^\infty(\Omega)$ wird mit $\psi(u) = \langle \psi, u \rangle \in \mathbb{R}$ bezeichnet. □

Definition 1.12. (Dualraum)

Der Raum aller beschränkten und linearen Funktionalen, die auf V definiert sind, wird mit V' bezeichnet und der Dualraum von V genannt.

Bemerkung 1.13. (Bezüglich des Dualraumes)

Die Anwendung von einem Funktional $f \in V'$ auf eine Funktion $v \in V$ wird mit $\langle f, v \rangle_{V',V} = f(v)$ bezeichnet. □

Definition 1.14. (Schwache Ableitung)

Seien $f, F \in L^1_{loc}$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ ein Multiindex mit $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Falls für jede Funktion $g \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} F(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) D^\alpha g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} ,$$

dann wird $F(\boldsymbol{x})$ die schwache Ableitung von $f(\boldsymbol{x})$ hinsichtlich $\boldsymbol{\alpha}$ genannt, für die wie im klassischen Fall die Notation $D^\alpha f(\boldsymbol{x})$ verwendet wird.

Definition 1.15. (Sobolev-Räume)

Seien $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $p \in [1, \infty]$, dann ist der Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ durch

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad (1.1)$$

definiert.

Bemerkung 1.16. (Bezüglich der Sobolev-Räume)

- Sobolev-Räume sind mit der oben definierten Norm (1.1) Banach-Räume.
- Der Raum $C^\infty(\Omega)$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$. Mit dieser Eigenschaft können Sobolev-Räume als Abschluss von $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm (1.1) charakterisiert werden. Für Gebiete mit glattem Rand kann sogar gezeigt werden, dass der Raum $C^\infty(\bar{\Omega})$ in $W^{k,p}(\Omega)$ dicht ist. □

Bemerkung 1.17. ($H^k(\Omega)$ -Räume)

Im Besonderen ist $H^k := W^{k,2}(\Omega)$ ein Hilbert-Raum mit dem Innenprodukt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v) .$$

□

Definition 1.18. ($W_0^{k,p}(\Omega)$ -Räume)

Der Sobolev-Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist definiert als Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm von $W^{k,p}(\Omega)$

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}} .$$

Definition 1.19. ($W^{-k,q}(\Omega)$ -Räume)

Seien $p \in (1, \infty)$ und q so definiert, dass $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Der Raum $W^{-k,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, beinhaltet alle Distributionen, die auf $W^{k,p}(\Omega)$ definiert sind, d.h.

$$W^{-k,q}(\Omega) = \left\{ \phi \in (C_0^\infty(\Omega))' : \|\phi\|_{W^{-k,q}(\Omega)} < \infty \right\}$$

mit

$$\|\phi\|_{W^{-k,q}(\Omega)} = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega), u \neq 0} \frac{\langle \phi, u \rangle}{\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}} .$$

Bemerkung 1.20. (Zusammenhang zwischen $W^{k,p}(\Omega)$ - und $W^{-k,q}(\Omega)$ -Räumen)

- $W^{-k,q}(\Omega) = \left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)'$, d.h., $W^{-k,q}(\Omega)$ kann mit dem Dualraum von $W_0^{k,p}(\Omega)$ identifiziert werden, insbesondere $H^{-1}(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega)\right)'$.

- Es gilt

$$\dots \subset W^{2,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega) \subset W^{-2,q}(\Omega) \subset \dots$$

□

Theorem 1.21. (Spursatz)

Da Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, gibt es genau einen linearen und stetigen Operator $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$, $p \in [1, \infty)$, sodass

$$\gamma u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma} \quad \forall u \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega).$$

Der oben beschriebene Operator γ wird Spur genannt.

Beweis. Der Beweis kann in der Literatur, wie (Adams and Fournier, 2003)[Theorem 7.39], gefunden werden. □

Bemerkung 1.22. (Bezüglich der Spur)

- Da ein linearer und stetiger Operator beschränkt ist, gibt es eine konstante $C > 0$ mit

$$\|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

- Für Gebiete mit glattem Rand folgt aus der Dichtheit des Raumes $C^\infty(\bar{\Omega})$ in $W^{1,p}(\Omega)$, dass der Raum $C(\bar{\Omega})$ ebenfalls in $W^{1,p}(\Omega)$ dicht ist, d.h., für jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in C(\bar{\Omega})$ mit $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann ist die Spur von u durch $\gamma u = \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma u_n)$ definiert.

- Es gilt

$$\begin{aligned} \gamma u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \gamma D^\alpha u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall u \in W_0^{k,p}(\Omega), |\alpha| \leq k-1. \end{aligned}$$

□

Definition 1.23. (Schwache Divergenz)

Sei $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p$ ein Vektorfeld mit $p \geq 1$. Existiert eine Funktion $\theta \in L_{loc}^1(\Omega)$, sodass

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u \theta \, d\mathbf{x} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

dann wird θ die schwache Divergenz von \mathbf{v} genannt, für die wie im klassischen Fall die Notation $\nabla \cdot \mathbf{v}$ verwendet wird.

Bemerkung 1.24. ($H(\operatorname{div}, \Omega)$ -Raum)

$\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$ ist ein weiterer wichtiger Hilbert-Raum mit dem Innenprodukt

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)} := (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v}) .$$

□

Definition 1.25. (Schwach divergenz-freies Vektorfeld)

Ein Vektorfeld $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p$ mit $p \geq 1$ heißt schwach divergenz-frei, wenn

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega) .$$

Kapitel 2

Inkompressible

Navier-Stokes-Gleichungen

In diesem Kapitel werden zuerst die klassische sowie schwache Formulierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen kurz vorgestellt. Anschließend befasst sich dieses Kapitel überwiegend mit der zeitlichen Diskretisierung dieser Gleichungen, insbesondere mit der zeitlichen Behandlung des Konvektionsterms, und mit der Finite-Elemente-Methode.

2.1 Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Fluide

Im Wesentlichen beschreiben die Navier-Stokes-Gleichungen im Falle von einer isothermen Strömung¹ zwei physikalische Erhaltungsgesetze, die Massenerhaltung und die Impulserhaltung. Für die inkompressiblen Fluiden lassen sich die Impulserhaltung zu $\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$ und die Massenerhaltung zur Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ vereinfachen. Dadurch wird ein nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem erhalten, das die Strömung solcher Fluide vollständig beschreibt:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } (0, T] \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } (0, T] \times \Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei folgende Notationen gelten

$$\begin{aligned} t \in (0, T] &: \text{Zeit} \\ \nu &: \text{Viskosität} \end{aligned}$$

¹eine Strömung bei konstanter Temperatur

\mathbf{u}	:	Geschwindigkeit in Abhängigkeit von \mathbf{x} und t
p	:	Druck in Abhängigkeit von \mathbf{x} und t
\mathbf{f}	:	äußere Kraft
$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$:	Konvektionsterm.

Die Gleichungen (2.1) werden die Navier-Stokes-Gleichungen genannt, deren ausführliche Herleitung in Literatur, wie (John, 2016)[Kapitel 2], nachgelesen werden kann.

Bemerkung 2.1. (Unterschiedliche Formen des Konvektionsterms in (2.1))

Es gibt mehrere Formen des Konvektionsterms der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen:

$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$:	Konvektionsform
$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^T)$:	Divergenzform
$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^T) + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}^T \mathbf{u})$:	Divergenzform mit $p_{mod} = p - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{u})$
$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$:	Rotationsform mit $p_{Bern} = p + \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{u})$.

Sei \mathbf{u} schwach differenzierbar und schwach divergenz-frei, dann sind die oberen Formen äquivalent. (Für die Äquivalenz der Konvektionsform und Rotationsform ist nicht erforderlich, dass \mathbf{u} schwach divergenz-frei ist.) Der Beweis der Äquivalenz der oberen Formen kann beispielsweise in (John, 2016)[Remark 6.6] gefunden werden. \square

2.1.1 Anfangs- und Randbedingung

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich der Zeit und zweiter Ordnung bezüglich des Raumes. Deswegen werden eine Anfangsbedingung ($\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0$) sowie Randbedingungen auf Γ benötigt, um ein wohlgestelltes Problem bezüglich der Geschwindigkeit zu erhalten.

Es gibt verschiedene Arten von Randbedingungen, die für inkompressible Fluide festgelegt werden können. Häufig verwendete Randbedingungen beschreiben das Geschwindigkeitsfeld auf einem Teil des Randes

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = g(t, \mathbf{x}) \quad \text{in } (0, T] \times \Gamma_{diri}.$$

Diese Randbedingungen werden Dirichlet-Randbedingungen genannt, die insbesondere vorgeschriebene Ein- und Ausströmungen modellieren.

Der Spezialfall $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ in $(0, T] \times \Gamma_{diri}$ wird die Haftbedingung² genannt.

²auf Englisch no-slip condition

Es ist zu beachten, dass weil die Dirichlet-Randbedingungen im Falle der Navier-Stokes-Gleichungen wesentliche Randbedingungen sind, gehen sie in die Definition des geeigneten Geschwindigkeitsfeldes ein.

Falls Dirichlet-Randbedingungen auf dem gesamten Rand vorgeschrieben sind, gibt es außerdem zwei zusätzliche Punkte zu berücksichtigen. Erstens wird der Druck in jedem Zeitschritt nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Daher muss für die Eindeutigkeit der Lösung eine zusätzliche Bedingung zum Festsetzen der Konstante eingeführt werden, z. B. dass der Integral-Mittelwert des Drucks in jedem Zeitschritt verschwinden sollte

$$\int_{\Omega} p(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad t \in (0, T] .$$

Zweitens folgt aus der divergenz-freien Einschränkung und der partiellen Integration, dass die Randbedingung die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(t, \mathbf{s}) \, d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(t, \mathbf{s}) \, d\mathbf{s} = 0 \quad t \in (0, T]$$

erfüllen muss, wobei \mathbf{n} der Normaleneinheitsvektor ist.

Für den theoretischen Teil dieser Arbeit wird zur Vereinfachung der Darstellung die Haftbedingung auf dem gesamten Rand ($\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ in $(0, T] \times \Gamma$) vorausgesetzt. Mit dieser Annahme ist die Kompatibilitätsbedingung ohne weiteres erfüllt.

2.1.2 Schwache Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen

In dieser Arbeit wird die Finiten-Elemente-Methode für die räumliche Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen angewendet. Da diese Methode auf der schwachen (oder variationalen) Formulierung der partiellen Differentialgleichungen basiert, muss an dieser Stelle die schwache Formulierung der Gleichungen (2.1) hergeleitet werden. Der Vorteil der Verwendung der schwachen Formulierung besteht darin, dass weniger glatte Lösungen in Betracht gezogen werden können. Aus diesem Grund wurde im vorherigen Kapitel das Konzept der schwachen Ableitung und der Sobolev-Räume eingeführt, die für die schwache Formulierung partieller Differentialgleichungen unerlässlich sind.

Für die schwache Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) mit der Haftbedingung auf Γ wird das passende Geschwindigkeitsfeld durch

$$\mathbf{V} := \mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma \text{ im Sinne von Spuren}\}$$

und der passende Druckraum durch

$$Q := L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q(x) \, dx = 0\}$$

definiert.

Die Räume \mathbf{V} und Q sind mit den in Bemerkungen 1.17 bzw. 1.8 definierten Innenprodukten Hilberträume und der Dualraum von \mathbf{V} ist $\mathbf{V}' = \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, siehe Bemerkung 1.20.

Um die schwache Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) herzuleiten, werden die erste Gleichung mit den Testfunktionen aus \mathbf{V} und die zweite Gleichung mit den Testfunktionen aus Q multipliziert. Anschließend wird die partielle Integration im Raum durchgeführt und für die einfache Darstellung werden die beiden Gleichungen addiert. Dadurch ergibt sich die folgende Differentialgleichung: Sei $\mathbf{f} \in \mathbf{V}'$, finde $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$, sodass $\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}, \\ \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Um festzustellen, unter welchen Bedingungen die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung für die schwache Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen 2.2 gewährleistet ist, wird üblicherweise im ersten Schritt die Existenz und die Eindeutigkeit der Geschwindigkeit entkoppelt vom Druck untersucht, indem die Suche auf einen geeigneten schwach divergenz-freien Unterraum von \mathbf{V} eingeschränkt wird. Im zweiten Schritt wird die Existenz eines entsprechenden Drucks untersucht.

Hier werden daher die folgenden schwach divergenz-freien Unterräume

$$\mathbf{V}_{div} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : (\nabla \cdot \mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in Q\}$$

und

$$\mathbf{H}_{div}(\Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(div, \Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma \text{ im Sinne von Spuren}\}$$

definiert.

Es ist zu bemerken, dass die Regularitätsanforderung für Funktionen von \mathbf{H}_{div} schwächer als die für Funktionen von \mathbf{V}_{div} ist und \mathbf{H}_{div} der Abschluss von $\mathbf{C}_{0,div}^\infty(\Omega)$ in der Norm von $L^2(\Omega)$ ist, siehe (John, 2016)[Remark 3.33].

Das Problem (2.2) reduziert sich mit den Testfunktionen aus \mathbf{V}_{div} zu: Finde $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_{div}$, sodass $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{div}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}, \\ \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bei beiden Systemen (2.2) und (2.3) ist die zeitliche Ableitung im schwachen Sinne nach der Definition 1.14 zu verstehen.

Definition 2.2. (Schwache Geschwindigkeitslösung der Navier-Stokes-Gleichungen, vergleiche (Girault and Raviart, 1979)[p. 158])

Seien $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}')$ und $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_{div}(\Omega)$.

Dann wird $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}_{div}) \cap \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}_{div})$ die schwache Geschwindigkeitslösung der Navier-Stokes-Gleichungen genannt, wenn \mathbf{u} das System (2.3) in $(C_0^\infty(0, T))'$ erfüllt.

Bemerkung 2.3. (Zusammenhang zwischen den Lösungen der Systeme (2.2) und (2.3), vergleiche (John, 2016)[Remark 7.27])

Falls $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ eine Lösung vom System (2.2) ist, erfüllt \mathbf{u} offensichtlich auch das System (2.3), weil $\mathbf{V}_{div} \subset \mathbf{V}$ ist. Die umgekehrte Richtung kann auch gezeigt werden, d.h., wenn $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_{div}$ eine Lösung vom System (2.3) ist, lässt sich eine Funktion $p \in Q$ finden, sodass (\mathbf{u}, p) das System (2.2) erfüllt. Die Regularität vom Druck p wurde in der Literatur, wie (Galdi, 2000)[Section 2], (Sohr, 2001)[Section V.1.7] und (Temam, 1984)[p. 307], behandelt. \square

Bemerkung 2.4. (Äquivalente schwache Formen des Konvektionsterms)

Die Formulierungen (2.2) sowie (2.3) verwenden die Konvektionsform des nichtlinearen Terms

$$n_{conv}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Äquivalente schwache Formen werden durch das Verwenden anderer Formen des Konvektionsterms von Bemerkung 2.1 erhalten. Die Divergenzform ist durch

$$n_{div}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := n_{conv}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2}((\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (2.4)$$

definiert. Die Motivation für den Faktor $\frac{1}{2}$ vor dem Divergenzterm ist, dass (2.4) dadurch im Falle $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ verschwindet, sogar wenn das erste Argument nicht schwach divergenzfrei ist. Diese Eigenschaft gilt ausschließlich für den Faktor $\frac{1}{2}$.

Wird die schwache Rotationsform

$$n_{rot}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (2.5)$$

verwendet, muss der Term $(\nabla \cdot \mathbf{v}, p)$ vom System (2.2) zusätzlich durch $(\nabla \cdot \mathbf{v}, p_{Bern})$ ersetzt werden.

Die letzte schwache Form des Konvektionsterms ist die skew-symmetrische Form, die durch

$$n_{skew}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \frac{1}{2}(n_{conv}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - n_{conv}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})) \quad (2.6)$$

definiert ist. \square

Lemma 2.5. (*Verschwinden des Konvektionsterms*)

Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, dann

$$n_{rot}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = n_{skew}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0. \quad (2.7)$$

Wenn zusätzlich $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ oder $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ auf Γ , dann

$$n_{div}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0. \quad (2.8)$$

Wenn \mathbf{u} schwach divergenz-frei ist und $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ , dann

$$n_{conv}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0. \quad (2.9)$$

Beweis. Siehe (John, 2016)[Lemma 6.10]. □

Der Einfachheit halber wird in dieser Arbeit für den theoretischen Teil stets die schwache Konvektionsform des Konvektionsterm verwendet.

2.1.3 Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

Die allgemeine Idee für den Beweis der Existenz einer schwachen Geschwindigkeitslösung ist, dass statt des Systems (2.3) eine Folge von einfacheren Problemen betrachtet wird, die in einem passenden Grenzwert zum System (2.3) konvergiert. Danach wird gezeigt, dass diese einfacheren Probleme eine eindeutige Lösung haben. Abschließend wird erwiesen, dass eine Teilfolge von der Folge der eindeutigen Lösungen zu einer schwachen Geschwindigkeitslösung der Navier-Stokes-Gleichungen konvergiert.

Für diesen Zweck können verschiedene Arten von einfacheren Problemen genommen werden. In dieser Arbeit wird dafür das Galerkin-Verfahren verwendet. Die Grundidee des Galerkin-Verfahrens beruht darauf, dass die Lösung der schwachen Formulierung einer partiellen Differentialgleichung nicht mehr in einem unendlich-dimensionalen Raum gesucht wird, sondern eine Näherungslösung in einem endlich-dimensionalen Raum (z. B. mit der Dimension n), aus dem ebenfalls die Testfunktionen gewählt werden. Abschließend wird der Fall $n \rightarrow \infty$ studiert.

Die durch diese Vorgehensweise erzielte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen wird die schwache Lösung im Sinne von Leray-Hopf genannt.

Bemerkung 2.6. (Einsatz des Galerkin-Verfahrens, vergleiche (John, 2016)[Remark 7.11])

Es wird in (Galdi, 2000)[Lemma 2.3] gezeigt, dass es eine Basis $\{\mathbf{v}_l^n\}_{l=1}^\infty$ von $\mathbf{C}_{0,div}^\infty(\Omega)$ gibt, wo die Basisfunktionen bezüglich des Innenprodukts von $\mathbf{L}^2(\Omega)$ orthonormal sind. Wenn jetzt der endlich-dimensionale Unterraum

$$\mathbf{V}_{div}^n = \text{span}\{\mathbf{v}_l^n\}_{l=1}^n \subset \mathbf{C}_{0,div}^\infty(\Omega) \quad (2.10)$$

betrachtet wird, lässt sich das Galerkin-Verfahren angewendet auf das System (2.3) wie folgt verstehen: Finde $\mathbf{u}^n \in \mathbf{V}_{div}^n$, sodass

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) + (\nu \nabla \mathbf{u}^n, \nabla \mathbf{v}^n) + n_{conv}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^n \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v}^n \in \mathbf{V}_{div}^n, \\ \mathbf{u}^n(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0^n, \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei \mathbf{u}_0^n die orthogonale Projektion von \mathbf{u}_0 auf \mathbf{V}_{div}^n bezüglich des Innenprodukts in \mathbf{L}^2 .

Das System (2.11) ist genau dann erfüllt, wenn es für alle Basisfunktionen erfüllt wird. Wird die folgende Darstellung

$$\mathbf{u}^n(t, x) = \sum_{l=1}^n \alpha_l^n(t) \mathbf{v}_l^n(x) \quad (2.12)$$

verwendet, ergibt sich das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\alpha_l^n}{dt} + \sum_{j=1}^n a_{lj} \alpha_j^n + \sum_{j,k=1}^n n_{ljk} \alpha_j^n \alpha_k^n = f_l, \quad l = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

$$\alpha_l^n(0) = u_{0l}, \quad l = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

mit

$$\begin{aligned} a_{lj} &= (\nu \nabla \mathbf{v}_j^n, \nabla \mathbf{v}_l^n), \quad n_{ljk} = ((\mathbf{v}_j^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_k^n, \mathbf{v}_l^n) = n(\mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_k^n, \mathbf{v}_l^n), \\ f_l &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_l^n \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}, \quad u_{0l} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_l^n). \end{aligned}$$

Die Orthogonalität der Basisfunktionen ist keine Notwendigkeit und vereinfacht nur die Darstellung. Für nicht orthogonale Basisfunktionen ist die Gramsche Matrix³ von \mathbf{V}_{div}^n also $G_{jl} = (\mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_l^n)$ nicht mehr gleich der Einheitsmatrix und erscheint daher bei dem ersten Term der Gleichung (2.13). Da diese Matrix nicht singulär ist, kann die Gleichung mit ihrer Inverse multipliziert werden. Dadurch wird der erste Term wie bei der Gleichung (2.13) erhalten und die anderen Terme verändern sich etwas, siehe z. B. (Temam, 1984)[p. 283].

³Massenmatrix

Theorem 2.7. (Existenz einer schwachen Geschwindigkeitslösung im Sinne von Leray-Hopf)

Seien $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}')$ und $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_{div}(\Omega)$, dann gibt es eine schwache Geschwindigkeitslösung der Navier-Stokes-Gleichungen⁴ im Sinne von Leray-Hopf.

Beweis. Siehe (John, 2016)[Theorem 7.18]. □

Theorem 2.8. (Eindeutigkeit einer schwachen Geschwindigkeitslösung in zwei Dimensionen)

Es gibt genau eine schwache Geschwindigkeitslösung der Navier-Stokes-Gleichungen in zwei Dimensionen.

Beweis. Siehe (John, 2016)[Theorem 7.24]. □

Bemerkung 2.9. (Starke Lösung im Sinne von Serrin)

Es gibt nicht mehr als eine schwache Lösung

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^s(0, T; \mathbf{L}^q(\Omega)) \quad \text{mit} \quad s > 2, q > 3, \frac{2}{s} + \frac{3}{q} = 1, \quad (2.15)$$

siehe (Serrin, 1963). Eine Lösung, die (2.15) erfüllt, wird die starke Lösung im Sinne von Serrin genannt. □

Bemerkung 2.10. (Bezüglich der Eindeutigkeit einer schwachen Lösung in drei Dimensionen, vergleiche (John, 2016)[Remark 7.25])

Die Eindeutigkeit einer schwachen Lösung in drei Dimensionen ist ein offenes Problem. Nur die Eindeutigkeit einer starken Lösung im Sinne von Serrin ist bekannt, jedoch kann die Existenz einer starken Lösung nicht bewiesen werden, sondern nur die Existenz einer schwachen Lösung. Diese offenen Fragen stehen in engem Zusammenhang mit dem Problem, das vom Clay Mathematics Institute zu einem der Millenniumsprobleme ernannt wurde. □

⁴nach der Definition 2.2

2.2 Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

Für eine numerische Näherungslösung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) sind zeitliche sowie räumliche Diskretisierung dieser Gleichungen notwendig. Im Allgemeinen gibt es für die totale Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen zwei Herangehensweisen: Entweder werden die Gleichungen erst in der Zeit und anschließend im Raum diskretisiert (die sogenannte horizontale Linienmethode besser bekannt als die Rothe-Methode) oder umgekehrt (die vertikale Linienmethode). Beide Methoden haben ihre Vor- und Nachteile. In dieser Arbeit wird nach der Rothe-Methode vorgegangen.

2.2.1 Zeitliche Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

Für die zeitliche Diskretisierung werden folgende Notationen $\mathbf{u}_{n+1} := \mathbf{u}(t_{n+1}, \cdot)$ und $\Delta t_{n+1} := t_{n+1} - t_n$ gebraucht. Eine in der Anwendung weit verbreitete Klasse von Verfahren sind die Einschritt- θ -Verfahren, deren allgemeine Darstellung für die Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) mit dem Parameter $\theta \in [0, 1]$ wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{n+1} + \theta \Delta t_{n+1} [-\nu \Delta \mathbf{u}_{n+1} + (\mathbf{u}_{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{n+1}] + \Delta t_{n+1} \nabla p_{n+1} \\ & = \mathbf{u}_n - (1 - \theta) \Delta t_{n+1} [-\nu \Delta \mathbf{u}_n + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n] + (1 - \theta) \Delta t_{n+1} \mathbf{f}_n + \theta \Delta t_{n+1} \mathbf{f}_{n+1}, \\ & 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

wobei die Anfangsbedingung $(\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0)$ gegeben ist.

In der nachstehenden Tabelle wurden die drei wohlbekannten Verfahren, ihre Parameter für die allgemeine Darstellung (2.16) und ihre Ordnung sowie Stabilität aufgelistet:

TABELLE 2.3: Übersicht für Einschritt- θ -Verfahren

	θ	Ordnung	Stabilität
explizites Euler-Verfahren	0	1	nicht A-stabil
implizites Euler-Verfahren	1	1	L-stabil
Crank-Nicolson-Verfahren	$\frac{1}{2}$	2	A-stabil

Ein weiteres Verfahren für die zeitliche Diskretisierung ist ein Mehrschrittverfahren namens BDF2-Verfahren, das von zweiter Ordnung und stark A-stabil ist. Dementsprechend ist das BDF2-Verfahren von derselben Ordnung wie das Crank-Nicolson-Verfahren aber stabiler. Allerdings muss für dieses Verfahren in jedem Zeitschritt ein weiterer Wert (\mathbf{u}_{n-1}) mitgespeichert werden (vergleiche Systeme (2.16) und (2.17)).

Die Anwendung dieses Verfahren auf die Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) sieht für $n \geq 1$ wie folgt aus:

$$\begin{aligned} & \frac{3\mathbf{u}_{n+1} - 4\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{2} - \nu \Delta t_{n+1} \Delta \mathbf{u}_{n+1} + \Delta t_{n+1} (\mathbf{u}_{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{n+1} \\ & + \Delta t_{n+1} \nabla p_{n+1} = \Delta t_{n+1} \mathbf{f}_{n+1}, \\ & 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

wobei die Anfangsbedingung $(\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0)$ gegeben ist und \mathbf{u}_1 mithilfe des impliziten Euler-Verfahrens oder des Crank-Nicolson-Verfahrens bestimmt wird.

Bemerkung 2.11. (Annäherung von \mathbf{u}_1)

Da die Genauigkeit der Lösung des Systems (2.17) natürlich auch von der Annäherung \mathbf{u}_1 abhängt, wird das implizite Euler-Verfahren oder das Crank-Nicolson-Verfahren dafür verwendet. Dank der bedingungslosen Nullstabilität des BDF2-Verfahrens ist außerdem sichergestellt, dass ein möglicher Fehler in \mathbf{u}_1 beschränkt bleibt. \square

In dieser Arbeit wird das BDF2-Verfahren aufgrund seiner guten Stabilitätseigenschaften für die zeitliche Diskretisierung eingesetzt. Die schwache Formulierung des Systems (2.17) mit äquidistanten Zeitschritten Δt (zur Vereinfachung der Darstellung) lässt sich wie folgt verstehen: Seien $n \geq 1$, $\mathbf{f}_{n+1} \in \mathbf{V}'$ und $\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n-1} \in \mathbf{V}$, finde $(\mathbf{u}_{n+1}, p_{n+1}) \in \mathbf{V} \times Q$, sodass $\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v} \right) + \nu \Delta t (\nabla \mathbf{u}_{n+1}, \nabla \mathbf{v}) + \Delta t n_{conv} (\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}) - \Delta t (\nabla \cdot \mathbf{v}, p_{n+1}) \\ & + \Delta t (\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}, q) = \left(2\mathbf{u}_n - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v} \right) + \Delta t \langle \mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Bemerkung 2.12. (Bezüglich der Länge des Zeitschrittes für die Berechnung von \mathbf{u}_1)

Bei der Berechnung von \mathbf{u}_1 ist es zu beachten, dass der Zeitschritt für das implizite Euler-Verfahren viel kleiner als der für das BDF2-Verfahren sein muss, weil dieses Verfahren nur von erster Ordnung ist. Für das Crank-Nicolson-Verfahren kann dagegen derselbe Zeitschritt Δt wie für das BDF2-Verfahren genommen werden. \square

2.2.1.1 Zeitliche Behandlung des Konvektionsterms

Der Konvektionsterm im System (2.18) sorgt für die Nichtlinearität dieses Gleichungssystems. Eine mögliche Vorgehensweise, die als **implizite** Behandlung des Konvektionsterms bezeichnet wird, ist dieses System in jedem Zeitschritt mittels einer Fixpunktiteration zu approximieren. In dieser Arbeit wird die sogenannte Picard-Iteration mit dem Initialwert $(\mathbf{u}_{n+1}^{(0)}, p_{n+1}^{(0)}) = (2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}, 2p_n - p_{n-1})$ angewendet. Der Konvektionsterm wird bei

der $(m + 1)$ -ten Iteration durch $n_{conv}(\mathbf{u}_{n+1}^{(m)}, \mathbf{u}_{n+1}^{(m+1)}, \mathbf{v})$ approximiert.

Die Anwendung der Picard-Iteration auf das System (2.18) lässt sich für $m \geq 0$ wie folgt formulieren: Seien $(\mathbf{u}_{n+1}^{(m)}, p_{n+1}^{(m)})$ gegeben, finde $(\mathbf{u}_{n+1}^{(m+1)}, p_{n+1}^{(m+1)})$, sodass $\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} \mathbf{u}_{n+1}^{(m+1)}, \mathbf{v} \right) + \nu \Delta t (\nabla \mathbf{u}_{n+1}^{(m+1)}, \nabla \mathbf{v}) + \Delta t n_{conv}(\mathbf{u}_{n+1}^{(m)}, \mathbf{u}_{n+1}^{(m+1)}, \mathbf{v}) \\ & - \Delta t (\nabla \cdot \mathbf{v}, p_{n+1}^{(m+1)}) + \Delta t (\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}^{(m+1)}, q) = \left(2\mathbf{u}_n - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v} \right) + \Delta t \langle \mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Eine weitere Vorgehensweise ist die sogenannte **IMEX** Behandlung, mithilfe deren das Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems vermieden wird. Dabei wird den ersten Geschwindigkeitsvektor des Konvektionsterms in (2.18) beispielsweise durch eine konstante Extrapolation in der Zeit $n_{conv}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v})$ oder durch eine lineare Extrapolation in der Zeit $n_{conv}(2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v})$ approximiert. Die Formulierung dieser Behandlung mit linearer Extrapolation für das System (2.18), welche der ersten Iteration vom System (2.19) entspricht, sieht wie folgt aus: $\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v} \right) + \nu \Delta t (\nabla \mathbf{u}_{n+1}, \nabla \mathbf{v}) + \Delta t n_{conv}(2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}) - \Delta t (\nabla \cdot \mathbf{v}, p_{n+1}) \\ & + \Delta t (\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}, q) = \left(2\mathbf{u}_n - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v} \right) + \Delta t \langle \mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Letztere ist die **explizite** Behandlung des Konvektionsterms, bei der die beiden Geschwindigkeitsvektoren des Konvektionsterms in (2.18) durch eine konstante Extrapolation $n_{conv}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{v})$ oder eine lineare Extrapolation $n_{conv}(2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}, 2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v})$ approximiert werden. Infolgedessen kann der Konvektionsterm als ein Teil der rechten Seite der Gleichungen betrachtet werden. Das Gleichungssystem (2.18) sieht mit der linearen Extrapolation wie folgt aus: $\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v} \right) + \nu \Delta t (\nabla \mathbf{u}_{n+1}, \nabla \mathbf{v}) - \Delta t (\nabla \cdot \mathbf{v}, p_{n+1}) + \Delta t (\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}, q) \\ & = \left(2\mathbf{u}_n - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v} \right) - \Delta t n_{conv}(2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}, 2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v}) + \Delta t \langle \mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.2.2 Finite-Elemente-Methode

Das Galerkin-Verfahren mithilfe einer zeitlichen Diskretisierung ermöglicht bereits eine numerische Näherungslösung der schwachen Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.2) zu berechnen. Die Auswahl der Basis spielt jedoch dabei eine bedeutende Rolle. Aus diesem Grund wird üblicherweise, wie auch in dieser Arbeit, ein spezielles Galerkin-Verfahren, die sogenannte Finite-Elemente-Methode, verwendet, deren Idee darin besteht, das Gebiet Ω in endlich viele Teilgebiete $\{\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_N\}$ zu unterteilen. Dabei werden die Basisfunktionen auf jedem Teilgebiet so konstruiert, dass diese auf möglichst vielen der anderen Teilgebiete verschwinden. Dadurch wird eine große Anzahl der Skalarprodukten zwischen Basisfunktionen ebenfalls verschwinden, die zum Aufstellen des Gleichungssystems zu berechnen sind.

In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in die für diese Arbeit relevante Finite-Elemente-Räume geben, der sich an (John, 2016)[Appendix B], (Brenner and Scott, 2002)[Kapitel 3] und (Ciarlet, 1978) orientiert.

Definition 2.13. (Finites-Element)

Es seien

- i. $\mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein kompaktes Gebiet mit nichtleerem Inneren $\overset{\circ}{\mathbf{K}}$ und stückweise glattem Rand $\partial\mathbf{K}$ (das Elementgebiet),
- ii. $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ ein endlich-dimensionaler Funktionsraum auf \mathbf{K} (der Raum der Formfunktionen) und
- iii. $\mathcal{N}_{\mathbf{K}} = \{\Phi_{\mathbf{K},1}, \dots, \Phi_{\mathbf{K},N_{\mathbf{K}}}\}$ eine Basis von $\mathcal{P}'(\mathbf{K})$ (Dualraum von $\mathcal{P}(\mathbf{K})$, der Raum der Knoten-Funktionale).

Dann wird das Triple $(\mathbf{K}, \mathcal{P}(\mathbf{K}), \mathcal{N}_{\mathbf{K}})$ ein Finites-Element genannt.

Bemerkung 2.14. (Bezüglich des Elementgebiets)

Der Rand $\partial\mathbf{K}$ besteht aus m -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten (Punkten, Geradenstücken und Ebenenstücken), $m = 0, \dots, d-1$, welche m -Flächen genannt werden. Die 0-Flächen des Polyeders werden die Ecken, die 1-Flächen die Kanten und $(d-1)$ -Flächen nur Flächen genannt. \square

Bemerkung 2.15. (bezüglich des Raums der Formfunktionen)

Im Allgemeinen besteht $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ aus Polynomen. Die Dimension von $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ wird mit $\dim \mathcal{P}(\mathbf{K}) = N_{\mathbf{K}}$ bezeichnet. \square

Bemerkung 2.16. (Bezüglich der Knoten-Funktionale)

In dieser Arbeit werden stetige und voneinander linear-unabhängige Knoten-Funktionale $\Phi_{\mathbf{K},1}, \dots, \Phi_{\mathbf{K},N_{\mathbf{K}}} : C^s(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet. Für die Finite-Elemente-Methode können verschiedene Arten von Funktionalen verwendet werden, wie zum Beispiel:

- Funktionsauswertungen an einem Punkt: $\Phi(v) = v(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{K}$,
- Auswertungen von Ableitungen: $\Phi(v) = \partial_i v(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{K}$,
- Integral-Werte auf K : $\Phi(v) = \frac{1}{|\mathbf{K}|} \int_{\mathbf{K}} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Der Glattheitsparameter s ist so zu wählen, dass die Funktionale $\Phi_{\mathbf{K},1}, \dots, \Phi_{\mathbf{K},N_{\mathbf{K}}}$ stetig sind. Wenn zum Beispiel eine Funktional die Auswertung einer partiellen Ableitung oder einer normalen Ableitung erfordert, muss mindestens $s = 1$ gewählt werden. Für die anderen oben angegebenen Funktionale ist $s = 0$ ausreichend. \square

Definition 2.17. (Unisolvenz)

Die Funktionale $\Phi_{\mathbf{K},1}, \dots, \Phi_{\mathbf{K},N_{\mathbf{K}}}$ werden auf $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ unisolvent genannt, falls es zu jedem $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_{\mathbf{K}}})^T \in \mathbb{R}^{N_{\mathbf{K}}}$ genau ein $r \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ gibt, sodass

$$\Phi_{\mathbf{K},i}(r) = a_i, \quad i = 1, \dots, N_{\mathbf{K}}.$$

Bemerkung 2.18. (Lokale Basis)

Werden für die Vektoren \mathbf{a} die Standard-Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^{N_{\mathbf{K}}}$ gewählt, so folgt aus der Unisolvenz, dass es eine eindeutige Menge $\{\phi_{\mathbf{K},j}\}_{j=1}^{N_{\mathbf{K}}}$ aus $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ mit

$$\Phi_{\mathbf{K},i}(\phi_{\mathbf{K},j}) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N_{\mathbf{K}}$$

gibt. Dementsprechend bildet die Menge $\{\phi_{\mathbf{K},j}\}_{j=1}^{N_{\mathbf{K}}}$ eine Basis von $\mathcal{P}(\mathbf{K})$, die die lokale Basis genannt wird. \square

Für die Definition der globalen Finite-Elemente-Räume ist eine Unterteilung des Gebiets Ω in Polyeder K erforderlich. Diese Unterteilung wird eine Zerlegung \mathcal{T}^h und die Polyeder K werden in diesem Zusammenhang Gitterzellen und die Vereinigung der Polyeder ein Gitter genannt. Die Gitterweite h sei definiert als die längste Kante des Gitters.

Definition 2.19. (Zulässige Zerlegung) (Siehe Ciarlet (1978)[p. 38, p. 51])

Eine endliche Menge $\mathcal{T}^h = \{\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_N\}$ von Elementgebieten ist eine zulässige Zerlegung des Gebiets Ω genau dann, wenn gilt:

i. $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^N \mathbf{K}_i$.

- ii. Für unterschiedliche Elementgebieten ist $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_1 \cap \overset{\circ}{\mathbf{K}}_2 = \emptyset$.
- iii. Der Durchschnitt von zwei Elementgebieten ist entweder leer oder eine gemeinsame m -Fläche, $0 \leq m \leq d - 1$.

Definition 2.20. (Globale und lokale Funktionale)

Seien $\Phi_1, \dots, \Phi_N : C^s(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetige lineare Funktionale der gleichen Art wie in Bemerkung 2.16 gegeben. Die Einschränkung dieser Funktionale auf $C^s(\mathbf{K})$ definiert eine Menge von lokalen Funktionalen $\Phi_{\mathbf{K},1}, \dots, \Phi_{\mathbf{K},N_{\mathbf{K}}}$, wobei davon ausgegangen wird, dass die lokalen Funktionale auf $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ unisolvent sind. Die Vereinigung aller Elementgebiete \mathbf{K}_j , für welches es ein $r \in \mathcal{P}(\mathbf{K}_j)$ mit $\Phi_i(r) \neq 0$ gibt, wird mit Ω_i bezeichnet.

Definition 2.21. (Finite-Elemente-Raum, globale Basis)

Eine auf Ω definierte Funktion $v(\mathbf{x})$ mit $v|_{\mathbf{K}} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ für jedes $\mathbf{K} \in \mathcal{T}^h$ wird stetig bezüglich der Funktional $\Phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genannt, wenn

$$\Phi_i(v|_{\mathbf{K}_1}) = \Phi_i(v|_{\mathbf{K}_2}), \quad \forall \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in \Omega_i.$$

Der Raum

$$S := \{v \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) : v|_{\mathbf{K}} \in \mathcal{P}(\mathbf{K}) \text{ und } v \text{ ist stetig bezüglich der Funktionale } \Phi_1, \dots, \Phi_N\}$$

wird der Finite-Elemente-Raum und die Funktionen $v \in S$ werden Finite-Elemente-Funktionen genannt.

Die globale Basis $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ von S ist durch die Bedingung

$$\phi_j \in S, \quad \Phi_i(\phi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

definiert.

Bemerkung 2.22. (Bezüglich der globalen Basis)

Eine globale Basisfunktion stimmt auf einer Gitterzelle mit einer lokalen Basisfunktion überein. Diese Eigenschaft impliziert die Eindeutigkeit der globalen Basisfunktionen.

Die Finite-Elemente-Funktionen müssen im Allgemeinen nicht stetig sein. Dazu müssen die Funktionale $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ entsprechend gewählt werden. \square

Definition 2.23. (Parametrische Finite-Elemente)

Seien $\hat{\mathbf{K}}$ eine Referenzgitterzelle mit dem Raum der Formfunktionen $\mathcal{P}(\hat{\mathbf{K}})$ und den lokalen Funktionalen $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_{N_{\hat{\mathbf{K}}}}$, und $\{F_{\mathbf{K}} : \hat{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{K}\}$ eine Klasse von bijektiven Abbildungen. Ein Finite-Elemente-Raum wird ein parametrischer Finite-Elemente-Raum genannt, falls

- i. Die Bildmenge $\{\mathbf{K}\}$ von $\{F_{\mathbf{K}}\}$ bildet die Menge der Gitterzellen.

ii. Die lokalen Räume sind gegeben durch

$$\mathcal{P}(\mathbf{K}) = \left\{ r : r = \hat{r} \circ F_{\mathbf{K}}^{-1}, \hat{r} \in \mathcal{P}(\hat{\mathbf{K}}) \right\}. \quad (2.22)$$

iii. Die lokalen Funktionale sind durch

$$\Phi_{\mathbf{K},i}(v(\mathbf{x})) = \hat{\Phi}_i(v(F_{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{x}}))) \quad (2.23)$$

definiert, wobei $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d)^T$ die Koordinaten der Referenzgitterzelle sind und $\mathbf{x} = F_{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{x}})$.

Definition 2.24. (d-Simplex)

Ein d-Simplex $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^d$ ist die konvexe Hülle von $(d+1)$ Punkten $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d+1} \in \mathbb{R}^d$, welche die Ecken von \mathbf{K} bilden.

Bemerkung 2.25. (Bezüglich der d-Simplexe)

Es wird immer davon ausgegangen, dass das Simplex nicht degeneriert ist, d.h., dessen d -dimensionalen Maß positiv ist. Diese Eigenschaft ist äquivalent zur Nichtsingularität der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1d} & a_{1d+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2d} & a_{2d+1} \\ a_{d1} & a_{d2} & a_{dd} & a_{dd+1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{di})^T$, $i = 1, \dots, d+1$.

Für $d = 2$ sind die Simplexe Dreiecke und für $d = 3$ sind sie Tetraeder. \square

Definition 2.26. (Baryzentrische Koordinaten)

Da \mathbf{K} die konvexe Hülle von Punkten $\{\mathbf{a}_i\}_i^{d+1} = 1$ ist, lautet die Parametrisierung von \mathbf{K} mit einer konvexen Kombination der Ecken wie folgt

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \mathbf{a}_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ werden die baryzentrischen Koordinaten von $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ genannt.

Bemerkung 2.27. (Bezüglich der baryzentrischen Koordinaten)

Aus der obigen Definition folgt, dass die baryzentrischen Koordinaten die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{a}_{ji} \lambda_i = x_j, \quad 0 \leq j \leq d, \quad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1$$

sind. Da die Systemmatrix nicht singulär ist, siehe Bemerkung 2.25, sind die baryzentrischen Koordinaten eindeutig bestimmt.

Die baryzentrischen Koordinaten der Ecke \mathbf{a}_i , $i = 1, \dots, d+1$, des Simplexes sind $\lambda_i = 1$ und $\lambda_j = 0, \forall j \neq i$. Da $\lambda_i(\mathbf{a}_i) = \delta_{ij}$, kann die baryzentrische Koordinate λ_i mit der linearen Funktion identifiziert werden, welche an der Ecke \mathbf{a}_i den Wert 1 hat und an allen anderen Ecken \mathbf{a}_j , $j \neq i$, verschwindet.

Das Baryzentrum des Simplexes ist gegeben durch

$$Z_{\mathbf{K}} = \frac{1}{d+1} \sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{d+1} \mathbf{a}_i.$$

Folglich sind dessen baryzentrischen Koordinaten $\lambda_i = \frac{1}{d+1}$, $i = 1, \dots, d+1$. \square

Bemerkung 2.28. (Simplizial-Referenzgitterzelle)

Eine häufig verwendete Referenzgitterzelle für Dreiecken und Tetraeder, wie auch im Programmpaket ParMoon, ist der Einheitssimplex

$$\hat{\mathbf{K}} := \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d \hat{x}_i \leq 1, \hat{x}_i \geq 0, i = 1, \dots, d \right\}.$$

Die Klasse $\{F_{\mathbf{K}}\}$ der zulässigen Abbildungen sind die bijektiven affinen Abbildungen

$$F_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{x}} = B_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \quad B_{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \det(B_{\mathbf{K}}) \neq 0, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d.$$

Die Bilder dieser Abbildungen erzeugen die Menge der nicht degenerierten Simplexe $\{\mathbf{K}\} \subset \mathbb{R}^d$. \square

Definition 2.29. (Affine Familie der Simplizial-Finiten-Elemente)

Seien die Simplizial-Referenzgitterzelle $\hat{\mathbf{K}}$, die affinen Abbildungen $\{F_{\mathbf{K}}\}$ und eine unisolvente Menge der Funktionale auf $\hat{\mathbf{K}}$ gegeben. Durch Verwendung von (2.22) und (2.23) ergibt sich auf jedem nicht degenerierten Simplex ein lokaler Finite-Elemente-Raum. Die Menge von diesen lokalen Finite-Elemente-Räumen wird die affine Familie der Simplizial-Finiten-Elemente genannt.

Definition 2.30. (Polynomraum $P_k(\mathbf{K})$)

Seien $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbf{K}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^T$. Dann ist der Polynomraum $P_k(\mathbf{K})$ gegeben durch

$$P_k(\mathbf{K}) := \text{Span} \left\{ \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i} = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} : \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ für } i = 1, \dots, d, \sum_{i=1}^d \alpha_i \leq k \right\}.$$

Bemerkung 2.31. (Lagrange-Elemente)

In unteren Beispielen sind die linearen Funktionale auf der Simplizial-Referenzgitterzelle $\hat{\mathbf{K}}$ die Werte von den Polynomen mit denselben baryzentrischen Koordinaten wie auf der allgemeinen Gitterzelle \mathbf{K} . Finite-Elemente, deren lineare Funktionale Werte von den Polynomen an bestimmten Punkten in \mathbf{K} sind, werden Lagrange-Elemente genannt. \square

Beispiel 2.32. (P_1 : stückweise lineares Finites-Element)

Dieser Finite-Elemente-Raum ist ein Unterraum von $C(\bar{\Omega})$. Die linearen Funktionale sind die Werte der Funktion an den Ecken der Gitterzelle, siehe Abbildung 2.1. Folglich $\dim P_1(\mathbf{K}) = d + 1$.

Die lokale Basis für die Funktionale $\{\Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_i), i = 1, \dots, d + 1\}$ ist $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d+1}$, denn $\Phi_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$, vergleiche Bemerkung 2.27. Da eine lokale Basis existiert, sind die Funktionale unisolvent auf dem Polynomraum $P_1(\mathbf{K})$.

Es wird nun gezeigt, dass der entsprechende Finite-Elemente-Raum aus stetigen Funktionen bezüglich der Funktionale besteht. Seien $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ zwei Gitterzellen mit der gemeinsamen Fläche E und sei $v \in P_1(= S)$. Die Einschränkungen von $v_{\mathbf{K}_1}, v_{\mathbf{K}_2}$ auf E sind lineare Funktionen auf E . Es muss gezeigt werden, dass beide lineare Funktionen identisch sind. Eine lineare Funktion auf der $(d - 1)$ -dimensionalen Fläche E wird eindeutig mit d linear unabhängigen Funktionalen bestimmt, die auf E definiert sind. Diese Funktionale können so gewählt werden, dass sie die Werte der Funktion an den d -Eckpunkten von E sind. Die Funktionale sind nach ihrer Definition stetig. Es muss also gelten, dass beide Einschränkungen auf E die gleichen Werte an den Eckpunkten von E haben. Deshalb $v_{\mathbf{K}_1}|_E = v_{\mathbf{K}_2}|_E$ und die Funktionen von P_1 sind stetig.

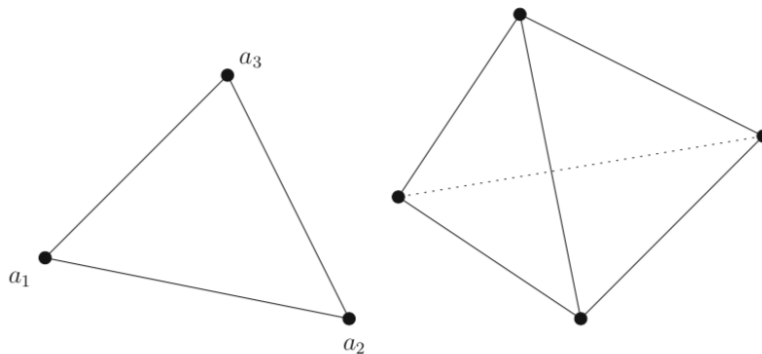


ABBILDUNG 2.1: Das Finite-Element $P_1(\mathbf{K})$

Beispiel 2.33. (P_2 : stückweise quadratisches Finites-Element)

Dieser Finite-Elemente-Raum ist auch ein Unterraum von $C(\bar{\Omega})$. Es besteht aus stückweise quadratischen Funktionen. Die Funktionale sind die Werte der Funktionen an den $d + 1$ Eckpunkten der Gitterzelle und der Wert der Funktionen an den Mittelpunkten der Kanten, siehe Abbildung 2.2. Da alle Eckpunkte miteinander verbunden sind, gibt es

$\sum_{i=1}^d i = \frac{d(d+1)}{2}$ Kanten. Dementsprechend $\dim P_2(\mathbf{K}) = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$.
 Der Teil der lokalen Basis, der zu den Funktionalen $\{\Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_i), i = 1, \dots, d+1\}$ gehört, ist gegeben durch

$$\{\phi_i(\lambda) = \lambda_i(2\lambda_i - 1), i = 1, \dots, d+1\}.$$

Sei der Mittelpunkt der Kanten zwischen den Eckpunkten \mathbf{a}_i und \mathbf{a}_j mit \mathbf{a}_{ij} bezeichnet, ist der entsprechende Teil der lokalen Basis gegeben durch

$$\{\phi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, i, j = 1, \dots, d+1, i < j\}.$$

Die Unisolvenz folgt aus der Tatsache, dass es eine lokale Basis gibt. Die Stetigkeit des entsprechenden Finite-Elemente-Raums kann auf dieselbe Weise wie für das P_1 Finite-Element angezeigt werden. Die Einschränkung einer auf einer Gitterzelle definierten quadratischen Funktion auf eine Fläche E ist eine quadratische Funktion auf dieser Fläche. Daher wird die Funktion auf E eindeutig mit $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ linear unabhängigen Funktionalen auf E bestimmt.

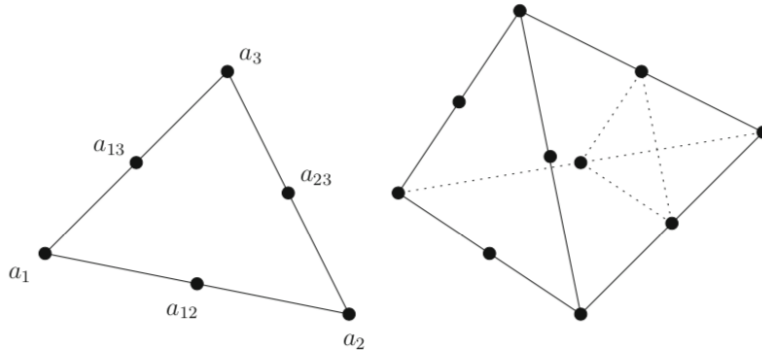


ABBILDUNG 2.2: Das Finite-Element $P_2(\mathbf{K})$

Parallelogramm und Parallelepipede

Bemerkung 2.34. (Referenzgitterzellen, Referenz-Abbildung zu Parallelepipeden)

In der Literatur können folgende zwei Referenzgitterzellen gefunden werden: der Einheitswürfel $[0, 1]^d$ und der große Einheitswürfel $[-1, 1]^d$. Es spielt keine Rolle, welche Referenzzelle ausgewählt wird. Hier wird der große Einheitswürfel $\hat{K} = [-1, 1]^d$ verwendet. Die Klasse der zulässigen Referenz-Abbildungen $\{F_K\}$ zu Parallelepipeden besteht aus bijektiven affinen Abbildungen der Form

$$F_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{x}} = B_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \quad B_{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \det(B_{\mathbf{K}}) \neq 0, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d.$$

Falls $B_{\mathbf{K}}$ eine diagonale Matrix ist, wird $\hat{\mathbf{K}}$ auf d -Rechtecken abgebildet.

Die auf diese Weise erhaltene Klasse von Gitterzellen ist für die Zerlegung allgemeiner Gebiete nicht geeignet. \square

Definition 2.35. (Polynomraum Q_k)

Seien $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^T$. Dann ist der Polynomraum Q_k gegeben durch

$$Q_k := \text{Span} \left\{ \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i} = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} : 0 \leq \alpha_i \leq k \text{ für } i = 1, \dots, d \right\}.$$

Bemerkung 2.36. (Finite-Elemente auf d -Rechtecken)

Zur Vereinfachung der Darstellung werden in den folgenden Beispielen d -Rechtecken betrachtet. In diesem Fall sind die Finiten-Elemente nur Tensorprodukte eindimensionaler Finiten-Elemente. Insbesondere können die Basisfunktionen als Produkte eindimensionaler Basisfunktionen geschrieben werden. \square

Beispiel 2.37. (Q_1 : stückweise d -lineares Finites-Element)

Dieser Finite-Elemente-Raum ist ein Unterraum von $C(\bar{\Omega})$. Die linearen Funktionale sind die Werte der Funktion an den Ecken der Gitterzelle, siehe Abbildung 2.3. Dementsprechend $\dim Q_1(\mathbf{K}) = 2^d$.

Die eindimensionalen lokalen Basisfunktionen, welche für die Tensorprodukt verwendet werden, sind gegeben durch

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1 - \hat{x}) \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1 + \hat{x}).$$

Mit diesen Funktionen werden z. B. die Basisfunktionen in zwei Dimensionen durch

$$\hat{\phi}_1(\hat{x})\phi_1(\hat{y}), \hat{\phi}_1(\hat{x})\phi_2(\hat{y}), \hat{\phi}_2(\hat{x})\phi_1(\hat{y}), \hat{\phi}_2(\hat{x})\phi_2(\hat{y}), \dots$$

berechnet.

Die Stetigkeit der Funktionen des Finite-Elemente-Raums Q_1 kann auf dieselbe Weise wie für Simplicial-Finite-Elemente bewiesen werden. Es wird die Tatsache verwendet, dass die Einschränkung von einer Funktion von $Q_k(\mathbf{K})$ auf die Fläche E eine Funktion von dem Raum $Q_k(E)$, $k \geq 1$ ist.

Beispiel 2.38. (Q_2 : stückweise d -quadratisches Finites-Element)

Dieser Finite-Elemente-Raum ist auch ein Unterraum von $C(\bar{\Omega})$. Die Funktionale sind in einer Dimension die Werte der Funktionen an beiden Enden und dem Mittelpunkt des Intervalls, siehe Abbildung 2.4, und in d Dimensionen die entsprechenden Werte des Tensorprodukts der Intervalle. Daraus folgt $\dim Q_2(\mathbf{K}) = 3^d$. Die eindimensionale

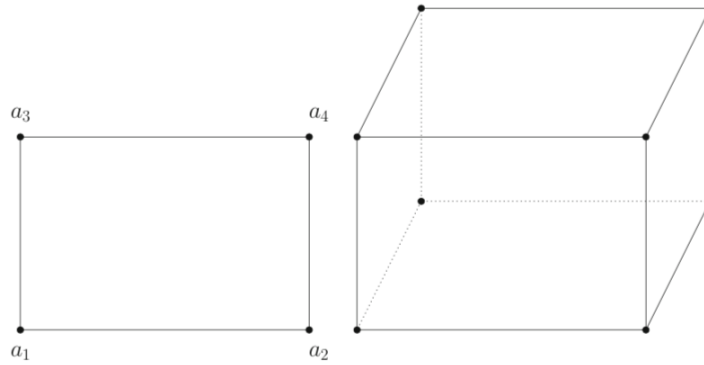


ABBILDUNG 2.3: Das Finite-Element $Q_1(\mathbf{K})$

Basisfunktion auf dem Referenzintervall ist durch

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = -\frac{1}{2}\hat{x}(1-\hat{x}) \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}) = (1-\hat{x})(1+\hat{x}) \quad \hat{\phi}_3(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1+\hat{x})\hat{x}.$$

definiert.

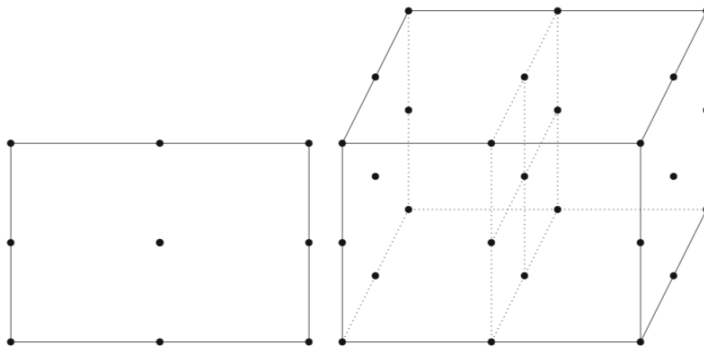


ABBILDUNG 2.4: Das Finite-Element $Q_2(\mathbf{K})$

Bemerkung 2.39. (Das Paar der Finite-Elemente-Räume für Geschwindigkeit und Druck)

Seien \mathbf{V}^h und Q^h Finite-Elemente-Räume. Für die Navier-Stokes-Gleichungen wird das Paar der Finite-Elemente-Räume für Geschwindigkeit und Druck mit \mathbf{V}^h/Q^h bezeichnet, wobei $\mathbf{V}^h = \mathbf{V}^h \cap \mathbf{V}$ und $Q^h = Q^h \cap Q$. (Aufgrund der Haftbedingung auf Γ sind die Durchschnitte mit \mathbf{V} und Q erforderlich, siehe 2.1.1.) \square

Bemerkung 2.40. (Die diskrete inf-sup Bedingung⁵ für Paare der konformen Finite-Elemente-Räume für Geschwindigkeit und Druck)

Das geeignete Paar der Finite-Elemente-Räume für Geschwindigkeit und Druck muss die sogenannte diskrete inf-sup Bedingung erfüllen, weil die eindeutige Lösbarkeit der entstehenden diskreten Gleichungssysteme erfordert, dass der Geschwindigkeit-Finite-Elemente-Raum V^h ausreichend groß im Vergleich zum Druck-Finite-Elemente-Raum

⁵diskrete Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi (LBB) Bedingung

Q^h ist. Diese Bedingung wird auf der Grundlage der Theorie für ein abstraktes lineares Sattelpunktproblem abgeleitet, siehe (John, 2016)[Kapitel 3].

Da in dieser Arbeit nur konforme Finite-Elemente-Räume, d.h. $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{V}$ und $Q^h \subset Q$, betrachtet werden, wird an dieser Stelle die diskrete inf-sup Bedingung für solche Finite-Elemente-Räume vorgestellt:

$$\inf_{q^h \in Q^h \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}^h, q^h)}{\|q^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}} \geq \beta_{is} > 0, \quad (2.24)$$

siehe (John, 2016)[Remark 3.51]. □

Bemerkung 2.41. (Der diskrete inf-sup Parameter β_{is}) Damit die Konvergenz der Finite-Elemente-Methode gewährleistet ist, muss der diskrete inf-sup Parameter β_{is} unabhängig von der Gitterweite h sein, weil die Inverse von β_{is} in die Fehlerschranke der Finite-Elemente-Fehlerabschätzung eingeht. Für Einzelheiten siehe (John, 2016)[Remark 3.57]. □

Bemerkung 2.42. (Die Familie der Taylor-Hood-Finite-Elemente-Räume)

Die Familie der Taylor-Hood-Finite-Elemente-Räume sind auf Dreiecken und Tetraeder gegeben durch P_k/P_{k-1} , $k \geq 2$, und auf Parallelogramm und Parallelepipede gegeben durch Q_k/Q_{k-1} , $k \geq 2$.

Die Paare der Taylor-Hood-Finite-Elemente-Räume gehören zu den beliebtesten Paaren für die Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen, insbesondere die Paare für $k = 2$. Ein Grund für diese Popularität ist sicherlich, dass die Implementierung der Finite-Elemente-Paare P_2/P_1 und Q_2/Q_1 im Vergleich zu anderen inf-sup stabilen Paaren von Finiten-Elementen vergleichsweise einfach sind, vergleiche (John, 2016)[Remark 3.123]. □

Bemerkung 2.43. (Die inf-sup Stabilität von P_2/P_1 in 2D und Q_2/Q_1 in 3D)

Seien $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ein polygonal umrandetes Gebiet und \mathcal{T}^h eine zulässige Zerlegung aus mehr als drei Dreiecken, dann sind die Paare der Finite-Elemente-Räume P_k/P_{k-1} , $k \geq 2$ inf-sup stabil, siehe (John, 2016)[Theorem 3.128].

In (Stenberg, 1987) wurde die inf-sup Stabilität für das Paar der Finite-Elemente-Räume Q_2/Q_1 in drei Dimensionen bewiesen. □

Bemerkung 2.44. (Bezüglich des Konvektionsterms für die Finite-Elemente-Fehleranalyse)

Für die Finite-Elemente-Fehleranalyse der Navier-Stokes-Gleichungen ist ein Hauptwerkzeug, dass der Konvektionsterm verschwindet, falls seine letzten beiden Argumente identisch sind. Das Lemma 2.5 hat in dieser Hinsicht für den zeit-stetigen Fall hilfreiche Ergebnisse geliefert. Dabei wurde allerdings für die Konvektionsform angenommen, dass das Konvektionsfeld schwach divergenz-frei sei. Da im Allgemeinen $\mathbf{V}_{div}^h \not\subset \mathbf{V}_{div}$ (siehe

(John, 2016)[Remark 3.56]), wird das Finite-Elemente-Geschwindigkeitsfeld üblicherweise nicht schwach divergenz-frei sein und infolgedessen wird der Term $n_{conv}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h)$ für $\mathbf{u}^h \in \mathbf{V}_{div}^h$ und $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$ nicht verschwinden.

Im Gegensatz dazu ist es nach der Definition der skew-symmetrischen Form des Konvektionsterms offensichtlich, dass $\forall \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$

$$n_{skew}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) = 0. \quad (2.25)$$

Außerdem kann analog zum Beweis des Lemmas 2.5 gezeigt werden, dass $\forall \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$

$$n_{rot}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) = 0, \quad (2.26)$$

$$n_{div}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) = 0. \quad (2.27)$$

□

Bemerkung 2.45. (Formen des Konvektionsterms in Simulationen, vergleiche (John, 2016)[Remark 6.37])

Trotz fehlender Finite-Elemente-Fehleranalyse wird die Konvektionsform des Konvektionsterms häufig in Simulationen verwendet. Aber auch die Verwendung der anderen Formen können in Literatur gefunden werden.

In (Rockel, 2013) wurden umfassende Untersuchungen zu Vor- und Nachteilen der verschiedenen Formen des Konvektionsterms durchgeführt. Bezüglich der Genauigkeit der Ergebnisse konnten im Allgemeinen nur geringfügige Unterschiede zwischen der Verwendung der Konvektionsform, der skew-symmetrischen Form und der Divergenzform des Konvektionsterms festgestellt werden. □

2.2.3 Totale Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

Die drei lineare Gleichungssysteme (2.19), (2.20) und (2.21), die sich aus den zeitlichen Behandlungen des Konvektionsterms im Abschnitt 2.2.1.1 ergaben, werden in diesem Abschnitt mittels der Finite-Elemente-Methode mit dem inf-sup stabilen Paar der konformen Finite-Elemente-Räume für Geschwindigkeit und Druck \mathbf{V}^h/Q^h (siehe Abschnitt 2.2.2) im Raum diskretisiert:

Die **implizite** Behandlung: Seien $\mathbf{u}_n^h, \mathbf{u}_{n-1}^h \in \mathbf{V}^h$, $(\mathbf{u}_{n+1}^{(m)}, p_{n+1}^{(m)})$ gegeben, finde $(\mathbf{u}_{n+1}^h, p_{n+1}^h) \in \mathbf{V}^h \times Q^h$, sodass $\forall (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}^h \times Q^h$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)}, \mathbf{v}^h \right) + \nu \Delta t \left(\nabla \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)}, \nabla \mathbf{v}^h \right) + \Delta t n_{conv} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m)}, \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)}, \mathbf{v}^h \right) \\ & - \Delta t \left(\nabla \cdot \mathbf{v}^h, p_{n+1}^{h,(m+1)} \right) + \Delta t \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)}, q^h \right) \\ & = \left(2\mathbf{u}_n^h - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{n-1}^h, \mathbf{v}^h \right) + \Delta t \left\langle \mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v}^h \right\rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

wobei der Initialwert wie beim System (2.19) definiert ist.

Die **IMEX** Behandlung: Seien $\mathbf{u}_n^h, \mathbf{u}_{n-1}^h \in \mathbf{V}^h$, finde $(\mathbf{u}_{n+1}^h, p_{n+1}^h) \in \mathbf{V}^h \times Q^h$, sodass $\forall (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}^h \times Q^h$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} \mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{v}^h \right) + \nu \Delta t \left(\nabla \mathbf{u}_{n+1}^h, \nabla \mathbf{v}^h \right) + \Delta t n_{conv} \left(2\mathbf{u}_n^h - \mathbf{u}_{n-1}^h, \mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{v}^h \right) \\ & - \Delta t \left(\nabla \cdot \mathbf{v}^h, p_{n+1}^h \right) + \Delta t \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}^h, q^h \right) \\ & = \left(2\mathbf{u}_n^h - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{n-1}^h, \mathbf{v}^h \right) + \Delta t \left\langle \mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v}^h \right\rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die **explizite** Behandlung: Seien $\mathbf{u}_n^h, \mathbf{u}_{n-1}^h \in \mathbf{V}^h$, finde $(\mathbf{u}_{n+1}^h, p_{n+1}^h) \in \mathbf{V}^h \times Q^h$, sodass $\forall (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}^h \times Q^h$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} \mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{v}^h \right) + \nu \Delta t \left(\nabla \mathbf{u}_{n+1}^h, \nabla \mathbf{v}^h \right) - \Delta t \left(\nabla \cdot \mathbf{v}^h, p_{n+1}^h \right) + \Delta t \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}^h, q^h \right) \\ & = \left(2\mathbf{u}_n^h - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{n-1}^h, \mathbf{v}^h \right) - \Delta t n_{conv} \left(2\mathbf{u}_n^h - \mathbf{u}_{n-1}^h, 2\mathbf{u}_n^h - \mathbf{u}_{n-1}^h, \mathbf{v}^h \right) \\ & + \Delta t \left\langle \mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{v}^h \right\rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bei allen drei linearen Gleichungssysteme (2.28), (2.29), (2.30) wird angenommen, dass $\mathbf{u}^h(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0^h(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}^h$ eine Näherung von $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ ist, z. B. eine passende Interpolation (falls die Anfangsbedingung glatt genug ist) oder eine Projektion in den Finiten-Elemente-Raum und \mathbf{u}_1^h mithilfe der Finite-Elemente-Methode und des impliziten Euler-Verfahrens oder des Crank-Nicolson-Verfahrens bestimmt wird.

2.2.3.1 Matrizen-schreibweise der drei linearen Gleichungssysteme

Die Matrizen-schreibweise wird explizit für Probleme in drei Dimensionen demonstriert und ergibt sich für Probleme in zwei Dimensionen analog. Die Räume \mathbf{V}^h und Q^h werden für die Matrizen-schreibweise mit einer Basis versehen. Ein Standardansatz für die Auswahl der Basis für das Geschwindigkeitsfeld in drei Dimensionen ist

$$\mathbf{V}^h = \text{Span} \left\{ \phi_i^h \right\}_{i=1}^{3N_v} = \text{span} \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \phi_i^h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{N_v} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_i^h \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{N_v} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_i^h \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{N_v} \right\},$$

d.h., jede Basisfunktion verschwindet nur in einer einzigen Komponente nicht. N_v ist dabei die Anzahl der Unbekannten bzw. der Freiheitsgrade einer Geschwindigkeitskomponente.

Der Druckraum wird durch

$$Q^h = \text{span} \left\{ \psi_i^h \right\}_{i=1}^{N_p}$$

definiert, wobei N_p die Anzahl der Freiheitsgrade des Drucks ist.

Die **implizite** Behandlung: In Hinsicht auf die Basen gibt es die eindeutige Darstellung

$$\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} = \sum_{j=1}^{3N_v} u_{n+1,j}^{h,(m+1)} \phi_j^h, \quad p_{n+1}^{h,(m+1)} = \sum_{j=1}^{N_p} p_{n+1,j}^{h,(m+1)} \psi_j^h, \quad (2.31)$$

mit unbekanntem reellen Koeffizienten $\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} = \left(u_{n+1,j}^{h,(m+1)} \right)_{j=1}^{3N_v}$ und $\mathbf{p}_{n+1}^{h,(m+1)} = \left(p_{n+1,j}^{h,(m+1)} \right)_{j=1}^{N_p}$.

Wird (2.31) in das Gleichungssystem (2.28) eingesetzt und anschließend mit jeder Basisfunktion separat getestet, ergibt sich die untere Matrizen-schreibweise des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}M + \Delta t \begin{pmatrix} \nu A + \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N \\ \Delta t B \end{pmatrix} & \Delta t B^T \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} \\ \mathbf{p}_{n+1}^{h,(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

wobei

$$M = (m_{ij}) := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} (\phi_j^h, \phi_i^h)_K \right) \quad i, j = 1, \dots, 3N_v, \quad (2.33)$$

$$A = (a_{ij}) := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} (\nabla \phi_j^h, \nabla \phi_i^h)_K \right) \quad i, j = 1, \dots, 3N_v, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N = (n_{ij}) := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left((\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m)} \cdot \nabla) \phi_j^h, \phi_i^h \right)_K \right) \quad i, j = 1, \dots, 3N_v, \quad (2.35)$$

$$B = (b_{ij}) := \left(- \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\nabla \cdot \phi_j^h, \psi_i^h \right)_K \right) \quad i = 1, \dots, N_p, j = 1, \dots, 3N_v, \quad (2.36)$$

$$\underline{\mathbf{f}} = (f_i) := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\Delta t \mathbf{f}_{n+1} + 2\mathbf{u}_n^h - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{n-1}^h, \phi_i^h \right)_K \right) \quad i = 1, \dots, 3N_v. \quad (2.37)$$

Die Einträge m_{ij} , a_{ij} und n_{ij} verschwinden, wenn die nicht-null Komponenten von ϕ_i^h und ϕ_j^h verschieden sind, z. B. seien $\phi_j^h = (\phi_j^h, 0, 0)^T$ und $\phi_i^h = (0, \phi_i^h, 0)^T$, dann

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K \begin{pmatrix} \partial_x \phi_j^h & \partial_y \phi_j^h & \partial_z \phi_j^h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial_x \phi_i^h & \partial_y \phi_i^h & \partial_z \phi_i^h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\mathbf{x} = 0, \\ m_{ij} &= \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K \begin{pmatrix} \phi_j^h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_i^h \\ 0 \end{pmatrix} d\mathbf{x} = 0, \\ n_{ij} &= \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1,1}^{h,(m)} \partial_x \phi_j^h + \mathbf{u}_{n+1,2}^{h,(m)} \partial_y \phi_j^h + \mathbf{u}_{n+1,3}^{h,(m)} \partial_z \phi_j^h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_i^h \\ 0 \end{pmatrix} d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

wobei das Symbol $:$ für die komponentenweise Multiplikation steht.

Wenn ϕ_i^h und ϕ_j^h jedoch dieselbe nicht-null Komponente besitzen, sind die entsprechenden Matrixeinträge von M , A sowie $\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N$ unabhängig von der Komponente. Infolge der beiden Eigenschaften haben diese Matrizen die folgenden Blockformen:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 \end{pmatrix}, \quad (M_1)_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\phi_j^h, \phi_i^h \right)_K \quad i, j = 1, \dots, N_v, \quad (2.38)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad (A_1)_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\nabla \phi_j^h, \nabla \phi_i^h \right)_K \quad i, j = 1, \dots, N_v, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N_1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\left(\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N_1 \right)_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\left(\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m)} \cdot \nabla \right) \phi_j^h, \phi_i^h \right)_K \quad i, j = 1, \dots, N_v.$$

Da das $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -Innenprodukt symmetrisch ist, ist es leicht zu erkennen, dass die Matrizen M_1 und A_1 auch symmetrisch sind. Die Matrix $\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N_1$ ist hingegen nicht symmetrisch, weil

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N_1 \right)_{ij} &= \left(\mathbf{u}_{n+1,1}^{h,(m)} \partial_x \phi_j^h + \mathbf{u}_{n+1,2}^{h,(m)} \partial_y \phi_j^h + \mathbf{u}_{n+1,3}^{h,(m)} \partial_z \phi_j^h \right) \phi_i^h \\ &\neq \left(\mathbf{u}_{n+1,1}^{h,(m)} \partial_x \phi_i^h + \mathbf{u}_{n+1,2}^{h,(m)} \partial_y \phi_i^h + \mathbf{u}_{n+1,3}^{h,(m)} \partial_z \phi_i^h \right) \phi_j^h = \left(\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N_1 \right)_{ji}, \end{aligned}$$

was dazu führt, dass die Matrix $\frac{3}{2}M + \Delta t \left(\nu A + \mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N \right)$ und demzufolge die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystem (2.32) nicht symmetrisch sind, die aufgrund der Abhängigkeit der Matrix $\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)} N$ von $\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)}$ bei jeder Iteration neu berechnet werden müssen.

Die **IMEX** Behandlung: In Hinsicht auf die Basen gibt es die eindeutige Darstellung

$$\mathbf{u}_{n+1}^h = \sum_{j=1}^{3N_v} u_{n+1,j}^h \phi_j^h, \quad \mathbf{p}_{n+1}^h = \sum_{j=1}^{N_p} p_{n+1,j}^h \psi_j^h, \quad (2.40)$$

mit unbekanntem reellen Koeffizienten $\mathbf{u} = \left(u_{n+1,j}^h \right)_{j=1}^{3N_v}$ und $\mathbf{p} = \left(p_{n+1,j}^h \right)_{j=1}^{N_p}$. Wird (2.40) in das Gleichungssystem (2.29) eingesetzt und anschließend mit jeder Basisfunktion separat getestet, ergibt sich die untere Matrixschreibweise des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}M + \Delta t \left(\nu A + \mathbf{u}_{n+1}^h N \right) & \Delta t B^T \\ \Delta t B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

wobei die Matrizen M , A und B wie (2.33), (2.34) bzw. (2.36) definiert sind und

$$\mathbf{u}_{n+1}^h N = (n_{ij}) = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\left(2\mathbf{u}_n^h - \mathbf{u}_{n-1}^h \right) \cdot \nabla \right) \phi_j^h, \phi_i^h \right)_K \quad i, j = 1, \dots, 3N_v, \quad (2.42)$$

$$\underline{\mathbf{f}} = (f_i) = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\Delta t \mathbf{f}_{n+1} + 2\mathbf{u}_n^h - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{n-1}^h, \phi_i^h \right)_K \right) \quad i = 1, \dots, 3N_v. \quad (2.43)$$

Wie bei der impliziten Behandlung festgestellt wurde, sind die Matrizen M und A zwei symmetrische Blockmatrizen (2.38) bzw. (2.39). Da die beiden Eigenschaften über die Matrixeinträge von $\mathbf{u}_{n+1}^{h,(m+1)}N$ analog auf die Matrixeinträge von $\mathbf{u}_{n+1}^h N$ zu übertragen sind, hat diese Matrix die folgende nicht symmetrische Blockform

$$\mathbf{u}_{n+1}^h N = (n_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^h N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_{n+1}^h N_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_{n+1}^h N_1 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

wobei

$$\left(\mathbf{u}_{n+1}^h N_1 \right)_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\left((2\mathbf{u}_n^h - \mathbf{u}_{n-1}^h) \cdot \nabla \right) \phi_j^h, \phi_i^h \right)_K \quad i, j = 1, \dots, N_v.$$

Daher sind die Matrix $\frac{3}{2}M + \Delta t (\nu A + \mathbf{u}_{n+1}^h N)$ und folglich die Koeffizientenmatrix des Systems (2.41) nicht symmetrisch, die aufgrund der Abhängigkeit der Matrix $\mathbf{u}_{n+1}^h N$ von \mathbf{u}_{n+1}^h in jedem Zeitschritt neu berechnet werden müssen.

Die **explizite** Behandlung: In Hinsicht auf die Basen gibt es die eindeutige Darstellung

$$\mathbf{u}_{n+1}^h = \sum_{j=1}^{3N_v} u_{n+1,j}^h \phi_j^h, \quad \mathbf{p}_{n+1}^h = \sum_{j=1}^{N_p} p_{n+1,j}^h \psi_j^h, \quad (2.45)$$

mit unbekanntem reellen Koeffizienten $\underline{\mathbf{u}} = (u_{n+1,j}^h)_{j=1}^{3N_v}$ und $\underline{\mathbf{p}} = (p_{n+1,j}^h)_{j=1}^{N_p}$.

Wird (2.45) in das Gleichungssystem (2.30) eingesetzt und anschließend mit jeder Basisfunktion separat getestet, ergibt sich die untere Matrixschreibweise des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}M + \nu \Delta t A & \Delta t B^T \\ \Delta t B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{f}} \\ \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

wobei die Matrizen M , A und B wie (2.33), (2.34) bzw. (2.36) definiert sind und

$$\underline{\mathbf{f}} = (f_i) = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\Delta t \mathbf{f}_{n+1} + 2\mathbf{u}_n^h - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{n-1}^h - \left((2\mathbf{u}_n^h - \mathbf{u}_{n-1}^h) \cdot \nabla \right) (2\mathbf{u}_n^h - \mathbf{u}_{n-1}^h), \phi_i^h \right)_K \right) \quad i = 1, \dots, 3N_v. \quad (2.47)$$

Wie bei der impliziten Behandlung festgestellt wurde, sind die Matrizen M und A zwei symmetrische Blockmatrizen (2.38) bzw. (2.39). Daher sind die Matrix $\frac{3}{2}M + \nu\Delta tA$ und demzufolge die Koeffizientenmatrix konstant und symmetrisch.

Bemerkung 2.46. (Vergleich der zeitlichen Behandlungen)

Bei der impliziten Behandlung wird in jedem Zeitschritt ein nichtlineares Gleichungssystem mittels einer Picard-Iteration (in dieser Arbeit) approximiert und bei jeder Iteration der Picard-Iteration ist ein lineares Gleichungssystem wie (2.32) neu aufzustellen und zu lösen. Somit müssen bei der impliziten Behandlung in jedem Zeitschritt mehrere lineare Gleichungssysteme gelöst werden, je nachdem wie viele Iterationen der Picard-Iteration durchgeführt werden. Im Vergleich dazu wird bei der IMEX Behandlung in jedem Zeitschritt nur ein lineares Gleichungssystem wie (2.41) aufgestellt und gelöst. Wie in Abschnitt 2.2.1.1 erklärt wurde, werden die implizite und die IMEX Behandlung äquivalent sein, falls bei der impliziten Behandlung ausschließlich eine einzige Iteration der Picard-Iteration durchgeführt wird. Bei der expliziten Behandlung ist zwar auch in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem wie (2.46) zu lösen, aber das Gleichungssystem muss nur einmal für die gesamte Simulation aufgestellt werden, weil die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystem konstant (und symmetrisch) ist. \square

Bemerkung 2.47. (Löser für die oberen linearen Gleichungssysteme)

Die Koeffizientenmatrizen der linearen Gleichungssysteme (2.32), (2.41) und (2.46) sind dünn-besetzt, weil diese aus dünn-besetzten Blockmatrizen bestehen. Daher bieten sich beispielsweise die sogenannten dünn-besetzten direkten Löser oder die Krylov-Unterraum-Verfahren für das Lösen dieser linearen Gleichungssysteme an.

Bei der expliziten Behandlung könnten die dünn-besetzten direkten Löser eine attraktive Wahl sein, denn die Koeffizientenmatrix wird durch solche Löser einmalig am Anfang der Simulation zerlegt, was viel Zeit in Anspruch nimmt, jedoch müssen anschließend in jedem Zeitschritt nur noch Systeme mit Dreiecksmatrizen gelöst werden, welche einen geringen Zeitaufwand haben. Dadurch könnte mehr Schnelligkeit im Vergleich zu einer iterativen Löser für die explizite Behandlung erzielt werden.

Aus (John, 2016)[Remark 9.5]) und ausführlichen Untersuchungen in (Ahmed et al., 2018) ist bekannt, dass die dünn-besetzten direkten Löser besonders effizient für zweidimensionale Probleme und Probleme mit weniger als einer halben Million Freiheitsgeraden sind. Für dreidimensionale Probleme neigen sie jedoch dazu, ineffizient zu werden. Das ergibt sich aus der unterschiedlichen dünn-besetzten Struktur der Matrizen für die Diskretisierung von zwei- und dreidimensionalen Problemen. Ein interner Freiheitsgrad in drei Dimensionen besitzt in der Regel mehr Nachbarn als in zwei Dimensionen, sodass es mehr Matrixeinträge gibt und die Matrizen weniger dünn-besetzt sind. Die dünn-besetzten direkten Löser versuchen, eine Faktorisierung der Matrizen mit wenig Lückenfüllung⁶ zu

⁶auf Englisch fill-in

berechnen, welche bei Matrizen mit sehr dünn-besetzter Struktur einfacher ist. Direkte Löser nutzen Situationen nicht aus, in denen bereits eine gute Annäherung der Lösung bekannt ist. Diese Situation tritt insbesondere bei Problemen auf, die mit nicht zu großen Zeitschrittweiten diskretisiert wurden, wobei die Lösung aus der vorherigen diskreten Zeit oder eine gewisse Extrapolation von Lösungen aus früheren Zeiten normalerweise eine gute Annäherung an die Lösung der aktuellen Zeit ergibt. \square

Kapitel 3

Numerische Benchmarks

In diesem Kapitel werden die drei zeitlichen Behandlungen des Kovvektionsterms für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen anhand von jeweils einem Benchmark-Problem in zwei und drei Dimensionen untersucht. Die numerischen Simulationen wurden mit dem Programmpaket ParMoon, siehe (Ganesan et al., 2016) und (Wilbrandt et al., 2016), durchgeführt. Wie bereits im vorherigen Kapitel angekündigt wurde, werden in dieser Arbeit für die räumliche Diskretisierung die Finite-Elemente-Methode und für die zeitliche Diskretisierung das BDF2-Verfahren mit dem impliziten Euler-Verfahren für den ersten Zeitschritt angewendet. Die Konvektionsform des Konvektionsterms wird für die numerische Untersuchung verwendet.

Für das Lösen der drei linearen Gleichungssysteme (2.32), (2.41) und (2.46) wird als iterativer Löser das FGMRES-Verfahren verwendet, siehe (Saad, 1993). Zur Beschleunigung der Konvergenzgeschwindigkeit wird das FGMRES-Verfahren mit dem Vorkonditionierer LSC¹ ausgestattet, siehe (Elman et al., 2006). Für die Systeme (2.46) und (2.41) wird darüber hinaus das sogenannte UMFPACK-Verfahren als dünn-besetzter direkter Löser zum Einsatz genommen, siehe (Davis, 2004).

Es ist zu beachten, dass in diesem Kapitel gelegentlich folgende Abkürzungen benutzt werden:

- zeit. B. : zeitliche Behandlung
- IM : implizite Behandlung
- IMEX : IMEX Behandlung
- EX : explizite Behandlung

¹auf Englisch least-squares commutator

3.1 Strömung um einen Zylinder in 2D mit $Re \in [0, 100]$

3.1.1 Problembeschreibung

Das ist ein 2D-Benchmark-Problem für die instationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen und beschreibt die Entwicklung sowie die Rückentwicklung einer sogenannten Kármánschen Wirbelstraße in einem zweidimensionalen Gebiet Ω um einen zweidimensionalen Zylinder (Kreis), siehe Abbildung 3.1, und wurde erstmals in (Schäfer and Turek, 1996) vorgestellt und in (John, 2016)[Example D.9] behandelt.

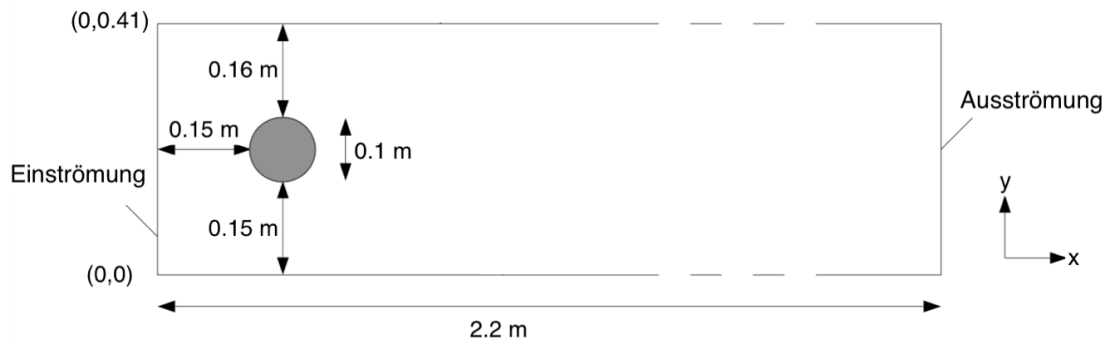


ABBILDUNG 3.1: Skizze des Gebiets Ω

Die dynamische Viskosität des Fluides und dessen Dichte sind $\mu = 10^{-3}$ Pa s bzw. $\rho = 1$ kg/m³, welche ungefähr den Werten von Wasser entsprechen.

Die Ein- und Ausströmung sind vorgegeben durch

$$\mathbf{v}(0 \text{ m}, y) = \mathbf{v}(2.2 \text{ m}, y) = \sin\left(\frac{\phi t}{8}\right) \frac{1}{0.41^2} \begin{pmatrix} 6y(0.41 - y) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s}, \quad (3.1)$$

wobei $y \in [0, 0.41]$ m, $t \in [0, 8]$ s und die Frequenz $\phi = \pi$ 1/s. Am oberen und unteren Rand des Gebietes Ω sowie am Rand des Zylinders (Γ_{zyl}) wird außerdem die Erfüllung der Haftbedingung angenommen.

Für die mittlere Ein- und Ausströmung gilt

$$U_{\text{mittlere}}(t) = \sin\left(\frac{\phi t}{8}\right) \frac{1}{0.41^2} \frac{\int_0^{0.41} 6y(0.41 - y) dy}{\int_0^{0.41} dy} \text{ m/s} = \sin\left(\frac{\phi t}{8}\right) \text{ m/s}, \quad (3.2)$$

wobei $y \in [0, 0.41]$ m, $t \in [0, 8]$ s.

Unter Berücksichtigung des Zylinderdurchmessers $d = 0.1$ m, der mittleren Einströmung und der kinematischen Viskosität $\frac{\mu}{\rho} = 10^{-3}$ m²/s ergibt sich für die zeit-abhängige

Reynolds-Zahl der Strömung

$$0 \leq Re(t) = \frac{U_{\text{mittlere}}(t)d}{\frac{\mu}{\rho}} \leq 100.$$

Die Anfangsbedingung wird durch $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ m/s festgelegt und es wird davon ausgegangen, dass keine äußere Kraft auf die Strömung wirkt, d.h. $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ N/m³.

In der Anwendung sind bei Strömungen um einen Körper der Strömungswiderstand², der auf den Körper in die Hauptströmungsrichtung wirkt, und der dynamische Auftrieb³, der auf den Körper senkrecht zur Hauptströmungsrichtung wirkt, von Interesse.

Bemerkung 3.1. (Strömungswiderstand und Auftrieb in 2D)

In der Literatur gibt es unterschiedliche Formulierungen für diese Kräfte. Diese Arbeit orientiert sich an (John, 2016)[Remark D.2]. Seien die charakteristischen Skalen L m für die Länge, U m/s für die Geschwindigkeit, dann ist der dimensionslose Strömungswiderstand gegeben durch

$$F_{\text{wid}}(t) = -\rho U^2 L \left[(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{wid}}) + (\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w}_{\text{wid}}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathbf{w}_{\text{wid}}) - (\nabla \cdot \mathbf{w}_{\text{wid}}, p) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_{\text{wid}} \rangle_{(\mathbf{H}^1(\Omega))', \mathbf{H}^1(\Omega)} \right], \quad (3.3)$$

wobei \mathbf{w}_{wid} die Hauptströmungsrichtung beschreibt.

Seien V ein Maß für die Geschwindigkeit des Fluides relativ zum Hindernis und A ein Referenzbereich, dann wird mithilfe dieser Kraft ein dimensionsloser Koeffizient, der sogenannte Widerstandsbeiwert, durch

$$c_{\text{wid}}(t) = \frac{2F_{\text{wid}}}{\rho AV^2} \quad (3.4)$$

definiert. Der Ausdruck $\rho V^2/2$ wird dabei dynamischer Druck genannt.

Der dimensionslose Auftrieb ist durch

$$F_{\text{auf}}(t) = -\rho U^2 L \left[(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{auf}}) + (\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w}_{\text{auf}}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathbf{w}_{\text{auf}}) - (\nabla \cdot \mathbf{w}_{\text{auf}}, p) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_{\text{auf}} \rangle_{(\mathbf{H}^1(\Omega))', \mathbf{H}^1(\Omega)} \right] \quad (3.5)$$

definiert, wobei \mathbf{w}_{auf} die senkrechte Richtung beschreibt. (Sei die Hauptströmungsrichtung $\mathbf{w}_{\text{wid}} = (w_1, w_2)^T$ gegeben, dann wird die senkrechte Richtung durch $\mathbf{w}_{\text{auf}} = (-w_2, w_1)^T$ festgelegt.)

Basierend auf dieser Kraft wird ebenso ein dimensionsloser Koeffizient, der sogenannte Auftriebsbeiwert, durch

$$c_{\text{auf}}(t) = \frac{2F_{\text{auf}}}{\rho AV^2} \quad (3.6)$$

²auf Englisch drag force

³auf Englisch lift force

definiert. □

Mit den charakteristischen Skalen $L = 1$ m für die Länge, $U = 1$ m/s für die Geschwindigkeit, sowie $T' = 1$ s für die Zeit ergeben sich die dimensionslosen instationären Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) mit

$$\nu = \frac{\mu}{\rho UL} = 10^{-3}, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{v}(0, y) = \mathbf{v}(2.2, y) = \sin\left(\frac{\phi t}{8}\right) \frac{1}{0.41^2} \begin{pmatrix} 6y(0.41 - y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \in [0, 0.41], t \in [0, 8].$$

Für dieses Benchmark-Problem sind die Hauptströmungsrichtung $\mathbf{w}_{wid} = (1, 0)^T$, die senkrechte Richtung $\mathbf{w}_{auf} = (0, 1)^T$ und der Referenzbereich $A = d = 0.1$ m. Darüber hinaus wird $V = U_{mittlere}(4s) = 1$ m/s angenommen und dementsprechend gilt $\forall \mathbf{w}_{wid} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ mit $\mathbf{w}_{wid} = \mathbf{0}$ auf $\Gamma \setminus \Gamma_{zyl}$ und $\mathbf{w}_{wid}|_{\Gamma_{zyl}} = (1, 0)^T$

$$c_{wid}(t) = -20((\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{w}_{wid}) + (\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w}_{wid}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathbf{w}_{wid}) - (\nabla \cdot \mathbf{w}_{wid}, p)) \quad (3.7)$$

und $\forall \mathbf{w}_{auf} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ mit $\mathbf{w}_{auf} = \mathbf{0}$ auf $\Gamma \setminus \Gamma_{zyl}$ und $\mathbf{w}_{auf}|_{\Gamma_{zyl}} = (0, 1)^T$

$$c_{auf}(t) = -20((\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{w}_{auf}) + (\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w}_{auf}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathbf{w}_{auf}) - (\nabla \cdot \mathbf{w}_{auf}, p)). \quad (3.8)$$

Für die Approximation der ersten Terme in (3.7) und (3.8) wird eine Rückwärtsdifferenz angewendet, d.h.

$$(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{w}_{wid}) \approx \frac{1}{\Delta t} ((\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n), \mathbf{w}_{wid}),$$

$$(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{w}_{auf}) \approx \frac{1}{\Delta t} ((\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n), \mathbf{w}_{auf}).$$

Des Weiteren ist die dimensionslose Druckdifferenz zwischen der Vorder- und der Rückseite des Zylinders

$$\Delta p(t) = p(t, (0.15, 0.2)) - p(t, (0.25, 0.2)) \quad (3.9)$$

von Interesse.

Für die interessierenden Größen wurden akkurate Referenzkurven in (John and Rang, 2010) berechnet, siehe Abbildung 3.2. Die ausgewählten Referenzwerte werden in der Tabelle 3.2 angegeben.

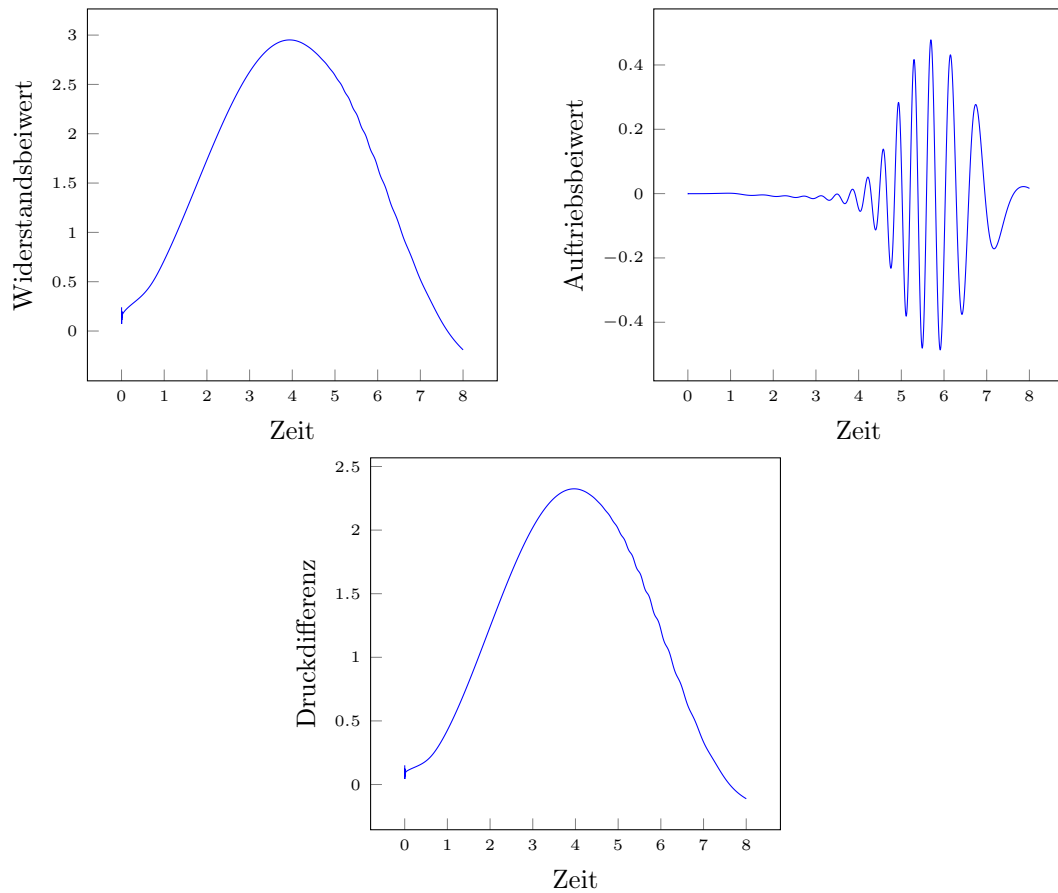


ABBILDUNG 3.2: Referenzkurven aus (John and Rang, 2010)

TABELLE 3.2: ausgewählte Referenzwerte aus (John and Rang, 2010)

Koeffizient	Wert	Zeit
$c_{wid,max}^{ref}(t)$	2.950918381	3.93625
$c_{auf,max}^{ref}(t)$	0.47787543	5.69250
$\Delta p^{ref}(8)$	-0.11161567	

3.1.2 Simulationseinstellungen

Für dieses Benchmark-Problem wird das inf-sup stabile Paar der konformen Finite-Elemente-Räume P_2/P_1 auf einem Dreiecksgitter genommen, siehe Kapitel 2.2.2. Das Gitter in Abbildung 3.3 wurde als Ausgangsgitter (Stufe 0) verwendet und für die höheren Stufen jeweils uniform verfeinert. Die Tabelle 3.3 zeigt die Freiheitsgrade je Verfeinerungsstufe. Die Simulationen wurden auf diesen Gittern jeweils für drei Zeitschrittweiten

$$\Delta t = 0.01, \quad \Delta t = 0.001 \quad \text{und} \quad \Delta t = 0.0001$$

durchgeführt, mit der Ausnahme, dass aufgrund des hohen Zeitaufwands der Simulationen auf dem feinsten Gitter (Stufe 4) für die kleinste Zeitschrittweite ($\Delta t = 0.0001$) nur die Simulation mit EX+UMFPACK durchgeführt wurde.

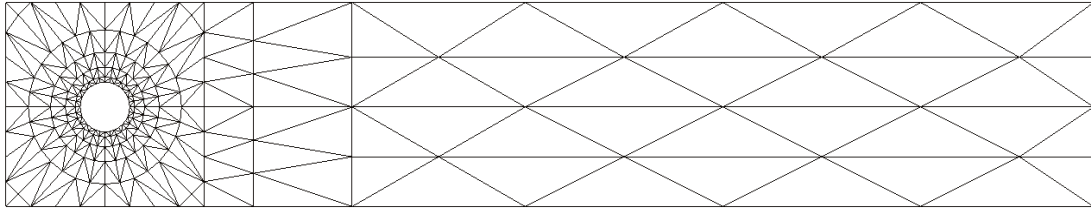


ABBILDUNG 3.3: Ausgangsgitter (Stufe 0)

TABELLE 3.3: Freiheitsgrade je Verfeinerungsstufe des Ausgangsgitters

Stufe	Freiheitsgrade		
	Geschwindigkeit	Druck	gesamt
2	25408	3248	28656
3	100480	12704	113184
4	399616	50240	449856

Die Picard-Iteration wurde in jedem Zeitschritt abgebrochen, falls die maximale Anzahl der Iterationen von 500 oder die euklidische Norm des Residuenvektors von 10^{-8} erreicht wurde.

Das FGMRES-Verfahren wurde nach 100 Iterationen neu gestartet und als Abbruchkriterien für dieses Verfahren wurden die maximale Anzahl der Iterationen auf 1000 und die euklidische Norm des Residuenvektors auf 10^{-9} eingestellt.

Für den Vorkonditionierer LSC wurde das UMFPACK-Verfahren als direkter Löser verwendet. Es ist zu bemerken, dass die derzeitige Implementierung von LSC in ParMooN die gute Eigenschaft der Koeffizientenmatrix bei der expliziten Behandlung nicht ausnutzt, was zur Verlangsamung dieses Vorkonditionierers und letztendlich solcher Simulationen führt.

Sowohl bei der Picard-Iteration als auch beim FGMRES-Verfahren soll die eingestellte maximale Anzahl der Iterationen nur als Warnzeichen dienen, dass eine Simulation nicht die vorgegebenen Genauigkeiten erreicht hat und ggf. Handlungsbedarf besteht. Bei hier durchgeführten Simulationen traten solche Fälle nicht auf, d.h., stets wurde die euklidische Norm des Residuenvektors erreicht und nicht die maximale Anzahl der Iterationen.

3.1.3 Ergebnisse und Auswertung

Die Simulationen mit der expliziten Behandlung divergieren auf allen Gittern für die Zeitschrittweiten $\Delta t = 0.01$ und $\Delta t = 0.001$.

Die Genauigkeit der Simulationen wird gemäß der ausgewählten Referenzwerte aus der Tabelle 3.2 gemessen. Für den Widerstands- und Auftriebsbeiwert wird der euklidische Abstand zum Referenzwert (in der Beiwert–Zeit–Ebene) verwendet, d.h., seien $(t_{wid,max}, c_{wid,max})$ und $(t_{auf,max}, c_{auf,max})$ die Werte von einer Simulation, dann

$$\begin{aligned} \text{Fehler}_{wid}^{ref} &:= \sqrt{\left(t_{wid,max}^{ref} - t_{wid,max}\right)^2 + \left(c_{wid,max}^{ref} - c_{wid,max}\right)^2}, \\ \text{Fehler}_{auf}^{ref} &:= \sqrt{\left(t_{auf,max}^{ref} - t_{auf,max}\right)^2 + \left(c_{auf,max}^{ref} - c_{auf,max}\right)^2}. \end{aligned}$$

Für die Druckdifferenz wird der Abstand zum Referenzwert verwendet, d.h., sei $\Delta p(8)$ der Wert von einer Simulation, dann

$$\text{Fehler}_{\Delta p(8)}^{ref} = \left| \Delta p^{ref}(8) - \Delta p(8) \right|.$$

Die Effizienz der Simulationen wird in Rechenzeit⁴ gemessen, da diese das wichtigste Kriterium bei Anwendungen ist und aufgrund der Verwendung des UMFPACK-Verfahrens für manche Simulationen kein anderer Vergleichsparameter infrage kommt. Es muss betont werden, dass die Rechenzeit von der Implementierung der Methoden abhängt. Das verwendete Programmpaket ParMoon ist ein flexibler Forschungscode, der nicht auf das Lösen einer bestimmten Klasse von Problemen oder die Verwendung einer bestimmten Methode zugeschnitten ist. Damit die Rechenzeiten einen fairen Vergleich ergeben, wurden die Simulationen zwei mal durchgeführt und der Mittelwert der beiden Rechenzeiten wurde als die Rechenzeit der jeweilige Simulation genommen.

Die Auswertung der Simulationen bezüglich der oben definierten Fehler bzw. der Rechenzeit sind im Anhang A.1 dargestellt. Die Simulationen mit der expliziten Behandlung füllen ausschließlich den unteren Bereich in den Auswertungstabellen A.1 und A.2 aus und nur in der Auswertungstabelle A.3 weisen sie nicht die ungenauesten Ergebnisse vor. Da die Werte der in Abbildung 3.2 dargestellten Referenzkurven für diese Arbeit zur Verfügung gestellt wurden, gab es die Möglichkeit für alle Zeitschritte die Fehler der Simulationen zu den Referenzkurven auszurechnen, um eine genaue Aussage treffen zu können. Die entsprechenden Fehler sind in folgenden Abbildungen 3.4, 3.5 und 3.6 zu sehen.

⁴CPU-Zeit

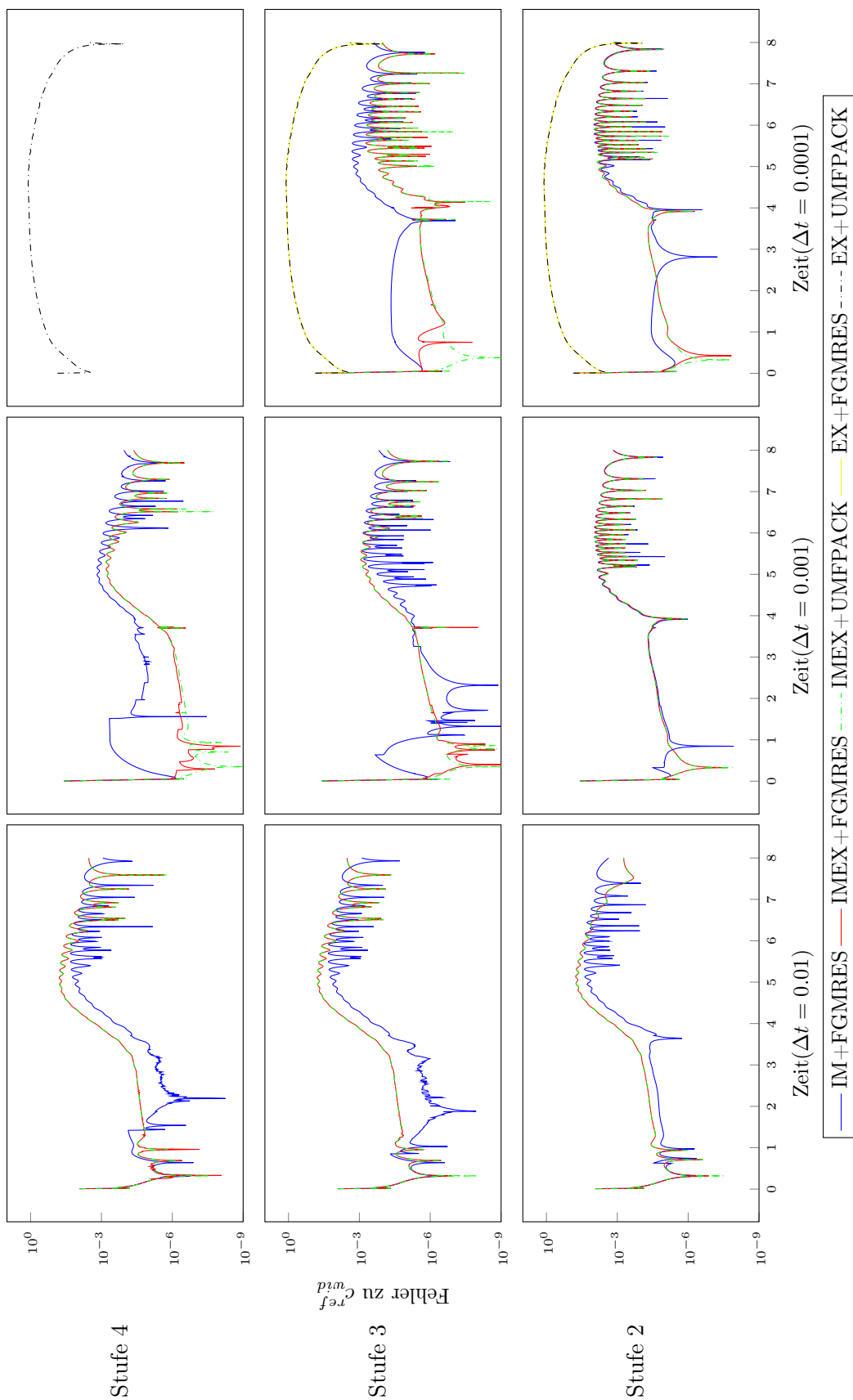


ABBILDUNG 3.4: Fehler zur Referenzkurve des Widerstandsbeitrages

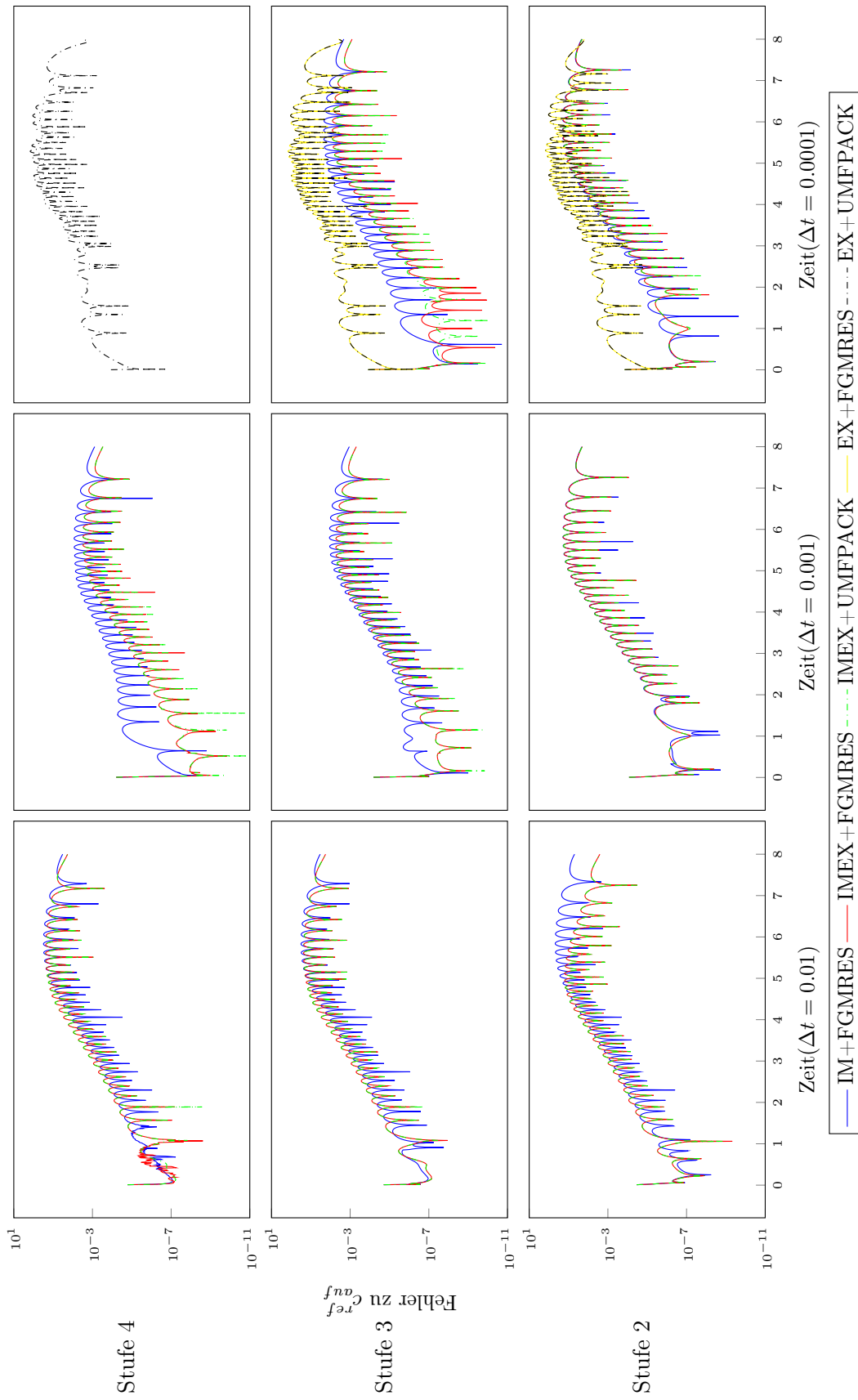


ABBILDUNG 3.5: Fehler zur Referenzkurve des Auftriebsbeiwertes

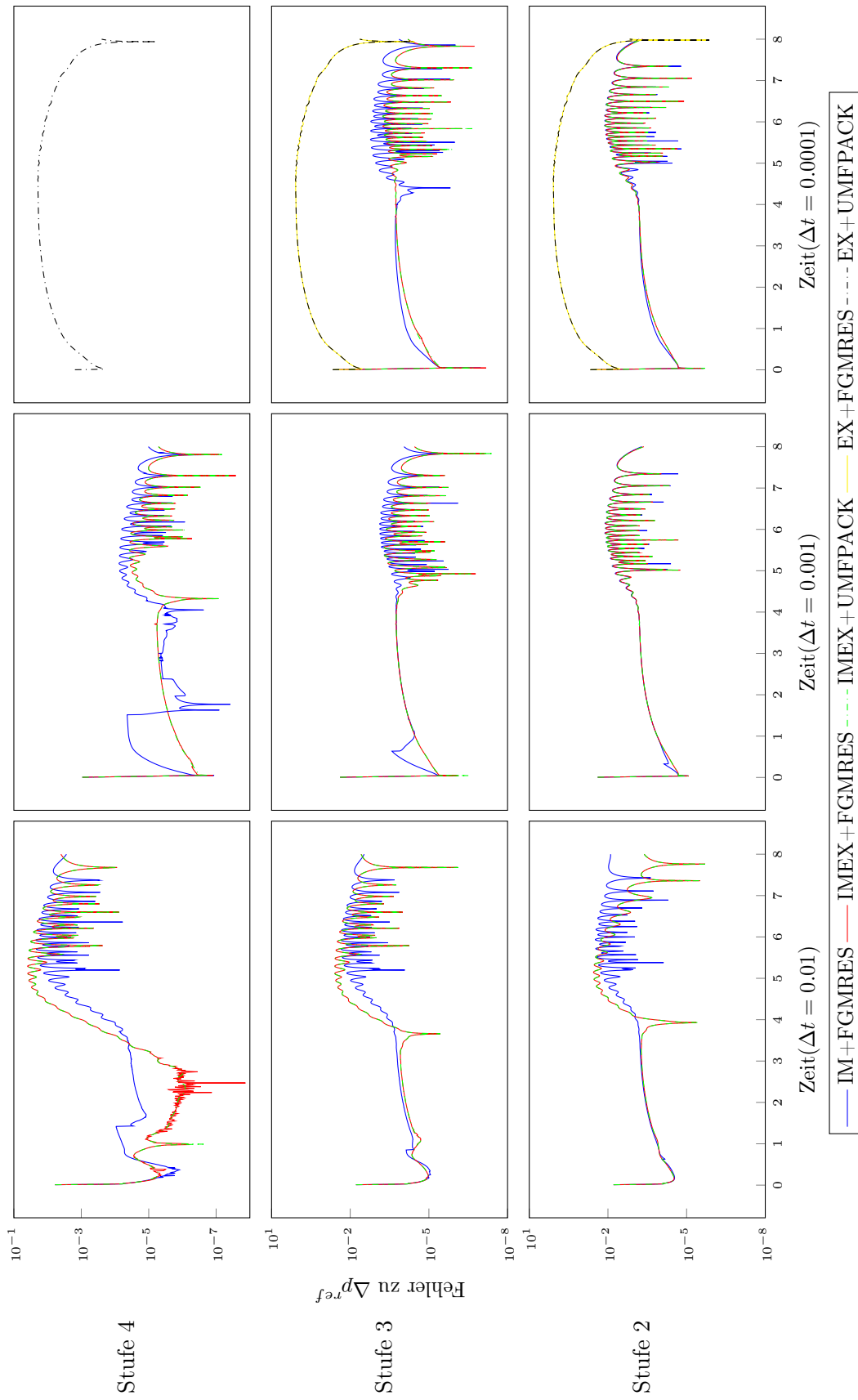


ABBILDUNG 3.6: Fehler zur Referenzkurve der Druckdifferenz

In Anbetracht oberer Abbildungen wird ohne weiteres klar, dass die explizite Behandlung bezüglich Fehler $_{\Delta p(8)}^{ref}$ nur sozusagen einen Glückstreffer hatte. Es kann nun für die explizite Behandlung festgehalten werden, dass die Fehler um Größenordnungen höher sind und der Diskretisierungsfehler in der Zeit den Diskretisierungsfehler im Raum dominiert, weshalb sich die Fehler auf feineren Gittern nicht verringern.

Bei der Auswertungstabelle A.8 ist außerdem bezüglich der Rechenzeit festzustellen, dass auf jedem Gitter vor jeder Simulation mit der expliziten Behandlung mehrere Simulationen mit der impliziten oder der IMEX Behandlung stehen. Aus den beiden Punkten lässt sich schließen, dass es auf jedem Gitter schnellere sowie genauere Simulationen mit der impliziten oder der IMEX Behandlung als alle Simulationen mit der expliziten Behandlung gibt. Die Simulationen mit der expliziten Behandlung werden deshalb für die weiteren Analysen der Ergebnisse nicht mehr betrachtet.

In Abbildung 3.8 werden die Fehler aus Auswertungstabellen A.1, A.2 und A.3 gegen die Rechenzeiten für die anderen Simulationen dargestellt.

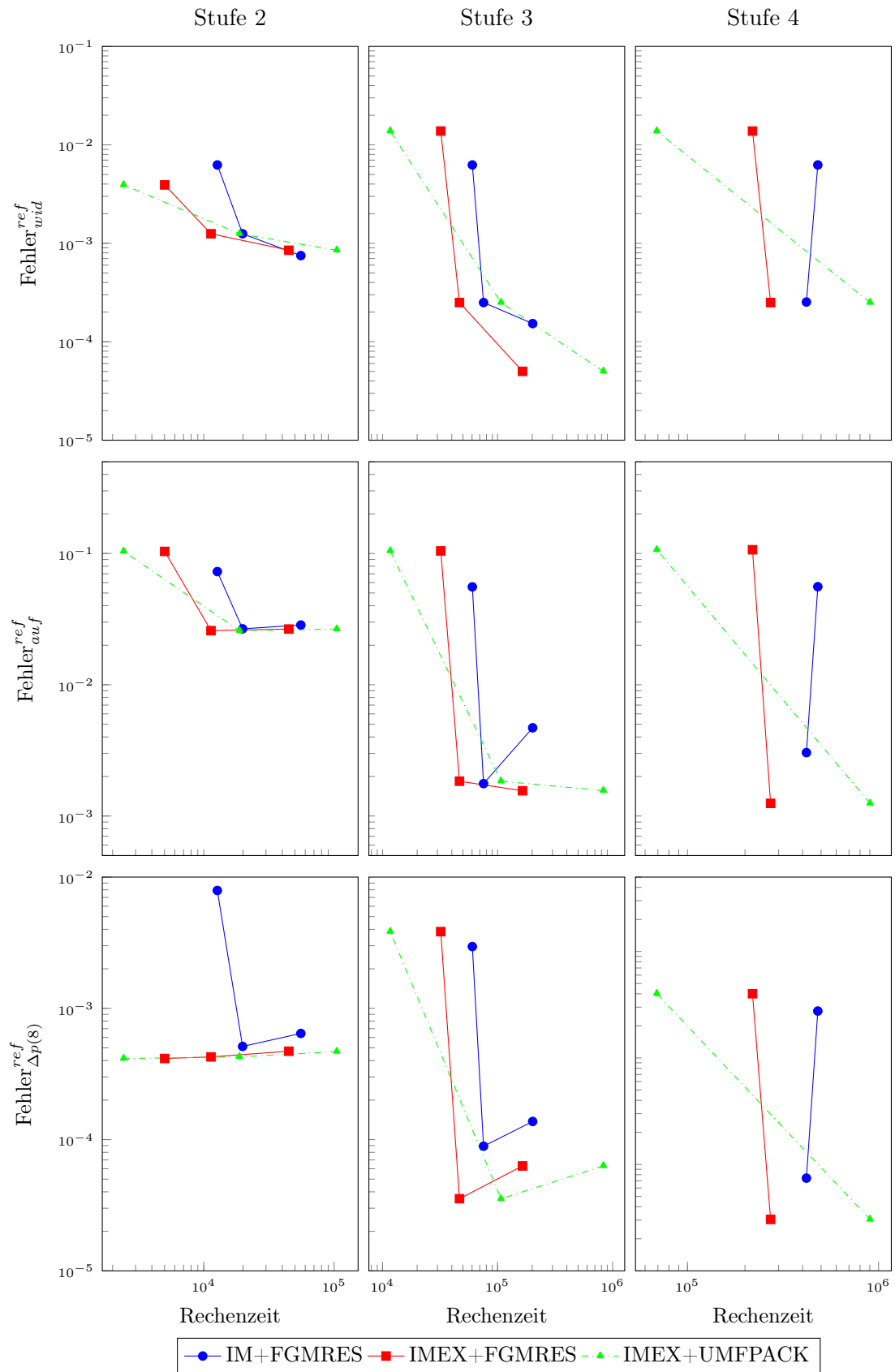


ABBILDUNG 3.7: Rechenzeiten gegen die ausgewählten Fehler für jede Verfeinerungsstufe (Die Punkte mit einer bestimmten Farbe von links nach rechts stellen die Simulationen für die kleinste Zeitschrittweite ($\Delta t = 0.01$) bis zu Simulationen für die größte Zeitschrittweite ($\Delta t = 0.0001$) dar.)

Aus Auswertungstabellen im Anhang A.1 und angesichts der Abbildungen 3.4, 3.5, 3.6 und 3.7 lässt sich folgendes festhalten:

IMEX+UMFPACK hat fast dieselbe Genauigkeit wie IMEX+FGMRES und ist auf allen Gittern für die größte Zeitschrittweite durchschnittlich etwa 2.7 mal schneller als IMEX+FGMRES und etwa 5.8 mal schneller als IM+FGMRES, aber wird für kleinere Zeitschrittweiten immer zeitaufwändiger und daher unpraktischer. Der Zeitaufwand zwischen zwei Zeitschrittweiten ist außerdem proportional der Verfeinerung der Gitter. Von einer Seite ist die Erklärung für dieses Verhalten, dass das UMFPACK-Verfahren in jedem Zeitschritt eine kostspielige Matrixzerlegung durchzuführen hat und die Größe der Matrix mit der Anzahl der Freiheitsgrade wächst, siehe Koeffizientenmatrix des Systems (2.41). Von der anderen Seite nutzt das UMFPACK-Verfahren im Gegenteil zum FGMRES-Verfahren die aus früheren Zeiten vorhandene gute Annäherung nicht aus, siehe Bemerkung 2.47.

IMEX+FGMRES schneidet auf allen Gitter für jede Zeitschrittweite aufgrund ihrer Schnelligkeit (durchschnittlich etwa 1.8 mal) sowie ihrer vergleichbaren Genauigkeit besser als IM+FGMRES ab.

IMEX+FGMRES kann weiterhin mit einem geringeren Zeitaufwand für eine kleinere Zeitschrittweite als die von IM+FGMRES durchgeführt werden, um genauere Ergebnisse zu erhalten. Es ist zu bemerken, dass in manchen Fällen IMEX+FGMRES sogar überraschenderweise eine bessere Genauigkeit als IM+FGMRES vorweist.

3.2 Exponentiell abnehmende Strömungen in 3D, Beltrami-Strömungen

3.2.1 Problembeschreibung

Das ist ein dreidimensionales Benchmark-Problem mit analytischer Lösung für die instationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Dabei werden die Geschwindigkeits- und Druckfelder

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\alpha \exp(-\nu\gamma^2 t) \begin{pmatrix} \exp(\alpha x) \sin(\alpha y \pm \gamma z) + \exp(\alpha z) \sin(\alpha x \pm \gamma y) \\ \exp(\alpha y) \sin(\alpha z \pm \gamma x) + \exp(\alpha x) \sin(\alpha y \pm \gamma z) \\ \exp(\alpha z) \sin(\alpha x \pm \gamma y) + \exp(\alpha y) \sin(\alpha z \pm \gamma x) \end{pmatrix}, \\ p &= -\frac{\alpha^2}{2} \exp(-2\nu\gamma^2 t) \left[\exp(2\alpha x) + \exp(2\alpha y) + \exp(2\alpha z) \right. \\ &\quad + 2 \sin(\alpha x \pm \gamma y) \cos(\alpha z \pm \gamma x) \exp(\alpha(y+z)) \\ &\quad + 2 \sin(\alpha y \pm \gamma z) \cos(\alpha x \pm \gamma y) \exp(\alpha(z+x)) \\ &\quad \left. + 2 \sin(\alpha z \pm \gamma x) \cos(\alpha y \pm \gamma z) \exp(\alpha(x+y)) \right] + C, \end{aligned} \quad (3.10)$$

für beliebige $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ betrachtet. Die Familie der Geschwindigkeits- und Druckfelder (3.10) wurde basierend auf die folgenden Prinzipien in (Ethier and Steinman, 1994) hergeleitet:

- Die Geschwindigkeit muss divergenz-frei sein, d.h. $\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- Die zeitliche Ableitung muss den Viskositätsterm ausgleichen, d.h. $\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
- Der Konvektionsterm kann durch den Gradienten einer Skalarfunktion ausgedrückt werden, welcher das Negative vom Gradienten des Drucks ist, d.h. $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}$.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Die Strömungen, die die Eigenschaft (3.11) erfüllen, werden Beltrami-Strömungen genannt.

Wenn die Geschwindigkeits- und Druckfelder (3.10) in die Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) eingesetzt werden, ergibt sich mit direkter Berechnung, dass $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

In dieser Arbeit wird die Strömung (3.10) mit der Viskosität $\nu = 10^{-1}$ auf dem Gebiet $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \times (0, 2)$ für $t \in [0, T = 1]$ mit der Dirichlet-Randbedingungen an $\partial\Omega$ betrachtet, wobei $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ausgewählt wurden und C aufgrund der am gesamten Rand festgelegten Dirichlet-Randbedingung so zu bestimmen ist, dass das

Integral von p in jedem Zeitschritt verschwindet, siehe Abschnitt 2.1.1, d.h.

$$C = -\frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^2 p \, dx \, dy \, dz}{8} \quad t \in [0, 1].$$

Es ist zu beachten, dass C eine Konstante bezüglich der Raumkomponenten, aber eine Funktion in Abhängigkeit von t ist.

3.2.2 Simulationseinstellungen

Für dieses Benchmark-Problem wird das inf-sup stabile Paar der konformen Finite-Elemente-Räume Q_2/Q_1 auf einem Würfelgitter genommen, siehe Kapitel 2.2.2. Als Ausgangsgitter (Stufe 0) wurde ein einziger Würfel verwendet, der für die höheren Stufen jeweils uniform verfeinert wurde. Die Tabelle 3.4 zeigt die Gitterweite und die Freiheitsgrade je Verfeinerungsstufe. Die Simulationen wurden auf diesen Gittern jeweils für drei Zeitschrittweiten

$$\Delta t = 0.1, \quad \Delta t = 0.01 \quad \text{und} \quad \Delta t = 0.005$$

durchgeführt, ausgenommen von Simulationen mit dem UMFPACK-Verfahren auf dem feinsten Gitter (Stufe 5). Der Grund für diese Entscheidung ist die Tatsache, dass das UMFPACK-Verfahren einen hohen Arbeitsspeicherbedarf hat, welcher sich aufgrund der großen Anzahl der Freiheitsgrade auf den feinen Gittern besonders zeigt, siehe Bemerkung 2.47. Der Arbeitsspeicherbedarf auf dem Gitter der Stufe 5 lag je Simulation bei etwa 250 GB und deshalb wurde auf die Durchführung solcher Simulationen verzichtet.

TABELLE 3.4: Gitterweite und Freiheitsgrade je Verfeinerungsstufe des Ausgangsgitters

Stufe	Gitterweite	Freiheitsgrade		
		Geschwindigkeit	Druck	gesamt
3	0.433013	14739	729	15468
4	0.216506	107811	4913	112724
5	0.108253	823875	35937	859812

Die Picard-Iteration wurde in jedem Zeitschritt abgebrochen, falls die maximale Anzahl der Iterationen von 500 oder die euklidische Norm des Residuenvektors von 10^{-7} erreicht wurde, oder falls die euklidische Norm des Residuenvektors nicht kleiner als die der letzten zehn Iterationen geworden ist.

Das FGMRES-Verfahren wurde nach 100 Iterationen neu gestartet und als Abbruchkriterien für dieses Verfahren wurden die maximale Anzahl der Iterationen auf 1000 und

die euklidische Norm des Residuenvektors auf 10^{-8} eingestellt.

Für den Vorkonditionerer LSC wurde das FGMRES-Verfahren, welches wiederum mit dem Vorkonditionerer SSOR ausgestattet wurde, verwendet, wobei die euklidische Norm des Residuenvektors von 10^{-9} und die maximale Anzahl der Iterationen von 200 als Abbruchkriterien dienten. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird dieses Verfahren als das innere FGMRES-Verfahren bezeichnet.

Wie gewünscht, wurde die eingestellte maximale Anzahl der Iterationen weder bei der Picard-Iteration noch bei den äußeren und inneren FGMRES-Verfahren erreicht, d.h., stets wurde die euklidische Norm des Residuenvektors erreicht.

3.2.3 Ergebnisse und Auswertung

Die Simulationen mit der expliziten Behandlung divergieren auf allen Gittern für die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.1$. Auf dem feinsten Gitter (Stufe 5) divergiert sogar die Simulation mit der expliziten Behandlung für die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.01$.

Die Genauigkeit der Simulationen wird mithilfe der Fehler $\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)(T)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\mathbf{L}^2(0,T;H^1(\Omega))}$ und $\|p - p^h\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}$ gemessen, die von dem Programmpaket ParMooN ausgerechnet werden.

Die Effizienz der Simulationen wird hier ebenfalls in Rechenzeit gemessen. Der Grund für diese Wahl kann bei der Auswertung des zweidimensionalen Benchmark-Problems gelesen werden. Damit die Rechenzeiten einen fairen Vergleich ergeben, wurden die Simulationen auch hier zwei mal durchgeführt und der Mittelwert der beiden Rechenzeiten wurde als die Rechenzeit der jeweiligen Simulation genommen.

Die Auswertungstabellen der Simulationen bezüglich der Fehler bzw. der Rechenzeit sind im Anhang A.2 dargestellt. Wenn die Auswertungstabellen A.5, A.6 und A.7 betrachtet werden, fällt es sofort auf, dass die Simulationen mit der expliziten Behandlung ausnahmslos die ungenauesten Ergebnisse geliefert haben und deren Fehler um Größenordnungen höher sind. Darüber hinaus kann bei der Auswertungstabelle A.8 bezüglich der Rechenzeit festgestellt werden, dass vor jeder Simulation mit der expliziten Behandlung auf einem Gitter mehrere Simulationen mit der impliziten oder der IMEX Behandlung auf demselben Gitter stehen. Aus der Zusammenführung der beiden Punkte folgt, dass auf jedem Gitter schnellere sowie genauere Simulationen mit der impliziten oder der IMEX Behandlung im Vergleich zur expliziten Behandlung erzielt werden. Die Simulationen mit der expliziten Behandlung werden daher für die weiteren Analysen der Ergebnisse außer Acht gelassen.

In Abbildung 3.8 werden die Fehler gegen die Rechenzeiten für die anderen Simulationen dargestellt.

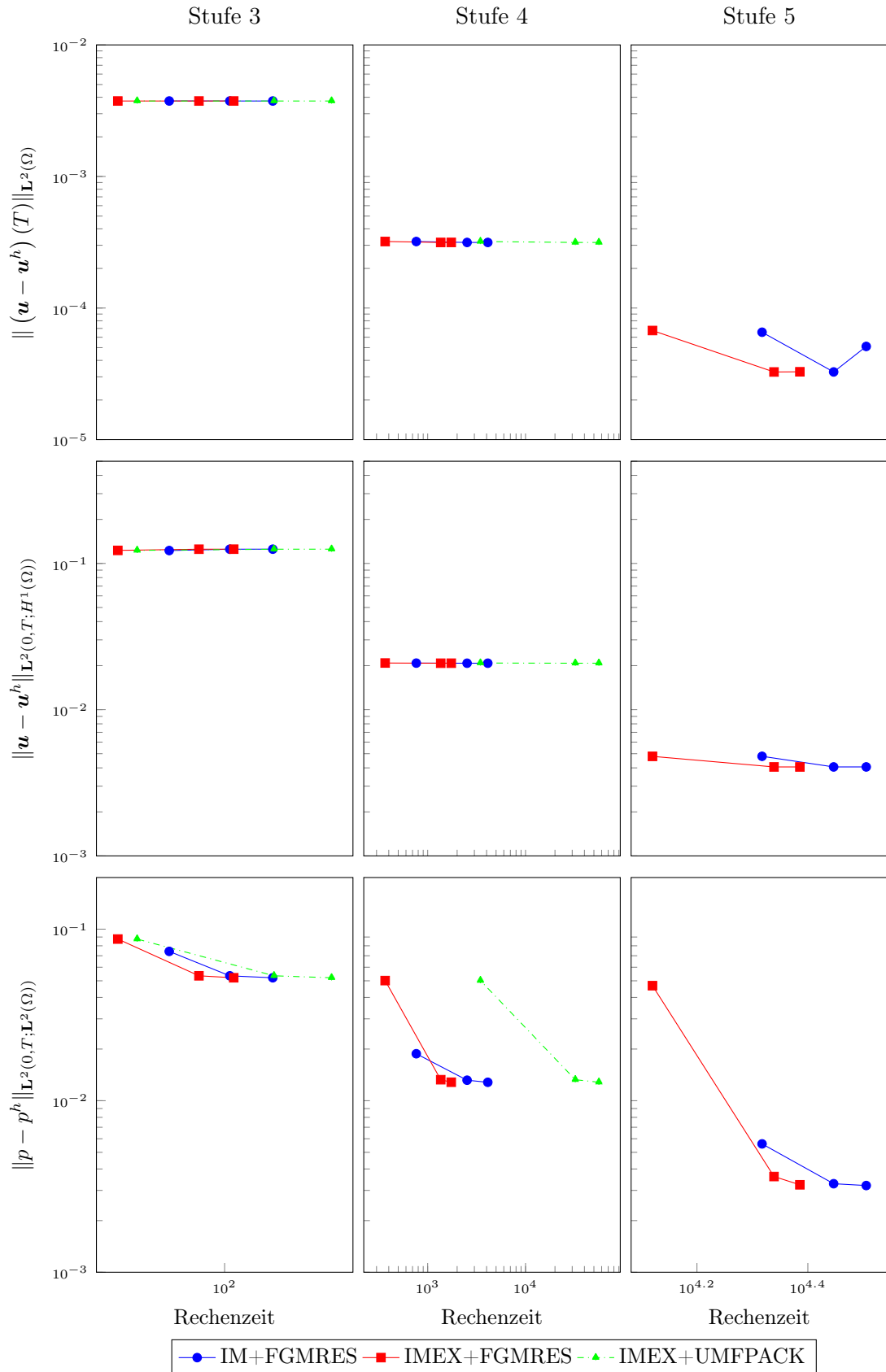


ABBILDUNG 3.8: Rechenzeiten gegen die ausgewählten Fehler für jede Verfeinerungsstufe (Die Punkte mit einer bestimmten Farbe stellen von links nach rechts die Simulationen für die kleinste Zeitschrittweite ($\Delta t = 0.1$) bis zu Simulationen für die größte Zeitschrittweite ($\Delta t = 0.005$) dar.)

Aus Abbildung 3.8 und in Hinblick auf Auswertungstabellen im Anhang A.2 lässt sich folgendes feststellen:

Bezüglich der Geschwindigkeitsfehler dominiert der Diskretisierungsfehler im Raum den Diskretisierungsfehler in der Zeit auf den Gittern der Stufe 3 und 4, weshalb auf diesen Abbildungen nur gerade Linien zu sehen sind.

Untereinander zeigen IMEX+FGMRES, IMEX+UMFPACK und IM+FGMRES auf allen Gittern und für alle Zeitschrittweiten nur marginale Unterschiede, ausgenommen die Steigerung des Fehlers $\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)(T)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ von IM+FGMRES auf dem feinsten Gitter für die kleinste Zeitschrittweite, und der Fehler $\|p - p^h\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}$ von IM+FGMRES auf allen Gittern für die größte Zeitschrittweite, der kleiner als die Fehler von IMEX+FGMRES und IMEX+UMFPACK ist.

IMEX+FGMRES ist durchschnittlich 1.8 mal schneller als IM+FGMRES. Auf dem größten Gitter hat IMEX+UMFPACK für die größte Zeitschrittweite eine Rechenzeit zwischen den Rechenzeiten von IMEX+FGMRES und IM+FGMRES. Für kleinere Zeitschrittweiten erhöht sich jedoch sehr schnell dessen Zeitaufwand und dadurch wird IMEX+UMFPACK unpraktisch. Des Weiteren kommt der hohe Arbeitsspeicherbedarf des UMFPACK-Verfahrens für feine Gitter noch dazu. Eine Erklärung für diese Verhalten kann in Bemerkung 2.47 gefunden werden.

Fazit

Sowohl in zwei als auch drei Dimensionen hat sich die explizite Behandlung als unpraktisch erwiesen. Diese zeitliche Behandlung des Konvektionsterms führte zu ungenaueren Ergebnissen und für ihre Konvergenz waren deutlich kleinere Zeitschrittweiten (natürlich verbunden mit mehr Zeitaufwand) im Vergleich zu der impliziten und der IMEX Behandlung erforderlich und trotzdem konnte damit keine akzeptable Genauigkeit erzielt werden.

Die Auswahl des Löser zwischen FGMRES- und UMFPACK-Verfahren für die IMEX Behandlung hatte keine spürbare Auswirkung auf die Genauigkeit, aber bezüglich der Rechenzeit hat das UMFPACK-Verfahren in zwei Dimensionen für die größte Zeitschrittweite besser abgeschnitten, aber für kleinere Zeitschrittweiten in zwei Dimensionen und für alle Zeitschrittweiten in drei Dimensionen wurde dieses Verfahren sehr zeitaufwändig. Darüber hinaus wuchs in zwei Dimensionen der Zeitaufwand zwischen zwei Zeitschrittweiten proportional der Verfeinerung der Gitter. Abgesehen davon ist der hohe Arbeitsspeicherbedarf dieses Verfahrens ein wichtiger Aspekt, wenn es sich um dreidimensionale Probleme auf feinen Gittern handelt.

Die IMEX Behandlung mit dem FGMRES-Verfahren zeigte insgesamt in zwei und drei Dimensionen vergleichbare Genauigkeit wie die implizite Behandlung mit durchschnittlich etwa 1.8 mal mehr Schnelligkeit. In zwei Dimensionen konnte zusätzlich festgestellt werden, dass die IMEX Behandlung mit dem FGMRES-Verfahren für eine kleinere Zeitschrittweite als die von der impliziten Behandlung mit weiterhin geringerem Zeitaufwand genauere Ergebnisse erzielte.

Anhang A

Auswertungstabellen

In diesem Anhang befinden sich die Auswertungstabellen von numerischen Benchmarks. Die Tabellen stellen die Fehler sowie die Rechenzeit in aufsteigender Reihenfolge dar. Dabei werden die Fehler mit 10 Nachkommastellen ausgegeben.

A.1 Zweidimensionales Benchmark-Problem

TABELLE A.1: Auswertung der Simulationen bezüglich Fehler $_{wid}^{ref}$

zeit. B.	Stufe	Δt	Löser	Zeit	$c_{wid,max}$	Fehler $_{wid}^{ref}$
IMEX	3	0.0001	FGMRES	3.9363	2.9509204266	0.0000500418
IMEX	3	0.0001	UMFPACK	3.9363	2.9509206032	0.0000500494
IM	3	0.0001	FGMRES	3.9364	2.9509487145	0.0001530363
IM	3	0.001	FGMRES	3.936	2.9509240204	0.0002500636
IMEX	4	0.001	UMFPACK	3.936	2.9509269633	0.0002501473
IMEX	4	0.001	FGMRES	3.936	2.9509269716	0.0002501476
IMEX	3	0.001	UMFPACK	3.936	2.9509287404	0.0002502145
IMEX	3	0.001	FGMRES	3.936	2.9509287439	0.0002502147
IM	4	0.001	FGMRES	3.936	2.9509590393	0.0002532846
IM	2	0.0001	FGMRES	3.9355	2.9509317513	0.0007501192
IMEX	2	0.0001	UMFPACK	3.9354	2.9509058635	0.0008500922
IMEX	2	0.0001	FGMRES	3.9354	2.9509058616	0.0008500922
IMEX	2	0.001	FGMRES	3.935	2.9509131734	0.0012500108
IMEX	2	0.001	UMFPACK	3.935	2.950913166	0.0012500109
IM	2	0.001	FGMRES	3.935	2.9509071358	0.0012500506
IMEX	2	0.01	FGMRES	3.94	2.9520576079	0.0039192267
IMEX	2	0.01	UMFPACK	3.94	2.9520579049	0.003919313
IM	4	0.01	FGMRES	3.93	2.9507781376	0.0062515733
IM	2	0.01	FGMRES	3.93	2.9507778588	0.0062515795
IM	3	0.01	FGMRES	3.93	2.9507762961	0.0062516148
IMEX	3	0.01	FGMRES	3.95	2.9522134807	0.0138108574
IMEX	3	0.01	UMFPACK	3.95	2.9522134926	0.0138108586
IMEX	4	0.01	UMFPACK	3.95	2.9522152104	0.0138110197
IMEX	4	0.01	FGMRES	3.95	2.9522160433	0.013811098
EX	4	0.0001	UMFPACK	4.2622	4.1328004609	1.2260051604
EX	3	0.0001	FGMRES	4.2627	4.1343606814	1.2276421632
EX	3	0.0001	UMFPACK	4.2627	4.1343671222	1.2276483721
EX	2	0.0001	FGMRES	4.2736	4.1313939477	1.2277327014
EX	2	0.0001	UMFPACK	4.2736	4.131400474	1.2277389765

TABELLE A.2: Auswertung der Simulationen bezüglich Fehler $_{auf}^{ref}$

zeit. B.	Stufe	Δt	Löser	Zeit	$c_{auf,max}$	Fehler $_{auf}^{ref}$
IMEX	4	0.001	FGMRES	5.692	0.4790190506	0.0012481458
IMEX	4	0.001	UMFPACK	5.692	0.4790191375	0.0012482254
IMEX	3	0.0001	FGMRES	5.6939	0.4785566428	0.0015569364
IMEX	3	0.0001	UMFPACK	5.6939	0.4785678862	0.0015618885
IM	3	0.001	FGMRES	5.694	0.4788058557	0.0017651323
IMEX	3	0.001	FGMRES	5.693	0.4796480307	0.0018417691
IMEX	3	0.001	UMFPACK	5.693	0.4796482472	0.0018419774
IM	4	0.001	FGMRES	5.694	0.4805207773	0.0030410298
IM	3	0.0001	FGMRES	5.6957	0.4813192913	0.0047010829
IMEX	2	0.001	UMFPACK	5.718	0.4820005314	0.0258315013
IMEX	2	0.001	FGMRES	5.718	0.482000541	0.0258315029
IMEX	2	0.0001	FGMRES	5.7189	0.4809460233	0.026577971
IMEX	2	0.0001	UMFPACK	5.7189	0.4809544272	0.0265789432
IM	2	0.001	FGMRES	5.719	0.4809855103	0.0266818777
IM	2	0.0001	FGMRES	5.7205	0.4832596313	0.0285129729
IM	3	0.01	FGMRES	5.74	0.4488183954	0.0556826836
IM	4	0.01	FGMRES	5.74	0.4484756485	0.0558623053
IM	2	0.01	FGMRES	5.76	0.4505914346	0.0728056756
IMEX	2	0.01	FGMRES	5.69	0.5815849817	0.1037396796
IMEX	2	0.01	UMFPACK	5.69	0.5815853945	0.1037400922
IMEX	3	0.01	FGMRES	5.67	0.5800286187	0.1046017398
IMEX	3	0.01	UMFPACK	5.67	0.5800286858	0.1046018053
IMEX	4	0.01	FGMRES	5.66	0.5796356873	0.1068241544
IMEX	4	0.01	UMFPACK	5.66	0.5796359202	0.1068243763
EX	2	0.0001	FGMRES	5.179	1.0413878587	0.7623834385
EX	2	0.0001	UMFPACK	5.179	1.0413954094	0.7623890196
EX	4	0.0001	UMFPACK	5.1603	1.0327367944	0.768835466
EX	3	0.0001	FGMRES	5.161	1.0344066551	0.7695578306
EX	3	0.0001	UMFPACK	5.161	1.0344143621	0.7695634041

TABELLE A.3: Auswertung der Simulationen bezüglich Fehler $_{\Delta p(8)}^{ref}$

zeit. B.	Stufe	Δt	Löser	$\Delta p(8)$	Fehler $_{\Delta p(8)}^{ref}$
IMEX	4	0.001	UMFPACK	-0.111585261	0.000030409
IMEX	4	0.001	FGMRES	-0.1115852382	0.0000304318
IMEX	3	0.001	UMFPACK	-0.1116510675	0.0000353975
IMEX	3	0.001	FGMRES	-0.1116511146	0.0000354446
IMEX	3	0.0001	FGMRES	-0.1116786871	0.0000630171
IMEX	3	0.0001	UMFPACK	-0.1116787339	0.0000630639
IM	4	0.001	FGMRES	-0.1116899789	0.0000743089
IM	3	0.001	FGMRES	-0.1117047191	0.0000890491
IM	3	0.0001	FGMRES	-0.1117531352	0.0001374652
IMEX	2	0.01	UMFPACK	-0.1112008964	0.0004147736
IMEX	2	0.01	FGMRES	-0.1112008922	0.0004147778
IMEX	2	0.001	UMFPACK	-0.1111890159	0.0004266541
IMEX	2	0.001	FGMRES	-0.1111889814	0.0004266886
IMEX	2	0.0001	UMFPACK	-0.1111472456	0.0004684244
IMEX	2	0.0001	FGMRES	-0.1111442858	0.0004713842
IM	2	0.001	FGMRES	-0.1111030493	0.0005126207
IM	2	0.0001	FGMRES	-0.1109717309	0.0006439391
EX	2	0.0001	UMFPACK	-0.1130980861	0.0014824161
EX	2	0.0001	FGMRES	-0.1130981447	0.0014824747
IM	4	0.01	FGMRES	-0.1088578033	0.0027578667
IM	3	0.01	FGMRES	-0.1086605289	0.0029551411
IMEX	3	0.01	UMFPACK	-0.1077741433	0.0038415267
IMEX	3	0.01	FGMRES	-0.1077741297	0.0038415403
IMEX	4	0.01	UMFPACK	-0.1076055195	0.0040101505
IMEX	4	0.01	FGMRES	-0.1076049486	0.0040107214
EX	3	0.0001	FGMRES	-0.115943584	0.004327914
EX	3	0.0001	UMFPACK	-0.1159458602	0.0043301902
EX	4	0.0001	UMFPACK	-0.1160815673	0.0044658973
IM	2	0.01	FGMRES	-0.1037084977	0.0079071723

TABELLE A.4: Auswertung der Simulationen bezüglich der Rechenzeit (in Sekunden)

zeit. B.	Stufe	Δt	Löser	Rechenzeit
IMEX	2	0.01	UMFPACK	2427.5
IMEX	2	0.01	FGMRES	5015.5
IMEX	2	0.001	FGMRES	11360
IMEX	3	0.01	UMFPACK	11663
IM	2	0.01	FGMRES	12705
IMEX	2	0.001	UMFPACK	18795
IM	2	0.001	FGMRES	19845
EX	2	0.0001	UMFPACK	23795
IMEX	3	0.01	FGMRES	32070
IMEX	2	0.0001	FGMRES	44890
EX	2	0.0001	FGMRES	46515
IMEX	3	0.001	FGMRES	46665
IM	2	0.0001	FGMRES	55515
IM	3	0.01	FGMRES	60350
IMEX	4	0.01	UMFPACK	69090
EX	3	0.0001	UMFPACK	70420
IM	3	0.001	FGMRES	75530
IMEX	2	0.0001	UMFPACK	104680
IMEX	3	0.001	UMFPACK	107050
EX	3	0.0001	FGMRES	161450
IMEX	3	0.0001	FGMRES	164700
IM	3	0.0001	FGMRES	201800
IMEX	4	0.01	FGMRES	218850
IMEX	4	0.001	FGMRES	272200
EX	4	0.0001	UMFPACK	313350
IM	4	0.001	FGMRES	419150
IM	4	0.01	FGMRES	480900
IMEX	3	0.0001	UMFPACK	830600
IMEX	4	0.001	UMFPACK	901700

A.2 Dreidimensionales Benchmark-Problem

TABELLE A.5: Auswertung der Simulationen bezüglich $\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)(T)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$

zeit. B.	Stufe	Δt	Löser	$\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)(T)\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}$
IMEX	5	0.01	FGMRES	0.0000326696
IM	5	0.01	FGMRES	0.0000326797
IMEX	5	0.005	FGMRES	0.0000327679
IM	5	0.005	FGMRES	0.0000510859
IM	5	0.1	FGMRES	0.0000654993
IMEX	5	0.1	FGMRES	0.0000674823
IMEX	4	0.005	UMFPACK	0.0003151088
IMEX	4	0.01	UMFPACK	0.0003151119
IM	4	0.01	FGMRES	0.0003151362
IM	4	0.005	FGMRES	0.0003151659
IMEX	4	0.01	FGMRES	0.0003151696
IMEX	4	0.005	FGMRES	0.0003153407
IM	4	0.1	FGMRES	0.0003203122
IMEX	4	0.1	UMFPACK	0.0003204205
IMEX	4	0.1	FGMRES	0.000320421
IM	3	0.01	FGMRES	0.0037470692
IMEX	3	0.005	UMFPACK	0.0037471051
IMEX	3	0.01	UMFPACK	0.0037471052
IMEX	3	0.01	FGMRES	0.0037471138
IMEX	3	0.1	UMFPACK	0.0037472231
IMEX	3	0.1	FGMRES	0.0037472242
IM	3	0.005	FGMRES	0.0037472823
IMEX	3	0.005	FGMRES	0.0037476812
IM	3	0.1	FGMRES	0.0037486982
EX	5	0.005	FGMRES	0.0645246699
EX	4	0.005	UMFPACK	0.064559679
EX	4	0.005	FGMRES	0.0645606349
EX	3	0.01	UMFPACK	0.0650771505
EX	3	0.01	FGMRES	0.0650771925
EX	3	0.005	UMFPACK	0.0650890841
EX	3	0.005	FGMRES	0.065091057
EX	4	0.01	FGMRES	0.067974615
EX	4	0.01	UMFPACK	0.0680034172

TABELLE A.6: Auswertung der Simulationen bezüglich $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\mathbf{L}^2(0,T;H^1(\Omega))}$

zeit. B.	Stufe	Δt	Löser	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}^h\ _{\mathbf{L}^2(0,T;H^1(\Omega))}$
IMEX	5	0.005	FGMRES	0.0040589023
IMEX	5	0.01	FGMRES	0.0040595594
IM	5	0.01	FGMRES	0.0040596684
IM	5	0.005	FGMRES	0.0040605525
IMEX	5	0.1	FGMRES	0.0047952269
IM	5	0.1	FGMRES	0.0047996264
IM	4	0.01	FGMRES	0.0207825489
IMEX	4	0.01	UMFPACK	0.0207828989
IMEX	4	0.01	FGMRES	0.0207833732
IM	4	0.005	FGMRES	0.0207873215
IMEX	4	0.005	UMFPACK	0.0207873689
IMEX	4	0.005	FGMRES	0.020788667
IM	4	0.1	FGMRES	0.0208146023
IMEX	4	0.1	UMFPACK	0.0208473857
IMEX	4	0.1	FGMRES	0.020847388
IM	3	0.1	FGMRES	0.1224977872
IMEX	3	0.1	FGMRES	0.1228037785
IMEX	3	0.1	UMFPACK	0.1228037827
IM	3	0.01	FGMRES	0.1251050659
IMEX	3	0.01	FGMRES	0.1251093469
IMEX	3	0.01	UMFPACK	0.125109389
IM	3	0.005	FGMRES	0.1251713621
IMEX	3	0.005	FGMRES	0.1251718497
IMEX	3	0.005	UMFPACK	0.1251722607
EX	5	0.005	FGMRES	0.3057292579
EX	4	0.005	UMFPACK	0.3063450393
EX	4	0.005	FGMRES	0.3063463748
EX	3	0.01	UMFPACK	0.3279108983
EX	3	0.01	FGMRES	0.3279109736
EX	3	0.005	UMFPACK	0.3296419383
EX	3	0.005	FGMRES	0.3296445417
EX	4	0.01	FGMRES	0.8666957587
EX	4	0.01	UMFPACK	0.86926661

TABELLE A.7: Auswertung der Simulationen bezüglich $\|p - p^h\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}$

zeit. B.	Stufe	Δt	Löser	$\ p - p^h\ _{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}$
IM	5	0.005	FGMRES	0.0032023182
IMEX	5	0.005	FGMRES	0.0032342178
IM	5	0.01	FGMRES	0.0032816812
IMEX	5	0.01	FGMRES	0.0036138477
IM	5	0.1	FGMRES	0.0056011541
IM	4	0.005	FGMRES	0.0128040726
IMEX	4	0.005	UMFPACK	0.0128155026
IMEX	4	0.005	FGMRES	0.012815541
IM	4	0.01	FGMRES	0.0131667726
IMEX	4	0.01	UMFPACK	0.013254081
IMEX	4	0.01	FGMRES	0.0132541705
IM	4	0.1	FGMRES	0.0187837414
IMEX	5	0.1	FGMRES	0.0468367355
IMEX	4	0.1	UMFPACK	0.0501468825
IMEX	4	0.1	FGMRES	0.050146997
IM	3	0.005	FGMRES	0.052071902
IMEX	3	0.005	UMFPACK	0.0520754248
IMEX	3	0.005	FGMRES	0.0520755426
IM	3	0.01	FGMRES	0.0534602719
IMEX	3	0.01	FGMRES	0.0534834332
IMEX	3	0.01	UMFPACK	0.0534834488
IM	3	0.1	FGMRES	0.0742138683
IMEX	3	0.1	UMFPACK	0.0875708448
IMEX	3	0.1	FGMRES	0.0875708473
EX	3	0.01	FGMRES	2.2920930725
EX	3	0.01	UMFPACK	2.2920944778
EX	4	0.01	FGMRES	2.2934943127
EX	4	0.01	UMFPACK	2.2935061979
EX	5	0.005	FGMRES	2.3056047245
EX	4	0.005	UMFPACK	2.3056063858
EX	4	0.005	FGMRES	2.305606561
EX	3	0.005	FGMRES	2.3058572682
EX	3	0.005	UMFPACK	2.3058585763

TABELLE A.8: Auswertung der Simulationen bezüglich der Rechenzeit (in Sekunden)

zeit. B.	Stufe	Δt	Löser	Rechenzeit
IMEX	3	0.1	FGMRES	18.36
IMEX	3	0.1	UMFPACK	24.94
EX	3	0.01	UMFPACK	33.88
IM	3	0.1	FGMRES	41.51
EX	3	0.01	FGMRES	57.54
EX	3	0.005	UMFPACK	59.53
IMEX	3	0.01	FGMRES	66.54
EX	3	0.005	FGMRES	103.84
IM	3	0.01	FGMRES	108.6
IMEX	3	0.005	FGMRES	115.58
IM	3	0.005	FGMRES	214.82
IMEX	3	0.01	UMFPACK	219.12
IMEX	4	0.1	FGMRES	367.42
IMEX	3	0.005	UMFPACK	546.28
IM	4	0.1	FGMRES	764.73
EX	4	0.01	FGMRES	860.37
EX	4	0.01	UMFPACK	1336.52
IMEX	4	0.01	FGMRES	1359.27
EX	4	0.005	UMFPACK	1613.71
IMEX	4	0.005	FGMRES	1740.84
EX	4	0.005	FGMRES	2149.35
IM	4	0.01	FGMRES	2527.37
IMEX	4	0.1	UMFPACK	3459.97
IM	4	0.005	FGMRES	4115.25
IMEX	5	0.1	FGMRES	13173.54
IM	5	0.1	FGMRES	20765.01
IMEX	5	0.01	FGMRES	21821.73
EX	5	0.005	FGMRES	23464.03
IMEX	5	0.005	FGMRES	24295.9
IM	5	0.01	FGMRES	27955.46
IM	5	0.005	FGMRES	32006.61
IMEX	4	0.01	UMFPACK	32273.8
IMEX	4	0.005	UMFPACK	56215.85

Literaturverzeichnis

- R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.
- N. Ahmed, C. Bartsch, V. John, and U. Wilbrandt. An assessment of some solvers for saddle point problems emerging from the incompressible navier–stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331:492 – 513, 2018.
- S. Brenner and L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer New York, 2002.
- P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method For Elliptic Problems. Studies in mathematics and its applications*, volume 4. 1978.
- T. A. Davis. Algorithm 832: Umfpack v4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans. Math. Softw.*, 30(2):196–199, June 2004. ISSN 0098-3500.
- H. Elman, V. Howle, J. Shadid, R. Shuttleworth, and R. Tuminaro. Block preconditioners based on approximate commutators. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(5): 1651–1668, 2006.
- C.R. Ethier and D.A. Steinman. *Exact fully 3D Navier–Stokes solutions for benchmarking*, volume 19, pages 369–375. 1994.
- Ch. Fefferman. Existence and smoothness of the navier-stokes equation. *The Millennium Prize Problems*, 01 2006. URL <http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf>.
- G.P. Galdi. *An Introduction to the Navier-Stokes Initial-Boundary Value Problem*, pages 1–70. Birkhäuser Basel, 2000.
- S. Ganesan, V. John, G. Matthies, R. Meesala, S. Abdus, and U. Wilbrandt. An object oriented parallel finite element scheme for computations of pdes: Design and implementation. *2016 IEEE 23rd International Conference on High Performance Computing Workshops (HiPCW)*, pages 2–11, 2016.

- V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*. Lecture notes in mathematics, vol 749. Springer, Berlin/New York, 1979.
- V. John. *Finite element methods for incompressible flow problems*. Springer, 2016.
- V. John and J. Rang. *Adaptive time step control for the incompressible Navier–Stokes equations*, volume 199, pages 514–524. 2010.
- N.S. Papageorgiou and P. Winkert. *Applied Nonlinear Functional Analysis : An Introduction*. De Gruyter, Berlin ; Boston, 2018.
- S. Rockel. *Über formen des konvektiven terms in finite–elemente–diskretisierungen der inkompressiblen navier–stokes–gleichungen*. *Diplomarbeit, Freie Universität Berlin*, 2013.
- Y. Saad. A flexible inner-outer preconditioned gmres algorithm. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(2):461–469, 1993.
- M. Schäfer and S. Turek. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder (with support by f. durst and e. krause and r. rannacher). In *Flow simulation with high-performance computers II. DFG Priority research programme results 1993-1995*. Vieweg, Wiesbaden, Braunschweig, Januar 1996.
- J. Serrin. *The initial value problem for the Navier-Stokes equations*. University of Wisconsin Press, Madison, WI, 1963.
- H. Sohr. *The Navier-Stokes equations : an elementary functional analytic approach*. 2001.
- R. Stenberg. On some three-dimensional finite elements for incompressible media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63(3):261 – 269, 1987. ISSN 0045-7825.
- R. Temam. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*. Studies in mathematics and its applications. North-Holland, 1984.
- U. Wilbrandt, C. Bartsch, N. Ahmed, N. Alia, F. Anker, L. Blank, A. Caiazzo, S. Ganesan, S. Giere, G. Matthies, R. Meesala, A. Shamim, J. Venkatesan, and V. John. Parmoon – a modernized program package based on mapped finite elements. *Computers and Mathematics with Applications*, 74:74–88, 2016.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Des Weiteren versichere ich, dass diese Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Universität als Prüfungsleistung eingereicht wurde.

Berlin, den 29.09.2019

.....

Nima Sharifian