

Eine divergenzfreie Rekonstruktion für eine nicht-konforme Diskretisierung der inkompressiblen Stokes-Gleichungen

von

Christian Brennecke

Bachelorarbeit in Mathematik

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik und Informatik

der Freien Universität Berlin

im Mai 2013

angefertigt im

Weierstraß Institut für angewandte Analysis und Stochastik

bei

Prof. Dr. Volker John

und

Dr. Alexander Linke

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Berlin, den

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Analytische Grundlagen	6
3	Die stationären Stokes-Gleichungen	12
3.1	Das kontinuierliche Problem	12
3.1.1	Motivation und schwache Formulierung	12
3.1.2	Abstrakte Formulierung als Variationsproblem	13
3.2	Numerische Lösung mittels nicht-konformen finiten Elementen	15
3.2.1	Numerische Lösung mit nicht-konformen finiten Elementen	16
3.2.2	Numerische Studie der Methode	29
4	Eine divergenzfreie Rekonstruktion	36
4.1	Motivation und Ansatz der Rekonstruktion	36
4.2	Numerische Studie der Methode	40
5	Zusammenfassung und Ausblick	47
6	Anhang	49
6.1	nonconfcoeffsolver.m	49
6.2	nonconfquad.m	54
6.3	nonconfstokesassembler.m	57
6.4	nonconfstokesnorms.m	62
6.5	nonconf2norm.m	63
6.6	nonconfrightrecol.m	66

1 Einleitung

In der folgenden Arbeit wird eine divergenzfreie Rekonstruktion für eine nicht-konforme Diskretisierung der inkompressiblen, stationären Stokes-Gleichungen vorgestellt und numerisch untersucht. Gemischte Finite-Elemente-Methoden können bei den Stokes-Gleichungen den Nachteil haben, dass sich der Fehler der numerisch berechneten Geschwindigkeit in Abhängigkeit des Drucks trotz gleich bleibender exakter Geschwindigkeit vergrößert. Die in dieser Arbeit vorgestellte Rekonstruktion versucht diese Druckabhängigkeit zu vermeiden, um eine stabile Berechnung der Geschwindigkeit zu ermöglichen.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil (Kapitel 2) werden die wichtigsten Resultate der Analysis zitiert, welche im Rahmen dieser Arbeit benötigt werden. Der zweite Teil (Kapitel 3) stellt im Anschluss daran zunächst die schwache Formulierung der stationären Stokes-Gleichungen vor und nennt die wichtigsten Resultate zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichungen. Danach folgt die Herleitung einer nicht-konformen Diskretisierung der Stokes-Gleichungen mit dem Hauptresultat einer Fehlerabschätzung, welche als theoretische Erwartung für die im letzten Abschnitt durchgeführte numerische Studie dienen soll. Der dritte Teil (Kapitel 4) betont den Nachteil der nicht-konformen Diskretisierung und motiviert eine divergenzfreie Rekonstruktion, welche diesen Nachteil der nicht-konformen Diskretisierung vermeidet. Die numerisch untersuchten Beispiele des zweiten Teils werden zum Abschluss mit der neuen Methode untersucht, um die Vorteile der Rekonstruktion zu unterstreichen. Die Arbeit schließt mit dem Fazit, in dem der Nutzen der Rekonstruktion zusammengefasst und ein Ausblick auf weiterführende Fragen gegeben wird.

Die wichtigsten, im Rahmen dieser Arbeit geschriebenen Programme befinden sich im Anhang. Die Programme wurden allesamt mit dem Programm MATLAB erstellt. Auf die benutzten Literaturquellen wird an passender Stelle im Text verwiesen.

2 Analytische Grundlagen

In den Kapiteln 3 und 4 werden einige Definition und Sätze aus der Analysis benötigt, deren wichtigste im Folgenden zusammen mit den in der Arbeit verwendeten Notationen zusammengestellt werden. Auf weitere benötigte Hilfssätze oder Definitionen wird an passender Stelle im Text verwiesen. Die folgenden Aussagen wurden, sofern nicht explizit darauf hingewiesen wird, [5, Kap.5], [2, Kap.4] und [7, Kap.1] entnommen.

Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, werden die Räume der Äquivalenzklassen von Funktionen $L^p(\Omega)$, $p \in \mathbb{N}$, durch

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\} \quad (2.1)$$

definiert. Dabei gelten zwei Funktionen g und h als äquivalent, wenn $g = h$ μ -f.ü. gilt und mit μ wird das n -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Die L^p -Räume werden durch die Norm

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.2)$$

zu normierten Räumen. Der für diese Arbeit besonders wichtige Fall ist $p = 2$. In diesem Fall wird durch

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} fg d\mu \quad (2.3)$$

ein Skalarprodukt definiert. Mit dem Skalarprodukt wird $L^2(\Omega)$ zu einem Hilbertraum. Weiterhin sei im Folgenden

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) \text{ mit } \int_{\Omega} f d\mu = 0 \right\}. \quad (2.4)$$

Für vektorwertige Funktionen $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, wird der Raum $L^2(\Omega)^n$ definiert als

$$L^2(\Omega)^n := \{ \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T \text{ mit } f_i \in L^2(\Omega) \text{ für alle } i \in 1, \dots, n \}. \quad (2.5)$$

Die entsprechende Norm ist durch

$$\|f\|_{L^2(\Omega)^n} := \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

gegeben. Zuletzt sei $L_{loc}^1(\Omega)$ der Raum

2 Analytische Grundlagen

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f \in L^1(\Omega') \text{ für alle kompakten } \Omega' \subset \bar{\Omega}\}. \quad (2.7)$$

Als Verallgemeinerung der klassischen Ableitung heißt $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, λ -te schwache Ableitung von $f \in L^2(\Omega)$, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_{\Omega} g \cdot \varphi \, d\mu = (-1)^{|\lambda|} \int_{\Omega} f \cdot D_{\lambda} \varphi \, d\mu. \quad (2.8)$$

Dabei bezeichnet $C_0^\infty(\Omega)$ die Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω , $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, $|\lambda| := \sum_{i=1}^n \lambda_i$ und $D_{\lambda} := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\lambda_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\lambda_n}$. Besitzt f die klassischen λ -ten Ableitungen, stimmen die schwachen Ableitungen mit diesen überein. Dies sieht man durch partielle Integration (unter Ausnutzung des Satzes von Fubini, siehe z.B. [2, Abschn.1.4]):

$$\int_{\Omega} D_{\lambda} f \cdot \varphi \, d\mu = (-1)^{|\lambda|} \int_{\Omega} f \cdot D_{\lambda} \varphi \, d\mu, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.9)$$

falls $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Im Folgenden sei $D_0 f$ per Definition gleich f . Mit Hilfe der schwachen Ableitung werden die *Sobolev-Räume* $W^{k,p}(\Omega)$, $k, p \in \mathbb{N}$, definiert:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \text{ mit: } D_{\lambda} f \text{ existiert und } D_{\lambda} f \in L^p(\Omega) \text{ für alle } |\lambda| \leq k\}. \quad (2.10)$$

Die Sobolev-Räume werden durch

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\lambda| \leq k} \int_{\Omega} |D_{\lambda} f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.11)$$

normierte Räume. Auch hier ist der für die Arbeit wichtigste Fall $p = 2$. Abkürzend wird definiert $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$. Mit dem folgenden Skalarprodukt wird $H^k(\Omega)$ ein Hilbertraum:

$$\langle f, g \rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\lambda| \leq k} \langle D_{\lambda} f, D_{\lambda} g \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (2.12)$$

Des Weiteren ist durch

$$|f|_{H^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\lambda|=k} \|D_{\lambda} f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

eine Halbnorm auf $H^k(\Omega)$ definiert. Die Räume $H^k(\Omega)^n$ werden analog zu $L^2(\Omega)^n$ definiert.

Für Kapitel 3 ist die Definition des Funktionenraums $H_0^1(\Omega)$ sehr wichtig. Dazu werden zunächst eine Definition und ein Satz (*Spursatz*) benötigt. Es bezeichne $C(x, r)$ den offenen n -dimensionalen Würfel mit Kantenlänge r und Zentrum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dann wird definiert:

2 Analytische Grundlagen

Definition 2.1 (Lipschitz-Gebiet). *Sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und es gelte für den Rand $\partial\Omega$, dass für alle $x \in \partial\Omega$ ein $r > 0$ und eine Lipschitz-Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass, bis auf geeignete Orientierung und eventuelle Umbenennung der Koordinatenachsen, gilt:*

$$\Omega \cap C(x, r) = \{y = (y_1, \dots, y_n)^T \text{ mit } \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}) < y_n\} \cap C(x, r). \quad (2.14)$$

Dann heißt Ω Lipschitz-Gebiet¹.

Weiterhin sei $L^2(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$ die Menge (der Äquivalenzklassen) von Funktionen mit

$$L^2(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1}) := \left\{ f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \int_{\partial\Omega} f^2 d\mathcal{H}^{n-1} < \infty \right\}. \quad (2.15)$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{H}^{n-1} das $(n-1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß (siehe [2, Abschn.2.1]). Mit diesen Definitionen gilt gemäß [2, Abschn.4.3] der folgende

Satz 2.1 (Spursatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert für $1 \leq p \leq \infty$ ein beschränkter, linearer Operator $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$, für den gilt:*

$$Tf = f \text{ auf } \partial\Omega \text{ für alle } f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}). \quad (2.16)$$

Dabei ist $\bar{\Omega}$ der Abschluss von Ω und $C(\bar{\Omega})$ der Raum der auf $\bar{\Omega}$ stetigen Funktionen.

Man nennt die Abbildung Tf die Spur von f . Sie ist eindeutig bis auf Nullmengen des auf $\partial\Omega$ eingeschränkten Hausdorff- $(n-1)$ -Maßes (siehe [2, Abschn.1.1] für eingeschränkte Maße). Damit ermöglicht der Spursatz auf natürliche Weise, einem Element f aus $H^1(\Omega)$ Randwerte auf $\partial\Omega$ zuzuordnen. Ist $f \in H^1(\Omega)$, wird im Folgenden f auf $\partial\Omega$ durch die Spur Tf definiert. Der Spursatz garantiert damit die Wohldefiniertheit des für die Stokes-Gleichung wichtigen Raums $H_0^1(\Omega)$ für ein Lipschitz-Gebiet Ω . Dieser Raum ist vollständig und er wird definiert durch:

$$H_0^1(\Omega) := \{f \in H^1(\Omega) \text{ mit: } f \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega\}. \quad (2.17)$$

Der Raum $H_0^1(\Omega)^n$ wird analog zu $L^2(\Omega)^n$ definiert.

Neben diesen Räumen wird in Kapitel 3 auch der Raum $H_{\text{div}}(\Omega)$ benötigt. Dazu heißt zunächst $g \in L^2(\Omega)$ schwache Divergenz von $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$, kurz $g := \text{div } \mathbf{f}$, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} g\varphi d\mu = - \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \nabla\varphi \rangle d\mu. \quad (2.18)$$

Hier und im Folgenden bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt. Der Einfachheit halber wird in dieser Arbeit auch das tensorielle Produkt zwischen zwei Vektorgradienten

¹ Ω ist also ein Lipschitz-Gebiet, wenn $\partial\Omega$ lokal der Graph einer Lipschitzfunktion ist.

2 Analytische Grundlagen

mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet. Mit dem Begriff der schwachen Divergenz wird der Raum $H_{\text{div}}(\Omega)$ durch

$$H_{\text{div}}(\Omega) := \{ \mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n \text{ mit } \operatorname{div} \mathbf{f} \in L^2(\Omega) \text{ existiert} \} \quad (2.19)$$

definiert. Eine Norm des Raums ist durch

$$\| \mathbf{f} \|_{H_{\text{div}}(\Omega)} := \left(\| \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \| \operatorname{div} \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

gegeben.

Neben diesen Vorbereitungen werden eine Version des *Integralsatzes von Gauss* (siehe wieder [2, Abschn.4.3]) und die *Poincaré-Ungleichung* benötigt.

Satz 2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $\mathbf{v} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine vektorwertige Funktion², die in den \mathbb{R}^n abbildet und $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle \, d\mu + \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle f \, d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (2.21)$$

Hierbei ist $\nabla f := (D_1 f, \dots, D_n f)^T$, \mathbf{n} der nach außen zeigende Normalenvektor von $\partial\Omega$ und im Randintegral ist f wieder als Spur Tf zu verstehen. Insbesondere gilt damit für $f \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle \, d\mu. \quad (2.22)$$

Satz 2.3 (Poincaré-Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte und offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , und sei $f \in H_0^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$\| f \|_{L^2(\Omega)} \leq c \cdot |\Omega|^{\frac{1}{n}} \| f \|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.23)$$

Hierbei ist das Volumen von Ω durch $|\Omega| := \int_{\Omega} d\mu = \mu(\Omega)$ definiert.

In Kapitel 3 muss Satz 2.2 in etwas verallgemeinerter Form benutzt werden. Dazu sei angemerkt, dass der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω dicht in $L^2(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ liegt. Der Raum $C^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ bzgl. der zugehörigen Norm $\| \cdot \|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Da $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ folgt damit insbesondere, dass $H_0^1(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt. Mit diesen Informationen, Satz 2.1 und Satz 2.2 gilt folgende Verallgemeinerung:

Folgerung 2.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n$ und $f \in H^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle \, d\mu + \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle f \, d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (2.24)$$

²Allgemeiner meint für ein $k \in \mathbb{N}$ $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ den Raum der k -fach stetig differenzierbaren, vektorwertigen Funktionen, die von Ω nach \mathbb{R}^n abbilden.

2 Analytische Grundlagen

Beweis. Da $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n$ und $f \in H^1(\Omega)$, ist $\mathbf{u} := f \cdot \mathbf{v} \in W^{1,1}(\Omega)^n$ auf Grund der Cauchy-Schwarz Ungleichung (siehe z.B. [5, Kap.6]) und es gilt $\operatorname{div} \mathbf{u} = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle$, daher wird die Gleichung des Korollars für \mathbf{u} gezeigt. Da weiterhin $C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{1,1}(\Omega)$ liegt, liegt $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ auch dicht in $W^{1,1}(\Omega)^n$. Sei damit (\mathbf{u}_k) eine Folge vektorwertiger Funktion in $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|_{W^{1,1}(\Omega)^n} = 0$. Dann gilt wegen Satz 2.2 für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_k d\mu = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{n} \rangle d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (2.25)$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und dem Spursatz 2.1 folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} (\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle) d\mathcal{H}^{n-1} \right| &= \left| \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \right| = \left| \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{u}_k - T\mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} \langle T\mathbf{u}_k - T\mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\ &\leq \int_{\partial\Omega} \left| \langle T\mathbf{u}_k - T\mathbf{u}, T\mathbf{u}_k - T\mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}} \right| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \|T(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})\|_{L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})^n} \\ &\leq \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|_{W^{1,1}(\Omega)^n}, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Hierbei hängt die Konstante c nur von $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$ und der oberen Schranke des Spurope-
rators T ab, $\|\cdot\|_{L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})^n}$ bezeichnet die L^1 -Norm bzgl. des Hausdorff-Maßes. Da die
rechte Seite im Limes für $k \rightarrow \infty$ gegen 0 läuft, folgt somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{n} \rangle d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (2.27)$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) d\mu \right| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (D_i(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}))_i d\mu \right| = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |(D_i(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}))_i| d\mu \\ &\leq \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|_{W^{1,1}(\Omega)^n}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Durch Limes-Bildung folgt damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_k d\mu = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} d\mu, \quad (2.29)$$

also gilt die Behauptung. □

Als letzte Vorbereitung für Kapitel 3 sei noch der Satz von *Lax-Milgram* gegeben
(vgl. [8, Abschn.1.2]):

2 Analytische Grundlagen

Satz 2.4 (Lax-Milgram). Sei X ein Banachraum, $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional und $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform. Es gelte für alle $u, v \in X$

$$a(u, v) = a(v, u) \tag{2.30}$$

und es gebe eine Konstante $K \geq 0$, so dass für alle $u \in X$ gelte

$$a(u, u) \geq K \cdot \|u\|_X^2, \tag{2.31}$$

wobei $\|\cdot\|_X$ die Norm auf X bezeichne. Dann besitzt das Funktional $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $J(u) := \frac{1}{2}a(u, u) - l(u)$ ein eindeutiges Minimum u_{min} und das Minimum ist die eindeutige Lösung von: $a(u_{min}, v) = l(v)$ für alle $v \in X$.

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

In diesem Kapitel wird die schwache Formulierung der stationären Stokes-Gleichungen mit homogenen Randbedingungen betrachtet. Im ersten Teil wird nach einer kurzen Motivation zunächst die schwache Formulierung der stationären Stokes-Gleichungen gegeben und im Anschluss daran werden die wichtigsten Ergebnisse zur Lösbarkeit des Problems zitiert. Die entsprechenden Sätze finden sich in [7, Kap.2.1-2.3].

Im zweiten Teil wird das Problem diskretisiert und mit Hilfe von nicht-konformen finiten Elementen gelöst. Die analytischen Ergebnisse der Fehlerabschätzungen wurden [7, Kap.2, Abschn.7] sowie [8, Kap.4] entnommen. Auf alle weiteren benutzten Quellen wird an passender Stelle im Text verwiesen.

3.1 Das kontinuierliche Problem

3.1.1 Motivation und schwache Formulierung

Die stationären Stokes-Gleichungen mit homogenen Randbedingungen bestehen aus einem gekoppelten System von partiellen Differentialgleichungen. Das Problem zur Lösung des Systems könnte wie folgt lauten:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, dann finde $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ auf } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ auf } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.1}$$

In dieser Arbeit soll immer der Fall $n = 2$ vorausgesetzt werden. Physikalisch gesehen beschreibt 3.1 die stationäre, das heißt, zeitlich nicht veränderliche, Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit auf dem Gebiet Ω . Dabei entspricht p dem Druck der Flüssigkeit, \mathbf{u} dem Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit und \mathbf{f} der auf die Flüssigkeit wirkenden Kraft. Die Aufgabe besteht darin, bei vorgegebener Kraft, den Druck und das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit zu bestimmen, um das Verhalten der Flüssigkeit beschreiben zu können.

Es stellt sich heraus, dass die Anforderungen, die an die Daten zur Beschreibung einer konkreten Situation mittels der Gleichungen (3.1) gestellt werden müssen, oft unrealistisch sind (vgl. [4, Kap.3]). Aus diesem Grund wird ein neuer Lösungsbegriff eingeführt, die sogenannte *schwache Lösung*, um insbesondere die Anforderungen an die Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösung (\mathbf{u}, p) und das Gebiet Ω zu reduzieren.

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

Um die zugehörige *schwache Formulierung* von 3.1 zu motivieren, sei im Folgenden angenommen, dass \mathbf{u} , p und \mathbf{f} alle für die folgenden Schritte benötigten Eigenschaften besitzen. Seien dazu $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ und $w \in L_0^2(\Omega)$. Multiplikation der ersten Gleichung aus 3.1 mit \mathbf{v} und Integration über Ω ergibt

$$\int_{\Omega} \langle -\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle d\mu + \int_{\Omega} \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle d\mu = \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle d\mu. \quad (3.2)$$

Die Anwendung des Satzes 2.2 auf beide Summanden der linken Seite ergibt

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle d\mu - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p d\mu = \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle d\mu. \quad (3.3)$$

Analoge Multiplikation der zweiten Gleichung von 3.1 mit w und entsprechende Integration ergibt schließlich

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot w d\mu = 0. \quad (3.4)$$

Die beiden erhaltenen Gleichungen werden als die *schwache Formulierung* des stationären Stokes-Problems bezeichnet. Es stellt sich heraus, dass das Problem auf folgende Weise gut gestellt ist:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$. Dann finde $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ und $p \in L_0^2(\Omega)$, so dass für alle $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ und alle $w \in L_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle d\mu - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p d\mu &= \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle d\mu \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot w d\mu &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

gilt¹. Existieren solch ein \mathbf{u} und p , dann heißt (\mathbf{u}, p) *schwache Lösung* des Problems 3.5.

Um Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von 3.5 treffen zu können, bietet es sich an, das Problem abstrakt als Variationsproblem zu formulieren. Die im folgenden Abschnitt betrachtete Formulierung wird auch in Abschnitt 3.2 benötigt.

3.1.2 Abstrakte Formulierung als Variationsproblem

Seien X und Y zwei Hilberträume mit den Normen $\|\cdot\|_X$ bzw. $\|\cdot\|_Y$. Die dualen Räume seien $X^* = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f \text{ ist linear und stetig}\}$ und Y^* ganz analog. Seien weiterhin $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Bilinearformen. Das Variationsproblem lautet dann:

Finde für vorgegebenes $l \in X^*$ und vorgegebenes $m \in Y^*$ eine Lösung $u \in X$, $p \in Y$, so dass für alle $v \in X$ und $w \in Y$ gilt

¹Die Bedingungen an \mathbf{f} können noch verallgemeinert werden, siehe dazu Abschnitt 3.1.2.

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= l(v), \\ b(u, w) &= m(w). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Für das gestellte Problem (3.6) gilt der folgende wichtige Satz:

Satz 3.1. *Sei $V := \{v \in X \text{ mit } b(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in Y\}$, a sei symmetrisch und es gebe eine Konstante $K > 0$, so dass für alle $v \in V$ gelte*

$$a(v, v) \geq K \cdot \|v\|_X^2. \quad (3.7)$$

Weiterhin sei die folgende inf-sup-Bedingung erfüllt:

$$\inf_{w \in Y \setminus \{0\}} \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{b(u, w)}{\|u\|_X \cdot \|w\|_Y} \geq \tilde{K} \quad \text{für ein } \tilde{K} > 0. \quad (3.8)$$

Dann besitzt das Problem (3.6) eine eindeutige Lösung.

Ein im zweiten Abschnitt dieses Kapitels benötigter Hilfssatz (siehe [7, Satz 2.1]) ist gegeben durch

Satz 3.2. *Die Voraussetzungen seien wie in Satz 3.1 und es gelte die inf-sup-Bedingung des vorherigen Satzes. Ist dann $V^\perp := \{u \in X \text{ mit } \langle u, v \rangle_X = 0 \text{ für alle } v \in V\}$ und B die Abbildung $B : X \rightarrow Y^*$ mit $u \rightarrow b(u, \cdot)$. Dann ist B ein Isomorphismus von V^\perp nach Y^* .*

Um das Variationsproblem auf die schwache Formulierung des Stokes-Problems zu übertragen, seien nun Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $X := H_0^1(\Omega)^2$, $Y := L_0^2(\Omega)$ und weiterhin sei für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle d\mu \quad (3.9)$$

definiert. Für $w \in L_0^2(\Omega)$ und \mathbf{u} wie oben sei

$$b(\mathbf{u}, w) := - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot w d\mu. \quad (3.10)$$

Dann entspricht das Problem (3.6) dem Stokes-Problem (3.1) mit $m \equiv 0$.² Es gilt der folgende Satz.

Satz 3.3. *Das Stokes-Problem (3.6) mit den wie zuvor definierten Räumen X , Y und Funktionen a, b, l sowie $m \equiv 0$ besitzt eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}, p) \in X \times Y$.*

²Das hier gestellte Problem ist wegen $l \in X^*$ bzgl. den an die rechte Seite gestellten Bedingungen noch allgemeiner als das Problem (3.1).

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

Beweis. Zunächst wird die Stetigkeit von a gezeigt, der Nachweis der Stetigkeit von b erfolgt analog. Es gilt per Definition des tensoriellen Produkts für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$

$$\left| \int_{\Omega} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle d\mu \right| = \left| \int_{\Omega} \langle \nabla u_1, \nabla v_1 \rangle d\mu + \int_{\Omega} \langle \nabla u_2, \nabla v_2 \rangle d\mu \right|. \quad (3.11)$$

Wegen der Dreiecksungleichung muss nur ein Summand der rechten Seite betrachtet werden. Es gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zunächst angewandt auf Integrale und im darauffolgenden Schritt angewandt auf Summen

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \langle \nabla u_1, \nabla v_1 \rangle d\mu \right| &\leq \sum_{i=1}^2 \|D_i u_1\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|D_i v_1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \langle \nabla u_1, \nabla u_1 \rangle d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \langle \nabla v_1, \nabla v_1 \rangle d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |u_1|_{H^1(\Omega)} \cdot |v_1|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_1\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v_1\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Damit ist a stetig.

Wegen der Symmetrie des tensoriellen Produkts ist a insbesondere eine symmetrische Bilinearform und da

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u} \rangle d\mu = |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^2}, \quad (3.13)$$

folgt mit der Poincaré-Ungleichung (2.3)

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^2} + |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^2} \leq c \cdot |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^2}, \quad (3.14)$$

also gilt $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq K \cdot \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}^2$ mit $K = \frac{1}{c}$. Zuletzt muss noch die *inf-sup-Bedingung* nachgewiesen werden. Dazu sei auf [7, Satz 3.3] verwiesen. Damit sind die Bedingungen aus Satz 3.1 erfüllt und die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bewiesen. \square

3.2 Numerische Lösung mittels nicht-konformen finiten Elementen

In diesem Kapitel wird die stationäre Stokes-Gleichung im Sinne der schwachen Formulierung mittels finiten Elementen gelöst. Die Schwierigkeit, die Stokes-Gleichungen zu lösen, besteht darin, dass die schwache Formulierung ein Variationsproblem ist, welches in unendlich-dimensionalen Funktionenräumen gestellt ist. Da es in der Praxis nur möglich ist, endlich viele Gleichungen zu lösen, wird das Variationsproblem in geeigneten endlich-dimensionalen Ansatzräumen gestellt. Ziel solch einer Diskretisierung ist es, eine möglichst gute Approximation der schwachen Lösung zu erhalten.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird eine sogenannte *nicht-konforme Methode* vorgestellt und die zugehörigen Fehlerabschätzungen hergeleitet. Im zweiten Abschnitt wird diese Methode auf drei Beispiele angewendet und die Fehlerabschätzungen werden mit den numerisch erhaltenen Fehlern verglichen.

3.2.1 Numerische Lösung mit nicht-konformen finiten Elementen

Im Folgenden wird als beschränktes Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die Menge $(0, 1) \times (0, 1)$ betrachtet. Das Gebiet kann auf viele Weisen diskretisiert werden. In dieser Arbeit wird eine einfache Triangulierung \mathcal{T}_h gewählt. Für gegebenes $l \in \mathbb{N}$ wird das Gebiet Ω in l^2 gleich große Quadrate eingeteilt. Die Quadrate werden dann mittels der Diagonalen, die von der linken unteren Ecke zur rechten oberen Ecke verläuft, in zwei Dreiecke geteilt. Die Länge h eines Quadrats ist damit $\frac{1}{l}$. Der Fall $l = 3$ ist in Abbildung 3.1 abgebildet.

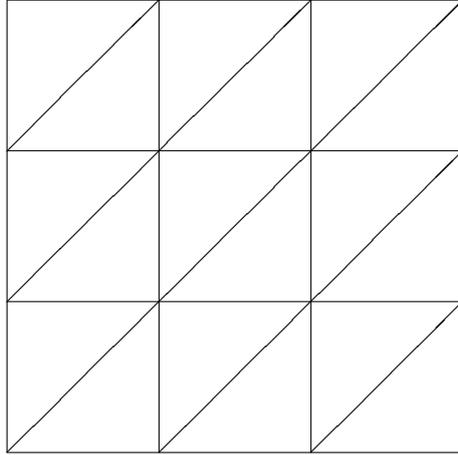


Abbildung 3.1: Triangulierung \mathcal{T}_h für $h = \frac{1}{3}$.

Die Menge der Dreieckskanten sei mit \mathcal{D}_h^* bezeichnet, die Menge der inneren Dreieckskanten sei \mathcal{D}_h . Der Mittelpunkt einer Kante $d \in \mathcal{D}_h^*$ wird mit \mathbf{m}_d bezeichnet. Es bezeichne wie in Abschnitt 3.1.2 $X := H_0^1(\Omega)^2$, $Y := L_0^2(\Omega)$. Als Ansatzraum für die Geschwindigkeit \mathbf{u} des Stokes-Problems wird der Raum X_h der sogenannten *Crouzeix – Raviart – Elemente* benutzt:

$$X_h := \{\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2 \text{ mit: } f|_T \in \mathbf{P}_1^2 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.15)$$

$$[\mathbf{f}]_d(\mathbf{m}_d) = 0 \text{ für alle } d \in \mathcal{D}_h, \mathbf{f}(\mathbf{m}_d) = 0 \text{ für alle } d \in \mathcal{D}_h^* \setminus \mathcal{D}_h\}. \quad (3.16)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{P}_1^2 den Raum der vektorwertigen linearen Polynome p mit $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und für gegebenes $d \in \mathcal{D}_h$ ist $[\mathbf{f}]_d(\mathbf{m}_d) = \lim_{\mathbf{x}_+ \rightarrow \mathbf{m}_d} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \lim_{\mathbf{x}_- \rightarrow \mathbf{m}_d} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, also der Sprung von \mathbf{f} an der Stelle \mathbf{m}_d . Die Bezeichnungen $\lim_{\mathbf{x}_+ \rightarrow \mathbf{m}_d}$ bzw. $\lim_{\mathbf{x}_- \rightarrow \mathbf{m}_d}$ bezeichnen hierbei die Limits im Punkt \mathbf{m}_d ausgehend von den beiden Dreiecken T_1 bzw. T_2 mit $d \subset T_1 \cap T_2$. Die Bedingung $[\mathbf{f}]_d(\mathbf{m}_d) = 0$ für alle $d \in \mathcal{D}_h$ ist also äquivalent zur Stetigkeit von \mathbf{f} in den Punkten \mathbf{m}_d mit $d \in \mathcal{D}_h$. Dass die Funktionen an den Mittelpunkten der äußeren Kanten verschwinden, soll die homogenen Randbedingungen der Geschwindigkeit berücksichtigen. Die Funktionen $\mathbf{f} \in X_h$ sind durch die Werte auf den Kantenmittelpunkten eindeutig bestimmt und sollen für die Approximation der Geschwindigkeit \mathbf{u} des Stokes-Problems benutzt werden. Eine Basis des Raums X_h ist durch diejenigen $\varphi_i \in X_h$ gegeben, für die eine der beiden Komponentenfunktionen gleich null ist und deren zweite Komponenten-

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

funktion nur auf zwei benachbarten Dreiecken $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$ ungleich null ist. Ist die zweite Komponentenfunktion gleich null, soll gelten

$$\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{m}_d) = (1, 0)^T \text{ für } d \in \mathcal{D}_h, d \subset T_1 \cap T_2, \boldsymbol{\varphi}_i(m_{d(i)}) = \mathbf{0} \text{ für } i \in \{1, \dots, 4\}. \quad (3.17)$$

Dabei bezeichnen die Kanten $d(i)$ die vier, die Kante d umgebenden Kanten. Ist die erste Komponentenfunktion gleich null, gelten die analogen Bedingungen für die zweite Komponentenfunktion. Eine auf X_h definierte Norm ist durch

$$|\mathbf{u}|_{X_h} := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{u}|_{H^1(T)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

gegeben. Die Norm ist wohldefiniert, weil die Elemente aus X_h eingeschränkt auf ein beliebiges Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ glatt sind. Weiterhin ist zu bemerken, dass $|\mathbf{u}|_{X_h} = 0$ impliziert, dass $\mathbf{u} = 0$. Dies liegt daran, dass die dreiecksweisen Polynome höchstens konstant sein können, um $|\mathbf{u}|_{X_h} = 0$ gewährleisten zu können. Da zudem die Sprünge an den Kantenmittelpunkten verschwinden, folgt mit den Randwerten auf $\partial\Omega$, dass $\mathbf{u} = 0$ gelten muss.

Der Druck p des Stokes-Problems soll mit auf den Dreiecken stückweise konstanten Funktionen approximiert werden. Daher sei der Raum Y_h definiert durch

$$Y_h := \{f \in L_0^2(\Omega) \text{ mit: } f|_T \in \mathbf{P}_0 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.19)$$

Ein Erzeugendensystem von Y_h ist durch die Funktionen λ_i gegeben, welche auf genau einem Dreieck gleich $1 - |T_i|$ für ein $T_i \in \mathcal{T}_h$ sind und sonst $-|T_i|$. Mit diesen Funktionen lässt sich leicht eine beliebige Funktion aus Y_h konstruieren. Das Erzeugendensystem enthält für $h = \frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$, $2l^2$ Funktionen.

Offensichtlich ist $Y_h \subset Y$, also ist $\|\cdot\|_{Y_h} = \|\cdot\|_Y$. Jedoch gilt im Allgemeinen nicht $X_h \subset X$. Dies liegt daran, dass die Geschwindigkeitskomponenten im Allgemeinen Sprünge an den Kanten $d \in \mathcal{D}_h^*$ besitzen. Aus diesem Grund wird die Finite-Elemente-Methode als nicht-konform bezeichnet.

In Analogie zu den beiden Bilinearformen und des Funktionals des kontinuierlichen Stokes-Problems aus Abschnitt 3.1.2 werden nun die Operatoren des diskreten Problems definiert. Für gegebene $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in X_h$ und $p_h \in Y_h$ sei

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h \rangle d\mu \\ b_h(\mathbf{u}_h, p_h) &:= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{u}_h \cdot p_h d\mu \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$l_h(\mathbf{u}_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \mathbf{u}_h, \mathbf{f} \rangle d\mu \quad (3.21)$$

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

Hierbei sei $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$. Das diskrete Stokes-Problem kann nun wie folgt formuliert werden: Finde $\mathbf{u}_h \in X_h$ und $p_h \in Y_h$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= l_h(\mathbf{v}_h) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in X_h, \\ b_h(\mathbf{u}_h, w_h) &= 0 \quad \text{für alle } w_h \in Y_h. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Es gilt der folgende

Satz 3.4. (1) Für alle $h = 1/l > 0$ mit $l \in \mathbb{N}$ und alle $\mathbf{v}_h \in X_h$ gilt

$$a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = |\mathbf{v}_h|_{X_h}^2. \quad (3.23)$$

(2) Es gilt die inf-sup-Bedingung

$$\inf_{w_h \in Y_h \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{u}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(\mathbf{u}_h, w_h)}{|\mathbf{u}_h|_{X_h} \cdot \|w_h\|_{Y_h}} \geq \tilde{K} \quad \text{für ein } \tilde{K} > 0. \quad (3.24)$$

(3) Der Raum $V_h := \{\mathbf{v}_h \in X_h \text{ mit } b_h(\mathbf{v}_h, w_h) = 0 \text{ für alle } w_h \in Y_h\}$ ist ungleich dem trivialen Raum $\{0\}$ und es gilt

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in X_h \text{ mit } \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h = 0\}. \quad (3.25)$$

Hierbei bezeichnet div_h die elementweise, für alle $T \in \mathcal{T}_h$ definierte, gebrochene (elementweise schwache) Divergenz $\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h := (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)|_T$.

Beweis. (1) Für $\mathbf{v}_h \in X_h$ ist

$$a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{v}_h \rangle d\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v}|_{H^1(T)}^2 = |\mathbf{v}|_{X_h}^2. \quad (3.26)$$

(2) Sei zunächst der Operator $E_h : X \rightarrow X_h$ definiert über

$$(E_h \mathbf{v})(\mathbf{m}_d) := \begin{cases} \frac{1}{|d|} \int_d \mathbf{v} d\mathcal{H}^1, & \text{falls } d \in \mathcal{D}_h \\ 0, & \text{falls } d \in \mathcal{D}_h^* \setminus \mathcal{D}_h \end{cases}, \quad (3.27)$$

wobei \mathbf{v} eingeschränkt auf eine Kante d im Spursinne zu verstehen ist. Da die Elemente aus X_h eindeutig durch die Werte auf den Kantenmittelpunkten festgelegt werden, ist E_h damit wohldefiniert. Wegen der Linearität des Integrals ist E_h ein linearer Operator. Seien nun $w_h \in Y_h$ und $\mathbf{v} \in X$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned} b_h(E_h \mathbf{v}, w_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} E_h \mathbf{v} \cdot w_h d\mu \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (w_h)|_T \int_T \operatorname{div} E_h \mathbf{v} d\mu, \end{aligned} \quad (3.28)$$

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

da w_h stückweise konstant ist. Die Integrale können nun gemäß Satz 2.2 über den Rand ausgewertet werden und da $E_h \mathbf{v}$ stückweise linear ist, kann die Mittelpunktsregel angewendet werden. Damit erhält man schließlich mit der Definition von E_h

$$\begin{aligned}
b_h(E_h \mathbf{v}, w_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} w_h \left\{ \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \subset \partial T} \int_d \langle \mathbf{n}_T, E_h \mathbf{v} \rangle d\mathcal{H}^1 \right\} \\
&= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} w_h \left\{ \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \subset \partial T} |d| \cdot \langle \mathbf{n}_T, E_h \mathbf{v}(\mathbf{m}_d) \rangle \right\} \\
&= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} w_h \left\{ \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \subset \partial T} \int_d \langle \mathbf{n}_T, \mathbf{v} \rangle d\mathcal{H}^1 \right\} \\
&= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot w_h d\mu \\
&= b_h(\mathbf{v}, w_h) = b(\mathbf{v}, w_h). \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Sei nun weiterhin $\mathbf{v} \in X$ und $T \in \mathcal{T}_h$ beliebig. Da $E_h \mathbf{v}$ stückweise linear ist und $\frac{\partial E_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_T} := (\langle \mathbf{n}_T, \nabla(E_h \mathbf{v})_1 \rangle, \langle \mathbf{n}_T, \nabla(E_h \mathbf{v})_2 \rangle)^T$ damit stückweise konstant, folgt zunächst mit Hilfe des Satzes 2.2 für die H^1 -Halbnorm

$$\begin{aligned}
|E_h \mathbf{v}|_{H^1(T)^2}^2 &= \int_T \langle \nabla E_h \mathbf{v}, \nabla E_h \mathbf{v} \rangle d\mu \\
&= \int_{\partial T} \left\langle \frac{\partial E_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_T}, E_h \mathbf{v} \right\rangle d\mathcal{H}^1 - \int_T \langle \Delta E_h \mathbf{v}, E_h \mathbf{v} \rangle d\mu \\
&= \int_{\partial T} \left\langle \frac{\partial E_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_T}, E_h \mathbf{v} \right\rangle d\mathcal{H}^1 = \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \subset \partial T} \frac{\partial E_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_T} \cdot \int_d E_h \mathbf{v} d\mathcal{H}^1. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Die Mittelpunktsregel und nochmalige Anwendung des Satzes 2.2 ergeben

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned}
|E_h \mathbf{v}|_{H^1(T)^2}^2 &= \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \subset \partial T} \frac{\partial E_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_T} \cdot \int_d E_h \mathbf{v} \, d\mathcal{H}^1 \\
&= \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \subset \partial T} \frac{\partial E_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_T} \cdot |d| \cdot (E_h \mathbf{v})(\mathbf{m}_d) \\
&= \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \subset \partial T} \frac{\partial E_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_T} \cdot \int_d \mathbf{v} \, d\mathcal{H}^1 \\
&= \int_{\partial T} \left\langle \frac{\partial E_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_T}, \mathbf{v} \right\rangle \, d\mathcal{H}^1 \\
&= \int_{\partial T} \left\langle \frac{\partial E_h \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}_T}, \mathbf{v} \right\rangle \, d\mathcal{H}^1 - \int_T \langle \Delta E_h \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \, d\mu \\
&= \int_T \langle \nabla E_h \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v} \rangle \, d\mu \leq |E_h \mathbf{v}|_{H^1(T)^2} |\mathbf{v}|_{H^1(T)^2} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

unter Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Damit folgt für die Norm $|\cdot|_{X_h}$ unter Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Summen

$$|E_h \mathbf{v}|_{X_h}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |E_h \mathbf{v}|_{H^1(T)^2}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |E_h \mathbf{v}|_{H^1(T)^2} |\mathbf{v}|_{H^1(T)^2} \leq |E_h \mathbf{v}|_{X_h} |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^2}, \tag{3.32}$$

also insbesondere

$$|E_h \mathbf{v}|_{X_h} \leq |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^2}. \tag{3.33}$$

Nach dem Beweis von Satz 3.3 gilt die inf-sup-Bedingung für das kontinuierliche Stokes-Problem. Es gilt also mit den Notationen aus Abschnitt 3.1.2

$$\inf_{w \in Y \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{u} \in X \setminus \{0\}} \frac{b(\mathbf{u}, w)}{\|\mathbf{u}\|_X \cdot \|w\|_Y} \geq K \quad \text{für ein } K > 0. \tag{3.34}$$

Zunächst sei $w_h \in Y_h \subset Y$ mit $\|w_h\|_Y = 1$. Wegen der Infimumseigenschaft gilt damit

$$\sup_{\mathbf{u} \in X \setminus \{0\}} \frac{b(\mathbf{u}, w_h)}{\|\mathbf{u}\|_X} \geq \inf_{w \in Y \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{u} \in X \setminus \{0\}} \frac{b(\mathbf{u}, w)}{\|\mathbf{u}\|_X \cdot \|w\|_Y} \geq K. \tag{3.35}$$

Wähle nun $\epsilon := \frac{K}{2} > 0$, dann gibt es ein $\mathbf{v} \in X$, so dass gilt

$$\frac{b(\mathbf{v}, w_h)}{\|\mathbf{v}\|_X} \geq \sup_{\mathbf{u} \in X \setminus \{0\}} \frac{b(\mathbf{u}, w_h)}{\|\mathbf{u}\|_X} - \epsilon \geq K - \epsilon = \frac{K}{2} > 0. \tag{3.36}$$

Damit gilt wegen der Linearität von b für $\mathbf{v}_1 := \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_X}$ mit $\|\mathbf{v}_1\|_X = 1$ unter Zuhilfenahme von (3.30)

$$b(\mathbf{v}_1, w_h) = b_h(E_h \mathbf{v}_1, w_h) \geq \epsilon > 0 \tag{3.37}$$

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

und somit mit (3.34) wegen

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(\mathbf{u}_h, w_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_{X_h}} \geq b_h(E_h \mathbf{v}_1, w_h) \geq \epsilon \quad (3.38)$$

die inf-sup-Bedingung, also **(2)**.

(3) Zuerst wird gezeigt, dass $V_h \neq \{0\}$. Dazu wird Satz 3.2 benutzt. Sei angenommen, dass $V_h = \{0\}$ gilt und sei analog zu den Notationen aus Satz 3.2 B_h ein Isomorphismus von $V_h^\perp \subset X_h$ nach Y_h^* . Da $X_h = V_h \oplus V_h^\perp$ und $\dim Y_h^* = \dim Y_h$, muss wegen Isomorphie $\dim X_h = \dim Y_h$ gelten. Eine Basis von X_h bzw. ein Erzeugendensystem von Y_h wurden zu Beginn dieses Kapitels angegeben. Die Basis von X_h enthält demnach für $h = \frac{1}{l}, l \in \mathbb{N}$ genau $2(3l^2 - 2l)$ Basisfunktionen (pro Geschwindigkeitskomponente 3 Basiselemente pro Quadrat (Knoten der diagonalen, unteren und rechten Kante) minus $2l$ Freiheitsgrade auf dem rechten und unteren Rand von Ω , wenn man von links nach rechts und unten nach oben zählt). Das Erzeugendensystem von Y_h besteht jedoch nur aus $2l^2$ Elementen, jede Basis von Y_h demnach aus weniger als $2l^2 < 2(3l^2 - 2l)$ Elementen, also führt die Annahme $V_h = \{0\}$ zu einem Widerspruch.

Sei nun $\mathbf{v}_h \in V_h$. Da $\mathbf{v}_h \in X_h$ und somit stückweise linear ist, ist $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ eingeschränkt auf ein Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ konstant. Damit liegt $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ in Y_h , woraus $b_h(\mathbf{v}_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = -\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)^2 d\mu = 0$ folgt. Dies impliziert $\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h = 0$.

Sei andererseits $\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h = 0$ und $w_h \in Y_h$ beliebig. Dann ergibt Multiplikation der Gleichung mit w_h und Integration über alle $T \in \mathcal{T}_h$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{v}_h \cdot w_h d\mu = 0 = -b_h(\mathbf{v}_h, w_h), \quad (3.39)$$

also $\mathbf{v}_h \in V_h$. Damit ist auch **(3)** bewiesen. □

Bevor die Fehler der diskreten Lösung hegeleitet werden, sei angemerkt, dass Satz 3.4 wegen Satz 3.1 die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokes-Problems (3.22) garantiert. Der Satz von Lax-Milgram, Satz 2.4, impliziert daher, dass die Geschwindigkeit des diskreten Problems (3.22) auch alleine mit Hilfe des Raums V_h gefunden werden kann. Das Problem ist also äquivalent zu:

Finde $\mathbf{u}_h \in V_h$, so dass gilt:

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l_h(\mathbf{v}_h) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (3.40)$$

Der nächste Satz schätzt den Konsistenzfehler des Problems (3.40) ab.

Satz 3.5. *Sei $(\mathbf{u}, p) \in X \times Y$ die eindeutige (schwache) Lösung des kontinuierlichen Stokes-Problems und es gelte $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)$ und $p \in H^1(\Omega)$. Dann gilt für alle $\mathbf{v} \in V \oplus V_h$ und den Notationen wie in Satz 3.4*

$$|a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l_h(\mathbf{v})| \leq K \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} |\mathbf{v}|_{X_h}, \quad \text{für ein } K > 0. \quad (3.41)$$

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

Beweis. Sei also $\mathbf{v} \in V \oplus V_h$. Zunächst wird gezeigt, dass $\mathbf{f} = -\Delta \mathbf{u} + \nabla p$ gilt. Wegen den Voraussetzungen an \mathbf{u} und p und des Satzes 2.2 gilt für alle $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$ und damit insbesondere für alle $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^2$ nach einmaliger partieller Integration der schwachen Formulierung des Stokes-Problems

$$\int_{\Omega} (-\Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} \, d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mu, \quad (3.42)$$

also

$$\int_{\Omega} (-\Delta \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} \, d\mu = 0. \quad (3.43)$$

Damit gilt nach Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung auf alle Komponentenfunktionen, siehe [1, Abschn.3.1], dass $\mathbf{f} = -\Delta \mathbf{u} + \nabla p$ (μ -f.ü.).

Hiermit folgt für den Konsistenzfehler zunächst

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l_h(\mathbf{v}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \, d\mu \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle \, d\mu \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_{\partial T}}, \mathbf{v} \right\rangle \, d\mathcal{H}^1 - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle \, d\mu \\ &= \sum_{d \in \mathcal{D}_h} \int_d \left[\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_d}, \mathbf{v} \right\rangle \right]_d \, d\mathcal{H}^1 + \sum_{d \in \mathcal{D}_h^* \setminus \mathcal{D}_h} \int_d \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_d}, \mathbf{v} \right\rangle \, d\mathcal{H}^1 \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle \, d\mu, \end{aligned} \quad (3.44)$$

wobei $[\cdot]_d$ den Sprung an der Kante d bezeichnet, der entsteht, da jede Kante $d \in \mathcal{D}_h$ in genau zwei benachbarten Dreiecken enthalten ist. Es gilt für solch ein $d \subset T_1 \cap T_2$, $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$

$$\left[\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_d}, \mathbf{v} \right\rangle \right]_d := \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_{(d \cap \partial T_1)}}, \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_{(d \cap \partial T_2)}}, \mathbf{v} \right\rangle, \quad (3.45)$$

wobei $\mathbf{n}_{(d \cap \partial T_1)}$ bzw. $\mathbf{n}_{(d \cap \partial T_2)}$ die nach außen zeigenden Normalenvektoren auf d bzgl. T_1 bzw. T_2 bezeichnen. Es sei bemerkt, dass der Normalenvektor \mathbf{n}_d für gegebene Kante $d \in \mathcal{D}_h^*$ als derjenige Vektor definiert ist, der im mathematisch negativen Sinne senkrecht auf d steht.

Die Integranden werden nun nacheinander abgeschätzt. Dies wird hier nur angedeutet, die genaue Herleitung findet sich in [8, Kap.4, Abschn.1] und [7, Kap.2, Abschn.7]. Für die Abschätzungen werden zwei neue Definitionen benötigt. Zum Einen bezeichne $\bar{\mathbf{v}}_d := \frac{1}{|d|} \int_d \mathbf{v} \, d\mathcal{H}^1$ für ein $d \in \mathcal{D}_h^*$. Zum Anderen sei der *nodale Interpolationsoperator* mit

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

$I_h : X \cap H^2(\Omega)^2 \rightarrow (X_h \cap C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1)^2$ bezeichnet, welcher über $(I_h \mathbf{u})(\mathbf{m}_d) := \mathbf{u}(\mathbf{m}_d)$ für alle $d \in \mathcal{D}_h^*$ und gegebenes $\mathbf{u} \in X \cap H^2(\Omega)^2$ definiert ist (siehe hierzu die ausführlichen Abschnitte aus [8], insbesondere [8, Kap.2, Abschn.4]).

Für eine gegebene Kante $d \in \mathcal{D}_h^*$ ist $\frac{\partial I_h \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_d}$ konstant und weiterhin ist $\int_d \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_d d\mathcal{H}^1 = 0$ per Definition. Damit folgt einerseits für $d \in \mathcal{D}_h^*$, dass $\int_d \langle \frac{\partial I_h \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_d}, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_d \rangle d\mathcal{H}^1 = 0$ ist, andererseits ist für eine innere Kante $d \in \mathcal{D}_h$ das Integral $\int_d \left[\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_d}, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_d \rangle \right]_d d\mathcal{H}^1 = 0$. Zuletzt gilt für eine beliebige äußere Kante $d \in \mathcal{D}_h^* \setminus \mathcal{D}_h$, dass $\bar{\mathbf{v}}_d = 0$ auf Grund des Mittelwertsatzes, falls $\mathbf{v} \in V_h$ und auf Grund der Randbedingungen, falls $\mathbf{v} \in V \subset X$ (vgl. hierzu auch [8, Kap.4, Abschn.1]). Die Aussagen ergeben damit

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle d\mu &= \sum_{d \in \mathcal{D}_h} \int_d \left[\left\langle \frac{\partial(\mathbf{u} - I_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_d}, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_d \right\rangle \right]_d d\mathcal{H}^1 \\ &\quad - \sum_{d \in \mathcal{D}_h^* \setminus \mathcal{D}_h} \int_d \left\langle \frac{\partial(\mathbf{u} - I_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_d}, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_d \right\rangle d\mathcal{H}^1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

In [8] wird in den oben angegebenen Abschnitten dann gezeigt, dass alle Summanden der rechten Seite durch $\tilde{K} \cdot h |\mathbf{v}|_{H^1(T)^2} |\mathbf{u}|_{H^2(T)^2}$ für ein $\tilde{K} \in \mathbb{R}$ nach oben abgeschätzt werden können, wenn $T \in \mathcal{T}_h$ und $d \subset \partial T$ gilt. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Summen liefert dann, da $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)$,

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle d\mu \right| \leq \tilde{K} \cdot h |\mathbf{v}|_{X_h} |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2}. \quad (3.47)$$

Nun muss noch der Druckterm des Konsistenzfehlers abgeschätzt werden. Es gilt mit Satz 2.2

$$\begin{aligned} & - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle d\mu \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p d\mu - \sum_{d \in \mathcal{D}_h} \int_d [p \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_d \rangle]_d d\mathcal{H}^1 - \sum_{d \in \mathcal{D}_h^* \setminus \mathcal{D}_h} \int_d p \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_d \rangle d\mathcal{H}^1. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Man kann analog zu den Abschätzungen der Geschwindigkeit \mathbf{u} zeigen, dass dann für ein $\tilde{K} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left| \sum_{d \in \mathcal{D}_h} \int_d [p \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_d \rangle]_d d\mathcal{H}^1 + \sum_{d \in \mathcal{D}_h^* \setminus \mathcal{D}_h} \int_d p \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_d \rangle d\mathcal{H}^1 \right| \leq \tilde{K} \cdot h |p|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{v}|_{X_h}. \quad (3.49)$$

Zum Abschätzen des Terms $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p d\mu$ wird die L^2 -Projektion $\pi_h : Y \rightarrow Y_h$ benutzt (siehe [8]), die über $\langle \pi_h w, y_h \rangle_Y := \langle w, y_h \rangle_Y$ für alle $y_h \in Y_h$ definiert ist.

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

Ist $\mathbf{v} \in V$, so verschwindet das Integral auf Grund der Definition von V . Sei daher $\mathbf{v} \in V_h$, dann gilt, da π_h in die stückweise konstanten Funktionen abbildet,

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p \, d\mu &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot (p - \pi_h p) \, d\mu \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|p - \pi_h p\|_{L^2(T)} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(T)} \\
&\stackrel{2ab \leq a^2 + b^2}{\leq} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} 2^{\frac{1}{2}} \cdot \|p - \pi_h p\|_{L^2(T)} |\mathbf{v}|_{H^1(T)} \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}} \cdot \|p - \pi_h p\|_{L^2(\Omega)} |\mathbf{v}|_{X_h} \\
&\leq \tilde{K} \cdot h |p|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{v}|_{X_h}, \quad \text{für ein } \tilde{K} \in \mathbb{R}. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt sei auf [7, Kap.1, Abschn.4] verwiesen. Damit sind alle Terme des Konsistenzfehlers abgeschätzt und der Satz ist bewiesen. \square

Nach Satz 3.4 und Satz 3.5 werden noch zwei Hilfssätze benötigt, um das Hauptergebnis dieses Abschnitts beweisen zu können.

Lemma 3.1. *Die Bezeichnungen seien wie in Satz 3.4 und (\mathbf{u}, p) sei die Lösung des kontinuierlichen Stokes-Problems. Bezeichnet \mathbf{u}_h die Lösung der Geschwindigkeit des diskreten Stokes-Problems (3.22), so gilt*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} \leq 2 \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h} + K \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}^2 + |p|_{H^1(\Omega)} \} \tag{3.51}$$

für ein $K > 0$.

Beweis. Sei $\mathbf{v}_h \neq \mathbf{u}_h \in V_h \subset X_h$ beliebig gewählt und $\mathbf{q}_h := \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h$. Zunächst gilt nach Satz 3.4 $|\mathbf{q}_h|_{X_h}^2 \leq a_h(\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|\mathbf{q}_h|_{X_h}^2 &\leq a_h(\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h) = a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, \mathbf{q}_h) = a_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{q}_h) + a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h) - a_h(\mathbf{u}, \mathbf{q}_h) \\
&= a_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{q}_h) + l_h(\mathbf{q}_h) - a_h(\mathbf{u}, \mathbf{q}_h) \\
&\leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h} |\mathbf{q}_h|_{X_h} + |l_h(\mathbf{q}_h) - a_h(\mathbf{u}, \mathbf{q}_h)| \\
&\leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h} |\mathbf{q}_h|_{X_h} + K \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}^2 + |p|_{H^1(\Omega)} \} |\mathbf{q}_h|_{X_h}. \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Dabei wurde a_h wie a im Beweis von Satz 3.3 bei dem Nachweis der Stetigkeit abgeschätzt und im letzten Schritt Satz 3.5 auf den Konsistenzfehler angewendet. Division durch $|\mathbf{q}_h|_{X_h}$ ergibt

$$|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h|_{X_h} \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h} + K \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}^2 + |p|_{H^1(\Omega)} \}. \tag{3.53}$$

Mit der Dreiecksungleichung gilt zuletzt $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h} + |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h|_{X_h}$, also folgt

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h} + |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h|_{X_h} \leq 2 \cdot |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h} + K \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \}. \quad (3.54)$$

Da dies für beliebiges $\mathbf{v}_h \in V_h$ gilt³, gilt die Gleichung auch für das Infimum über alle $\mathbf{v}_h \in V_h$, womit das Lemma bewiesen ist. □

Lemma 3.2. *Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in Lemma 3.1. Sei zusätzlich $\mathbf{q} \in L^2(\Omega)^2$ und sei (\mathbf{u}_q, p_q) bzw. $(\mathbf{u}_{q,h}, p_{q,h})$ die Lösung des kontinuierlichen Stokes-Problems mit rechter Seite*

$$\tilde{l}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle d\mu = \langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega)^2}, \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in X \quad (3.55)$$

bzw. des diskreten Stokes-Problems mit rechter Seite

$$\tilde{l}_h(\mathbf{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \mathbf{q}, \mathbf{v}_h \rangle d\mu = \langle \mathbf{q}, \mathbf{v}_h \rangle_{L^2(\Omega)^2}, \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in X_h. \quad (3.56)$$

Dann gilt für den Fehler

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} &\leq \sup_{\substack{\mathbf{q} \in L^2(\Omega)^2, \\ \|\mathbf{q}\|_{L^2(\Omega)^2} = 1}} \{ |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} |\mathbf{u}_q - \mathbf{u}_{q,h}|_{X_h} \\ &\quad + K \cdot h \{ |\mathbf{u}_q|_{H^2(\Omega)^2} + |p_q|_{H^1(\Omega)} \} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} \\ &\quad + K \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} |\mathbf{u}_q - \mathbf{u}_{q,h}|_{X_h} \}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Beweis. Zunächst gilt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für gegebenes $\mathbf{q} \in L^2(\Omega)^2$ mit $\|\mathbf{q}\|_{L^2(\Omega)^2} = 1$

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \rangle_{L^2(\Omega)^2} \leq 1 \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2}. \quad (3.58)$$

Da $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) / \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} \in L^2(\Omega)^2$, gilt also

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} = \sup_{\substack{\mathbf{q} \in L^2(\Omega)^2, \\ \|\mathbf{q}\|_{L^2(\Omega)^2} = 1}} \langle \mathbf{q}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \rangle_{L^2(\Omega)^2}. \quad (3.59)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \rangle_{L^2(\Omega)^2} &= \langle \mathbf{q}, \mathbf{u} \rangle_{L^2(\Omega)^2} - \langle \mathbf{q}, \mathbf{u}_h \rangle_{L^2(\Omega)^2} \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u}_q) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{q,h}) \\ &= a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_q) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{q,h}) \\ &= a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_q - \mathbf{u}_{q,h}) + a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{q,h}) + a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_q - \mathbf{u}_{q,h}). \end{aligned} \quad (3.60)$$

³Der Fall $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ ergibt die Abschätzung trivialerweise mit der Dreiecksungleichung.

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

Für die beiden letzten Summanden gilt

$$\begin{aligned}
a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_\mathbf{q} - \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) &= a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_\mathbf{q}) - a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\mathbf{q}) + a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\mathbf{q}) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) \\
&= a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_\mathbf{q}) - a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\mathbf{q}) + \langle \mathbf{u}, \mathbf{q} \rangle_{L^2(\Omega)^2} - \langle \mathbf{u}_h, \mathbf{q} \rangle_{L^2(\Omega)^2} \\
&= -a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_\mathbf{q}) + \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{q} \rangle_{L^2(\Omega)^2}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

und

$$\begin{aligned}
a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) &= a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) - a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\mathbf{q}) + a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\mathbf{q}) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) \\
&= -a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\mathbf{q} - \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) + l_h(\mathbf{u}_\mathbf{q}) - l_h(\mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) \\
&= -a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\mathbf{q} - \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) + l_h(\mathbf{u}_\mathbf{q} - \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Es sei hierbei angemerkt, dass wegen $\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{\mathbf{q},h} \in V_h$ nur die Formulierung aus Gleichung (3.40) betrachtet werden muss. Wegen $\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{q} \rangle_{L^2(\Omega)^2} = \tilde{l}(\mathbf{u}) - \tilde{l}_h(\mathbf{u}_h) = \tilde{l}_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \rangle_{L^2(\Omega)^2} &\leq a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_\mathbf{q} - \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) \\
&\quad + |a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\mathbf{q} - \mathbf{u}_{\mathbf{q},h}) - l_h(\mathbf{u}_\mathbf{q} - \mathbf{u}_{\mathbf{q},h})| \\
&\quad + |a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_\mathbf{q}) - \tilde{l}_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)|.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Die Anwendung der Stetigkeit von a_h für den ersten Summanden und des Satzes 3.5 für die beiden letzten Summanden sowie anschließende Bildung des Supremums ergibt schließlich die behauptete Abschätzung. \square

Nun kann das Hauptergebnis dieses Abschnitts bewiesen werden.

Satz 3.6. *Seien \mathbf{u} und p wie in Satz 3.5 und sei (\mathbf{u}_h, p_h) die eindeutige Lösung des diskreten Stokes-Problems (3.22). Dann gelten für konvexes Ω , also insbesondere das hier gewählte $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ die folgenden Fehlerabschätzungen:*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq K_1 h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} \tag{3.64}$$

und

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} \leq K_2 h^2 \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} \tag{3.65}$$

für zwei Konstanten $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es werden zunächst die Geschwindigkeitsterme abgeschätzt. Unter Benutzung der beiden vorangegangenen Lemmata ergeben sich sofort

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} \leq 2 \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h} + K \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} \tag{3.66}$$

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

und mit denselben Bezeichnungen wie in Lemma 3.2

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} &\leq \sup_{\substack{\mathbf{q} \in L^2(\Omega)^2, \\ \|\mathbf{q}\|_{L^2(\Omega)^2} = 1}} \{ |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} | \mathbf{u}_{\mathbf{q}} - \mathbf{u}_{\mathbf{q},h} |_{X_h} \\ &\quad + K \cdot h \{ |\mathbf{u}_{\mathbf{q}}|_{H^2(\Omega)^2} + |p_{\mathbf{q}}|_{H^1(\Omega)} \} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} \\ &\quad + K \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} |\mathbf{u}_{\mathbf{q}} - \mathbf{u}_{\mathbf{q},h} |_{X_h} \}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Um die Terme proportional zu $|\mathbf{u}_{\mathbf{q}}|_{H^2(\Omega)^2} + |p_{\mathbf{q}}|_{H^1(\Omega)}$ abschätzen zu können, sei auf Satz 3.5 aus [7, Kap.3] verwiesen. Auf Grund der Konvexität von Ω garantiert der Satz, dass diese Terme durch $\tilde{K}_1 \cdot \|\mathbf{q}\|_{L^2(\Omega)^2}$ für ein $\tilde{K}_1 \in \mathbb{R}$ nach oben abgeschätzt werden können.

Als nächstes wird $2 \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h}$ nach oben abgeschätzt. Dazu sei der Operator $E_h : X \rightarrow X_h$ wie in Satz 3.4 und der Interpolationsoperator $I_h : X \cap H^2(\Omega)^2 \rightarrow (X_h \cap C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1)^2$ wie in Satz 3.5 definiert. Wegen $\mathbf{u} \in V$, ist $E_h \mathbf{u} \in V_h$ und es gilt folglich $\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{X_h} \leq |\mathbf{u} - E_h \mathbf{u}|_{X_h}$. Da der Interpolationsoperator in den Raum X_h abbildet, dessen Funktionen stückweise linear sind, gilt $E_h I_h \mathbf{u} = I_h \mathbf{u}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - E_h \mathbf{u}|_{X_h} &\leq |\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}|_{X_h} + |I_h \mathbf{u} - E_h \mathbf{u}|_{X_h} \\ &= |\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}|_{X_h} + |E_h(I_h \mathbf{u} - \mathbf{u})|_{X_h}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Gleichung (3.33) aus dem Beweis des Satzes 3.4 ergibt dann

$$|\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}|_{X_h} + |E_h(I_h \mathbf{u} - \mathbf{u})|_{X_h} \leq |\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}|_{X_h} + |I_h \mathbf{u} - \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^2}. \quad (3.69)$$

Da außerdem $|\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}|_{X_h} = |\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^2}$, folgt

$$|\mathbf{u} - E_h \mathbf{u}|_{X_h} \leq 2 |\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^2} \leq \tilde{K}_2 \cdot h |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2}, \quad (3.70)$$

wobei im letzten Schritt wieder auf [7, Kap.1, Abschn.4] verwiesen wird.

Insgesamt ergeben sich bei Zusammenfassung aller Abschätzungen die beiden Ungleichungen

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} \leq \tilde{K}_3 \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} \quad (3.71)$$

und

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} \leq K_2 h^2 \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \}. \quad (3.72)$$

Die Geschwindigkeitsabschätzungen sind damit bewiesen. Nun muss noch der Fehler des Drucks abgeschätzt werden. Hierzu bezeichne zunächst $\pi_h : Y \rightarrow Y_h$ die L^2 -Projektion wie in Satz 3.5. Die Dreiecksungleichung ergibt

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|p - \pi_h p\|_{L^2(\Omega)} + \|\pi_h p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.73)$$

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

und mit Verweis auf die Voraussetzung an p sowie [7, Kap.1,Abschn.4] gilt

$$\|p - \pi_h p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{K}_4 \cdot h|p|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.74)$$

Für die weiteren Schritte sei auf die inf-sup-Bedingung des Satzes 3.4 erinnert. Die Konstante aus der inf-sup-Bedingung sei \tilde{c} , dann gilt

$$\tilde{c} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h p - p_h)}{|\mathbf{v}_h|_{X_h} \cdot \|\pi_h p - p_h\|_{L^2(\Omega)}} \quad (3.75)$$

und nach Multiplikation mit $\|p - \pi_h p_h\|_{L^2(\Omega)}$ bzw. Division durch \tilde{c}

$$\|\pi_h p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\tilde{c}} \cdot \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h p - p_h)}{|\mathbf{v}_h|_{X_h}} = \frac{1}{\tilde{c}} \cdot \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}, \\ |\mathbf{v}_h|_{X_h} = 1}} b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h p - p_h), \quad (3.76)$$

das heißt, es reicht aus, die rechte Seite der letzten Ungleichung abzuschätzen. Sei dazu $\mathbf{v}_h \in X_h$ mit $|\mathbf{v}_h|_{X_h} = 1$. Es ist

$$b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h p - p_h) = b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h p - p) + b_h(\mathbf{v}_h, p - p_h). \quad (3.77)$$

Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung und wie in den Abschätzungen zuvor gilt

$$\begin{aligned} |b_h(\mathbf{v}_h, \pi_h p - p)| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\pi_h p - p) \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mu \right| \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_{L^2(T)} \cdot \|\pi_h p - p\|_{L^2(T)} \\ &\stackrel{2ab \leq a^2 + b^2}{\leq} 2^{\frac{1}{2}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v}_h|_{H^1(T)^2} \cdot \|\pi_h p - p\|_{L^2(T)} \\ &\leq |\mathbf{v}_h|_{X_h} \cdot \|\pi_h p - p\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{K}_5 \cdot h|p|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Für den zweiten Summanden gilt unter Benutzung von $\mathbf{f} = -\Delta \mathbf{u} + \nabla p$

$$\begin{aligned} b_h(\mathbf{v}_h, p - p_h) &= b_h(\mathbf{v}_h, p) + a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - l_h(\mathbf{v}_h) \\ &= a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}_h \rangle + \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}_h \rangle - p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}_h - \langle \nabla p, \mathbf{v}_h \rangle \, d\mu. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Der Vergleich mit den Gleichungen (3.47), (3.49) und (3.50) zeigt unter Zuhilfenahme der Geschwindigkeitsabschätzungen zunächst die Abschätzung der rechten Summe durch

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}_h \rangle - p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}_h - \langle \nabla p, \mathbf{v}_h \rangle d\mu \leq \tilde{K}_6 \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} \quad (3.80)$$

unter Verwendung der Tatsache, dass $|\mathbf{v}_h|_{X_h} = 1$ gilt. Der linke Term kann wegen der Stetigkeit von a_h durch

$$a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \leq |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{X_h} \leq \tilde{K}_7 \cdot h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} \quad (3.81)$$

abgeschätzt werden. Damit ist schließlich die Abschätzung von $\|p - \pi_h p_h\|_{L^2(\Omega)}$ ebenso bewiesen. Nimmt man das Maximum über die bei allen Abschätzungen benötigten Konstanten, so kann das Hauptergebnis nochmals zusammengefasst werden. Es gelten

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{X_h} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq K_1 h \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} \quad (3.82)$$

und

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} \leq K_2 h^2 \{ |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)^2} + |p|_{H^1(\Omega)} \} \quad (3.83)$$

für zwei Konstanten $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Es sei angemerkt, dass die zweite Gleichung impliziert, dass die L^2 -Norm im Limes $h \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert. Demnach gibt es eine Teilfolge (\mathbf{u}_h^*) von \mathbf{u}_h , die sogar punktweise f.ü. gegen die Lösung \mathbf{u} des kontinuierlichen Problems konvergiert (zu beachten ist hierbei, dass im Rahmen dieser Arbeit bisher immer $h = \frac{1}{l}$ für ein $l \in \mathbb{N}$ angenommen wurde). □

3.2.2 Numerische Studie der Methode

Die Fehlerabschätzungen aus Satz 3.6 des vorangegangenen Abschnitts sollen nun anhand dreier Beispiele mit numerisch erhaltenen Ergebnissen überprüft werden. Es sei zunächst an die schwache Formulierung des Stokes-Problems erinnert.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$. Dann finde $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$ und $p \in L_0^2(\Omega)$, so dass für alle $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$ und alle $w \in L_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle d\mu - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p d\mu &= \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle d\mu \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot w d\mu &= 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

gilt. Das hier gewählte Gebiet sei wie im vorherigen Abschnitt $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Vorbereitend auf Kapitel 4 sei weiterhin eine Definition und folgender Satz gegeben (siehe [3, Kap.2])

Definition 3.1. Der Operator $\operatorname{curl} : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^2$ ist für $v \in H_0^1(\Omega)$ definiert durch

$$\operatorname{curl} v := (\partial_2 v, -\partial_1 v)^T. \quad (3.85)$$

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

Es gilt folgender

Satz 3.7 (Helmholtz-Zerlegung). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2$. Dann lässt sich \mathbf{v} schreiben als*

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \operatorname{curl}\psi, \quad (3.86)$$

und es gilt $\varphi \in H^1(\Omega)$ mit

$$\langle \nabla\varphi, \nabla\mu \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathbf{v}, \nabla\mu \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \mu \in H^1(\Omega) \quad (3.87)$$

sowie $\psi \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\langle \operatorname{curl}\psi, \operatorname{curl}\chi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathbf{v} - \nabla\varphi, \operatorname{curl}\chi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \chi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.88)$$

Jedes Vektorfeld aus $L^2(\Omega)^2$ setzt sich also aus einem Gradienten- und einem Rotationsanteil zusammen. In den folgenden drei Beispielen sollen sich die rechten Seiten⁴ \mathbf{f}_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, der Stokes-Gleichungen nur im Gradientenanteil unterscheiden. Die Funktionen werden genau so konstruiert, dass die exakten Lösungen der klassischen Stokes-Gleichungen sofort bekannt sind, d.h. \mathbf{f}_i wird für zwei gegebene Funktionen als $-\Delta\mathbf{u} + \nabla p_i$ definiert. Zunächst wird dazu eine divergenzfreie, vektorwertige Funktion \mathbf{u} konstruiert. Es wird folgender Ansatz gemacht:

$$\mathbf{u} := \operatorname{curl}r. \quad (3.89)$$

Dabei ist $r(x, y) = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ ein Polynom 8-ten Grades. Durch diesen Ansatz ergibt sich für die Divergenz von \mathbf{u}

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \partial_1(\partial_2r(x, y)) + \partial_2(-\partial_1r(x, y)) = \partial_1\partial_2r(x, y) - \partial_1\partial_2r(x, y) = 0, \quad (3.90)$$

weil r glatt ist und die (klassischen) partiellen Ableitungen $\partial_i(\cdot)$ somit vertauscht werden dürfen. Als nächstes wird eine Funktion für den Druck p konstruiert, die in $L_0^2(\Omega)$ liegt. Auch hier soll p der Einfachheit halber ein Polynom sein. Die Bedingung, dass $p \in L_0^2(\Omega)$ ist, kann auf einfache Weise dadurch erfüllt werden, in dem zunächst ein Polynom-Ansatz \tilde{p} gemacht wird. Die Druckfunktion p wird dann erhalten, in dem $p(x, y) := \tilde{p}(x, y) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{p} d\mu$ definiert wird. Im ersten Beispiel sei

$$p_1(x, y) := 0 \quad (3.91)$$

und im zweiten bzw. dritten Beispiel sei

$$p_2(x, y) := 100 \cdot (x(1-x)y(1-y) - 1/36) \quad (3.92)$$

bzw.

⁴Im Folgenden wird hiermit abkürzend die Funktion \mathbf{f} des Integranden der rechten Seite der Stokes-Gleichungen gemeint.

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

$$p_3(x, y) := 10^6 \cdot (x(1-x)y(1-y) - 1/36). \quad (3.93)$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\int_{\Omega} p_i d\mu = 0 \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.94)$$

Schließlich werden die Funktionen \mathbf{f}_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, der rechten Seite des Stokes-Problems wie oben bemerkt definiert:

$$\mathbf{f}_i := -\Delta \mathbf{u} + \nabla p_i. \quad (3.95)$$

Die Funktionen (\mathbf{u}, p_i) , $i \in \{1, 2, 3\}$, entsprechen damit den Lösungen der klassischen Stokes-Gleichungen mit rechten Seiten \mathbf{f}_i . Da alle Funktionen hinreichend glatt sind, entsprechen die Lösungen (\mathbf{u}, p_i) auch den schwachen Lösungen. Es ergibt sich für die Komponenten der rechten Seiten

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_i)_1 &= -4 \cdot (2y - 1) \cdot (y^2 + 6x^2y^2 - 6xy^2 - y - 6x^2y + 6xy + 3x^2 - 6x^3 + 3x^4) \\ &\quad + c_i \cdot (1 - 2x) \cdot y \cdot (1 - y) \\ (\mathbf{f}_i)_2 &= 4 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - 6x^2y + 6x^2y^2 - x + 6xy - 6xy^2 + 3y^2 + 3y^4 - 6y^3) \\ &\quad + c_i \cdot x \cdot (1 - x) \cdot (1 - 2y), \end{aligned} \quad (3.96)$$

wobei $c_1 = 0$, $c_2 = 100$ und $c_3 = 10^6$ sind.

Die numerische Lösung wird durch die Lösung der Diskretisierung des Stokes-Problems gemäß Abschnitt 3.2.1 bestimmt. Die Funktionen \mathbf{u}_h bzw. p_h werden im Lösungsansatz als Linearkombinationen der in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Basisfunktionen der Räume X_h bzw. Y_h dargestellt. Um die Koeffizienten der Linearkombinationen zu bestimmen, wird dann ein lineares Gleichungssystem gemäß

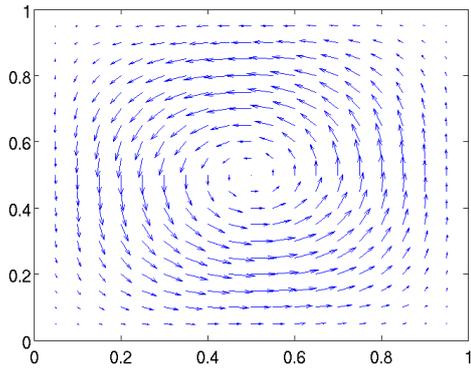
$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_h(\mathbf{v}, p) &= l_h(\mathbf{v}), \\ b_h(\mathbf{u}, w) &= 0. \end{aligned} \quad (3.97)$$

mit

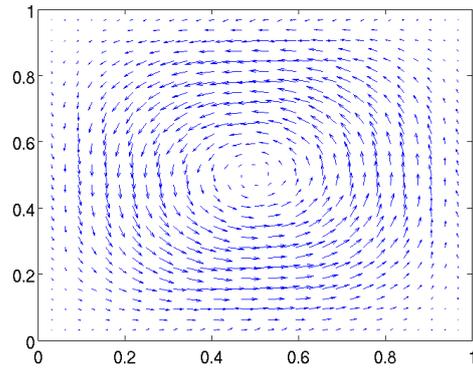
$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h \rangle d\mu, \\ b_h(\mathbf{u}_h, p_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{u}_h \cdot p_h d\mu, \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$l_h(\mathbf{u}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \mathbf{u}_h, \mathbf{f} \rangle d\mu \quad (3.99)$$

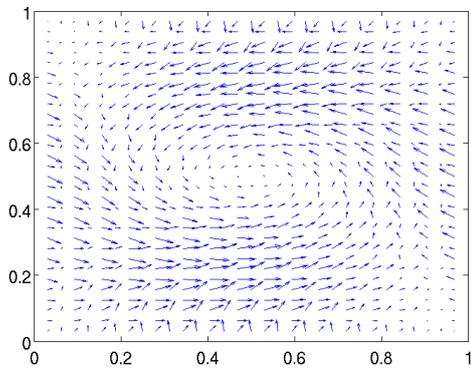
3 Die stationären Stokes-Gleichungen



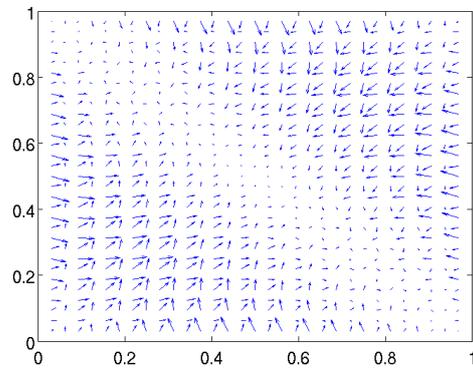
(a) Exakte Geschwindigkeit \mathbf{u} .



(b) Numerische Lösung \mathbf{u}_h mit rechter Seite \mathbf{f}_1 .



(c) Numerische Lösung \mathbf{u}_h mit rechter Seite \mathbf{f}_2 .



(d) Numerische Lösung \mathbf{u}_h mit rechter Seite \mathbf{f}_3 .

Abbildung 3.2: Exakte Geschwindigkeit \mathbf{u} und numerisch berechnete Geschwindigkeitsfelder \mathbf{u}_h mit Gitterweite $h = \frac{1}{16}$.

aufgestellt. Anschließend können die Normen $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{X_h}$, $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2}$ numerisch berechnet werden. Die Implementierungen aller im Rahmen dieser Arbeit benötigten Methoden erfolgte mit MATLAB. Die Quelltexte der wichtigsten benutzten Methoden befinden sich im Anhang 6. Gleichungssysteme werden in den Methoden mit dem MATLAB-Befehl "\ (Backslash) gelöst. Integrale wurden für die in diesem Kapitel dargestellten numerischen Ergebnisse mit Hilfe von Quadraturformeln 5. Ordnung berechnet (siehe [9, Kap.9]).

Bevor die Ergebnisse der Fehlernormen diskutiert werden, sollen zunächst die numerisch bestimmten Geschwindigkeitsfelder der drei Beispiele im Vergleich zur exakten Geschwindigkeit gezeigt werden. Diese befinden sich für die Gitterweite $h = \frac{1}{16}$ in Abbildung 3.2. Die Bilder lassen bei dem Vergleich zwischen exakter und numerisch bestimmter Geschwindigkeit deutlich erkennen, dass die Abweichung zwischen exakter und numerischer Lösung mit steigendem Druck zunimmt. Dies ist in Übereinstimmung mit den Fehlerabschätzungen aus Satz 3.6. Da die obere Schranke der Fehler von der H^1 -Norm des

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

Drucks p abhängt und die Drücke p_i der Beispiele mit zunehmendem i größer werden, ist zu erwarten, dass auch die Fehler zwischen der exakten und den numerisch bestimmten Geschwindigkeiten zunehmen. Die berechneten Fehler der drei Beispiele in Abhängigkeit der Gitterweite h befinden sich in den Tabellen 3.1, 3.2 und 3.3. Bei allen Beispielen lässt sich die lineare Konvergenzordnung der Geschwindigkeit in der X_h -Norm und die quadratische Konvergenzordnung der L^2 -Norm beobachten, was gemäß den Fehlerabschätzungen aus Satz 3.6 erwartet wird. Auch die lineare Konvergenzordnung des Druckfehlers wird deutlich. Exemplarisch sind die Fehler der beiden feinsten Gitter des ersten Beispiels graphisch in Abbildung 3.3 zu sehen. Die Geraden entsprechen mit MATLAB berechneten linearen Regressionen. Die Darstellung ist doppellogarithmisch, so dass die Steigungen der Graphen die Konvergenzordnungen angeben. Wie schon bei der graphischen Darstellung der Geschwindigkeitsfelder deutlich wurde, nimmt der Geschwindigkeitsfehler mit größer werdendem Druck in Übereinstimmung mit den Fehlerabschätzungen aus Satz 3.6 zu. Die exakte Geschwindigkeit \mathbf{u} des Stokes-Problems ist jedoch in allen Beispielen dieselbe. Interpretiert man die Beispiele als Modellierungen bestimmter physikalischer Systeme, bedeutet dies, dass die Methode die Situationen nicht verlässlich simulieren kann. Dies stellt ein praktisches Problem dar, welches nach Möglichkeit vermieden werden sollte. Wünschenswert wäre es, eine Methode angeben zu können, bei der zwar die Konvergenzordnungen für die Fehler der Geschwindigkeit wie in den Abschätzungen aus Satz 3.6 erhalten bleiben, bei der aber die Geschwindigkeitsfehler nicht mehr von dem Fehler des Drucks abhängen. Ein Ansatz für solch eine Methode wird in Kapitel 4 vorgestellt und numerisch anhand der hier behandelten Beispiele untersucht.

3 Die stationären Stokes-Gleichungen

h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}$	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{X_h}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
0.25	0.008948571284762	0.098288462658135	0.095452656839553
0.125	0.002788386373344	0.053982408333072	0.048091048122534
0.0625	7.658052298114011e-04	0.027921667034641	0.022922406628642
0.03125	1.971181882944330e-04	0.014101310103717	0.011161214632537
0.015625	4.967007640367334e-05	0.007069460842952	0.005531672497883

Tabelle 3.1: Fehler zwischen analytischer Lösung (\mathbf{u}, p) und numerischer Lösung (\mathbf{u}_h, p_h) mit rechter Seite \mathbf{f}_1 .

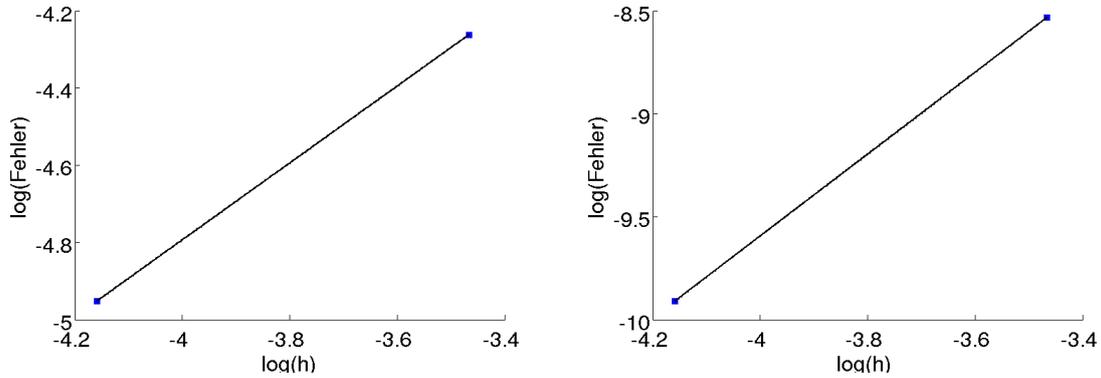
h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}$	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{X_h}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
0.25	0.087351803133336	0.926591775404715	0.950908605938613
0.125	0.027347480104010	0.511735469207213	0.478954204627889
0.0625	0.007523006530653	0.265243365779622	0.228271152103115
0.03125	0.001937261066399	0.134040514946990	0.111143929435318
0.015625	4.882076900466271e-04	0.067210383123744	0.055083870812980

Tabelle 3.2: Fehler zwischen analytischer Lösung (\mathbf{u}, p) und numerischer Lösung (\mathbf{u}_h, p_h) mit rechter Seite \mathbf{f}_2 .

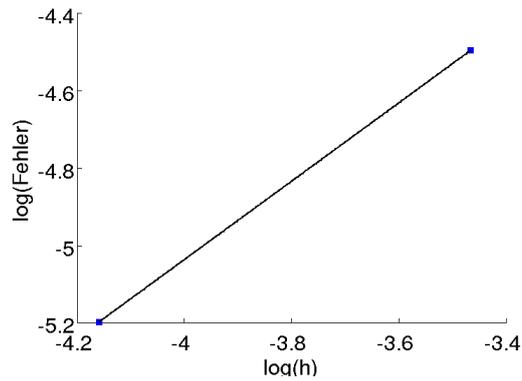
h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}$	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{X_h}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
0.25	8.732998248628583e+02	9.260057029989490e+03	9.508719906364078e+03
0.125	2.734200840670421e+02	5.114438761217760e+03	4.789344034937319e+03
0.0625	75.216300625882525	2.650984638892394e+03	2.282615064131007e+03
0.03125	19.369154013438578	1.339682334606627e+03	1.111391899088516e+03
0.015625	4.881211475426340	6.717426698166273e+02	5.508151372889553e+02

Tabelle 3.3: Fehler zwischen analytischer Lösung (\mathbf{u}, p) und numerischer Lösung (\mathbf{u}_h, p_h) mit rechter Seite \mathbf{f}_3 .

3 Die stationären Stokes-Gleichungen



(a) X_h -Fehlernorm zwischen \mathbf{u} und \mathbf{u}_h . Die Steigung m der von MATLAB berechneten Regressionsgeraden entspricht $m = 0.996157108370060$. (b) L^2 -Fehlernorm zwischen \mathbf{u} und \mathbf{u}_h . Die Steigung m der von MATLAB berechneten Regressionsgeraden entspricht $m = 1.988612030375877$.



(c) L^2 -Fehlernorm zwischen p und p_h . Die Steigung m der von MATLAB berechneten Regressionsgeraden entspricht $m = 1.012706389210878$.

Abbildung 3.3: Geschwindigkeits- und Druckfehler des Stokes-Problems mit rechter Seite \mathbf{f}_1 in Abhängigkeit der Gitterweite h .

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion

Auf Grund der in Abschnitt 3.2.2 deutlich gewordenen Problematik der Druckabhängigkeit der Geschwindigkeitsfehler der nicht-konformen Finite-Element-Methode wird in diesem Kapitel eine divergenzfreie Rekonstruktion vorgestellt, welche dieses Problem lösen soll. Die Idee besteht darin, zu versuchen, die Druckabhängigkeit der Geschwindigkeit dadurch zu vermeiden, dass die rechte Seite des diskreten Stokes-Problems verändert wird. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels soll diese Idee genauer erläutert und der Ansatz hergeleitet werden. Im zweiten Abschnitt werden die Beispiele aus Abschnitt 3.2.2 mit der neuen Methode berechnet und ausgewertet.

4.1 Motivation und Ansatz der Rekonstruktion

Die Druckabhängigkeit des Geschwindigkeitsfehlers stellt ein Problem dar, insbesondere dann, wenn sich die exakte Geschwindigkeit \mathbf{u} des Stokes-Problems nicht ändert. Die Ursache des Problems besteht darin, dass sich der Gradientenanteil der Helmholtz-Zerlegung der rechten Seite \mathbf{f} ändert, was zu einer Änderung der numerisch berechneten Geschwindigkeit \mathbf{u}_h führt. Eine Änderung der rechten Seite $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} + \nabla\chi$, $\chi \in L_0^2(\Omega)$, hat auf die exakte Lösung des Stokes-Problems jedoch keinen Einfluss (siehe hierzu und für das Folgende [6]). Dies sieht man wie folgt:

Zunächst sei an die variationelle Formulierung des Stokes-Problems erinnert. Seien $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ wie in den vorherigen Abschnitten beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$. Dann finde $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$ und $p \in L_0^2(\Omega)$, so dass für alle $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$ und alle $w \in L_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle d\mu - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p d\mu &= \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle d\mu, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot w d\mu &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

gilt.

Auf Grund des Satzes von Lax-Milgram 2.4 reicht es zur Bestimmung der Geschwindigkeit aus, das folgende Problem zu lösen:

Sei $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ und $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$. Dann finde $\mathbf{u} \in V$, so dass für alle $\mathbf{v} \in V$

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle d\mu = \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle d\mu \quad (4.2)$$

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion

gilt, wobei, wie in Abschnitt 3.1.2, die Definition des Raums V durch $V := \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \text{ mit } \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot w \, d\mu = 0 \text{ für alle } w \in L_0^2(\Omega)\}$ gegeben ist. Wird die rechte Seite \mathbf{f} im Gradientenanteil gemäß $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} + \nabla\chi$ geändert, so gilt für die rechte Seite

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \, d\mu &\rightarrow \int_{\Omega} \langle \mathbf{f} + \nabla\chi, \mathbf{v} \rangle \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \, d\mu + \int_{\Omega} \langle \nabla\chi, \mathbf{v} \rangle \, d\mu. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da $\mathbf{v} \in V$, gilt für den letzten Summanden unter Anwendung des Satzes 2.2

$$\int_{\Omega} \langle \nabla\chi, \mathbf{v} \rangle \, d\mu = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \chi \, d\mu = 0, \quad (4.4)$$

also ändert sich das Gleichungssystem (4.2) für eine Transformation $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} + \nabla\chi$ nicht. Für die in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte Methode gilt diese Invarianz allerdings nicht. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.2.1 lautet das diskrete Problem

Finde $\mathbf{u}_h \in V_h$, so dass für alle $\mathbf{v}_h \in V_h$ gilt:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h \rangle \, d\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \, d\mu. \quad (4.5)$$

Bei Transformation der rechten Seite gemäß $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} + \nabla\chi$ ergibt sich hier

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \, d\mu &\rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \mathbf{f} + \nabla\chi, \mathbf{v}_h \rangle \, d\mu \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \, d\mu + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla\chi, \mathbf{v}_h \rangle \, d\mu. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Für den letzten Summanden gilt unter Verwendung des Satzes 2.2

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla\chi, \mathbf{v}_h \rangle \, d\mu &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\chi \mathbf{v}_h) \, d\mu - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{v}_h \cdot \chi \, d\mu \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\chi \mathbf{v}_h) \, d\mu = \sum_{d \in \mathcal{D}_h} \int_d [\chi \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{n}_d \rangle]_d \, d\mathcal{H}^1 \\ &\quad + \sum_{d \in \mathcal{D}_h^* \setminus \mathcal{D}_h} \int_d \chi \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{n}_d \rangle \, d\mathcal{H}^1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Der Summand $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \mathbf{v}_h \cdot \chi \, d\mu$ verschwindet, da $\mathbf{v}_h \in V_h$, d.h., $\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h = 0$. Die Terme der Randintegrale verschwinden im Allgemeinen jedoch nicht, da die Basisfunktionen des Raums X_h im Allgemeinen nicht-verschwindende Sprünge an den Dreieckskanten besitzen, wie in Abschnitt 3.2.1 angedeutet wurde. Dieses Problem motiviert den Ansatz, das diskrete Problem wie folgt umzuformulieren (vgl. [6]):

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion

Finde $\mathbf{u}_h \in V_h$, so dass für alle $\mathbf{v}_h \in V_h$ gilt:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h \rangle d\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \mathbf{f}, R_h \mathbf{v}_h \rangle d\mu \quad (4.8)$$

mit einem geeigneten Rekonstruktionsoperator R_h .

Der im Folgenden benutzte Ansatz für den Operator R_h soll zwei Bedingungen erfüllen:

- (1) Für die stückweise Divergenz von $(\operatorname{div} R_h \mathbf{v}_h)|_T$, $T \in \mathcal{T}_h$,
soll gelten $(\operatorname{div} R_h \mathbf{v}_h)|_T = (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)|_T$.
- (2) Die Normalkomponente von $R_h \mathbf{v}_h$ soll konstant auf allen Dreieckskanten
 $d \in \mathcal{D}_h^*$ sein mit $\langle (R_h \mathbf{v}_h)|_d, \mathbf{n}_d \rangle = \langle \mathbf{v}_h(\mathbf{m}_d), \mathbf{n}_d \rangle$. (4.9)

Die Bedingungen sollen erfüllt werden, indem R_h in den Raum der *Raviart-Thomas-Elemente* abbildet:

$$RT_h := \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \text{ mit } \mathbf{v}|_T = \mathbf{a}_T + c_T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) \text{ und } \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_d \rangle \text{ ist stetig über Dreiecksgrenzen, } T \in \mathcal{T}_h \}. \quad (4.10)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{x}_T das Baryzentrum des Dreiecks $T \in \mathcal{T}_h$. Als erste Bemerkung ist festzuhalten, dass die Normalkomponenten für gegebenes Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ eines Elements $\mathbf{v} \in RT_h$ konstant sind. Dies liegt daran, dass die Normalkomponente $\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_T, \mathbf{n}_d \rangle$ für gegebene Kante $d \in \mathcal{D}_h^*$, $\mathbf{x} \in d$ mit $d \cap \partial T \neq \emptyset$, dem Abstand zwischen Baryzentrum \mathbf{x}_T und Kante d entspricht, somit konstant ist. Da die Elemente $\mathbf{v}_h \in V_h \subset X_h$ gerade so definiert sind, dass sie stetig im Kantenmittelpunkt \mathbf{m}_d einer Kante d eines Dreiecks T sind, folgt sofort die Stetigkeit der Normalkomponenten eines Elements \mathbf{v} der Form $\mathbf{v}|_T = \mathbf{a}_T + c_T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)$, wenn die erste Bedingung aus (4.9) erfüllt ist.

Um die Bedingungen (4.9) zu erfüllen, müssen die freien Parameter \mathbf{a}_T und c_T für gegebenes Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ geeignet gewählt werden. Im Folgenden bezeichne $(\varphi_{i,h})$ die in Abschnitt 3.2.1 angegebene Basis von X_h . Gelten die Bedingungen (4.9) für alle $\varphi_{i,h}$, so gelten sie sicherlich auch für die Funktionen $\mathbf{v}_h \in V_h \subset X_h$, da solch ein \mathbf{v}_h als Linearkombination der Basiselemente dargestellt wird. Sei also $T \in \mathcal{T}_h$ fest gewählt, $\varphi_{i,h}$ sei eines der sechs auf T nicht-verschwindenden Basiselemente und sei $R_h \varphi_{i,h} = \mathbf{a}_T + c_T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)$. Offenbar gilt

$$\operatorname{div} R_h \varphi_{i,h} = c_T + c_T = 2c_T \quad (4.11)$$

und damit $c_T = \frac{1}{2} \operatorname{div} R_h \varphi_{i,h}$. Die erste Bedingung aus (4.9) verlangt daher $c_T = \frac{1}{2} \operatorname{div}(\varphi_{i,h})$. Da $\varphi_{i,h}$ linear ist, ist $\operatorname{div}(\varphi_{i,h})$ konstant. Mit Satz 2.2 und der Mittelpunktsregel gilt

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion

$$\begin{aligned}
|T| \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_{i,h}) &= \int_T \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_{i,h}) d\mu = \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} \int_d \langle \boldsymbol{\varphi}_{i,h}, \mathbf{n}_d \rangle d\mathcal{H}^1 \\
&= \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} |d| \langle \boldsymbol{\varphi}_{i,h}(\mathbf{m}_d), \mathbf{n}_d \rangle, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

also muss gelten

$$c_T = \frac{1}{2|T|} \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} |d| \langle \boldsymbol{\varphi}_{i,h}(\mathbf{m}_d), \mathbf{n}_d \rangle. \tag{4.13}$$

Für die Bedingung an \mathbf{a}_T sei zunächst bemerkt, dass gilt $\mathbf{x}_T = \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{x} d\mu$. Um dies zu zeigen, sei $T_0 \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(h,0)$, (h,h) , $h \in \mathbb{R}$. Da Rotationen und Translationen keinen Einfluss auf das Integral haben, weil die zugehörigen Jacobi-Determinanten den Wert 1 besitzen, ist es hinreichend, dieses spezielle Dreieck zu betrachten. Es gilt mit dem Satz von Fubini

$$\frac{1}{|T_0|} \int_{T_0} \mathbf{x} d\mu = \frac{1}{|T_0|} \int_0^h \int_0^x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} dx_2 dx_1 = \frac{1}{|T_0|} \int_0^h \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \frac{1}{2}x_1^2 \end{pmatrix} dx_1 = \frac{1}{|T_0|} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}h^3 \\ \frac{1}{6}h^3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_T. \tag{4.14}$$

Aus dieser Aussage folgt sofort, dass

$$\mathbf{a}_T = \frac{1}{|T|} \int_T R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} d\mu. \tag{4.15}$$

Weiterhin gilt für $j \in \{1,2\}$, dass $\operatorname{div}(x_j R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}) = x_j \operatorname{div} R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} + (R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h})_j$, woraus unter Ausnutzung des Satzes 2.2 folgt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|T|} \int_T (R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h})_j d\mu &= \frac{1}{|T|} \int_T \operatorname{div}(x_j R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}) d\mu - \frac{1}{|T|} \int_T x_j \operatorname{div} R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} d\mu \\
&= \frac{1}{|T|} \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} \int_d \langle x_j R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}, \mathbf{n}_d \rangle d\mathcal{H}^1 - \operatorname{div} R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} \cdot (\mathbf{x}_T)_j, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

da $\operatorname{div} R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}$ konstant ist. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Normalkomponenten von $R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}$ konstant sind, folgt weiter mit der Mittelpunktsregel

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|T|} \int_T (R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h})_j d\mu &= \frac{1}{|T|} \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} \int_d \langle x_j R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}, \mathbf{n}_d \rangle d\mathcal{H}^1 - \operatorname{div} R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} \cdot (\mathbf{x}_T)_j \\
&= \frac{1}{|T|} \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} |d| (\mathbf{m}_d)_j \langle R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}, \mathbf{n}_d \rangle - \operatorname{div} R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} \cdot (\mathbf{x}_T)_j \tag{4.17}
\end{aligned}$$

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion

und wird zuletzt die Bedingung für c_T eingesetzt, ergibt sich für \mathbf{a}_T

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_T &= \frac{1}{|T|} \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} |d| \langle \boldsymbol{\varphi}_{i,h}(\mathbf{m}_d), \mathbf{n}_d \rangle - \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_{i,h}(\mathbf{m}_d) \cdot (\mathbf{x}_T) \\
 &= \frac{1}{|T|} \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} (|d| \langle \boldsymbol{\varphi}_{i,h}(\mathbf{m}_d), \mathbf{n}_d \rangle - |d| \langle \boldsymbol{\varphi}_{i,h}(\mathbf{m}_d), \mathbf{n}_d \rangle) \\
 &= \frac{1}{|T|} \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} |d| \langle \boldsymbol{\varphi}_{i,h}(\mathbf{m}_d - \mathbf{x}_T), \mathbf{n}_d \rangle. \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

Damit sind für gegebenes $\boldsymbol{\varphi}_{i,h}$ die Größen \mathbf{a}_T und c_T durch die Bedingungen (4.9) eindeutig festgelegt.

Zuletzt sei angemerkt, dass der rekonstruierte Vektor $R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}$ im Gegensatz zu $\boldsymbol{\varphi}_{i,h}$ immer in $H_{\operatorname{div}}(\Omega)$ liegt. Sei dazu $\chi \in C^\infty(\Omega)$, dann gilt

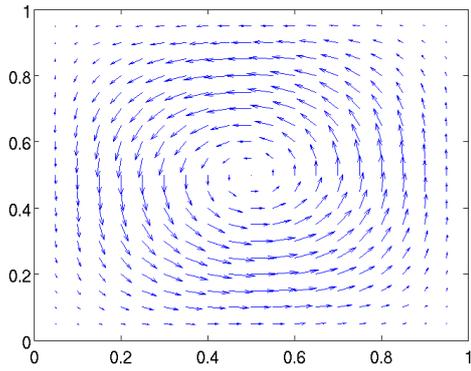
$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \chi \operatorname{div} R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} \, d\mu &: = \int_{\Omega} \chi \operatorname{div}_h R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} \, d\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \chi \operatorname{div} R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} \, d\mu \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\chi R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}) \, d\mu - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle \nabla \chi, R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} \rangle \, d\mu \\
 &= \sum_{d \in \mathcal{D}_h} \int_d [\chi \langle R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}, \mathbf{n}_d \rangle]_d \, d\mu - \int_{\Omega} \langle \nabla \chi, R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} \rangle \, d\mu \\
 &= - \int_{\Omega} \langle \nabla \chi, R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} \rangle \, d\mu. \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

Der entscheidende Punkt besteht darin, dass die Sprünge der Normalkomponenten auf den Dreieckskanten nun verschwinden und eine schwache Divergenz in diesem Fall definiert werden kann. Da zudem $\operatorname{div}_h R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h} = \operatorname{div}_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}$ und folglich für alle $\mathbf{v}_h \in V_h$ $\operatorname{div}_h R_h \mathbf{v}_h = \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h$ gilt, ist die Rekonstruktion divergenzfrei. Im Hinblick auf das am Anfang dieses Kapitels angesprochene Problem ist daher zu erwarten, dass der Fehler der Geschwindigkeit nicht mehr von dem Druck abhängig ist. Zusammenfassend ermöglicht die Rekonstruktion somit die Berechnung einer divergenzfreien Geschwindigkeit, ohne dass sie von dem Druck beeinflusst wird.

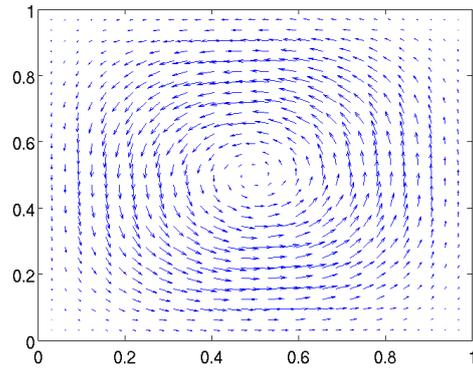
4.2 Numerische Studie der Methode

Die Implementation der Methode erfolgt auf ganz analoge Weise zur Implementation der nicht-konformen Methode. Das einzige, was sich im Vergleich beider Methoden ändert, ist die rechte Seite des Gleichungssystems, in der nun die rekonstruierten Funktionen $R_h \boldsymbol{\varphi}_{i,h}$ eingesetzt werden. Das MATLAB-Programm, welches im Rahmen dieser Arbeit für die neue rechte Seite geschrieben wurde, befindet sich im Anhang 6. Um die Druckabhängigkeit des Geschwindigkeitsfehlers der Methode mit Rekonstruktion mit der Methode ohne

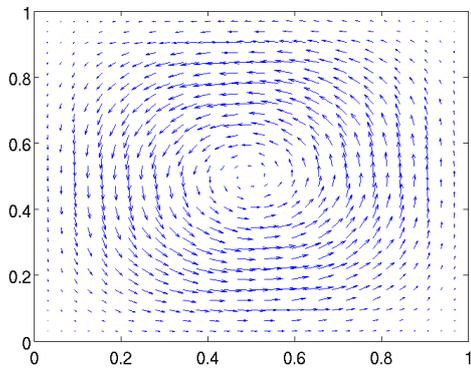
4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion



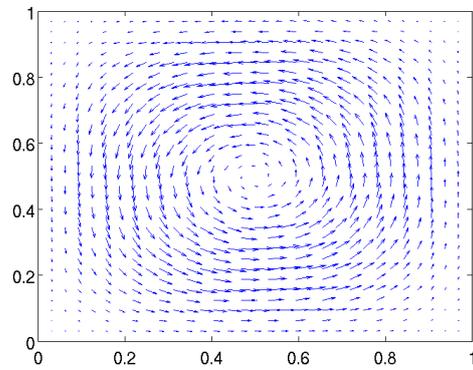
(a) Exakte Geschwindigkeit \mathbf{u} .



(b) Numerische Lösung \mathbf{u}_h mit rechter Seite \mathbf{f}_1 .



(c) Numerische Lösung \mathbf{u}_h mit rechter Seite \mathbf{f}_2 .



(d) Numerische Lösung \mathbf{u}_h mit rechter Seite \mathbf{f}_3 .

Abbildung 4.1: Exakte Geschwindigkeit \mathbf{u} und Geschwindigkeitsfelder \mathbf{u}_h mit Gitterweite $h = \frac{1}{16}$.

Rekonstruktion zu vergleichen, sollen nun dieselben Funktionen \mathbf{f}_i der rechten Seiten der Stokes-Gleichungen wie in Abschnitt 3.2.2 betrachtet werden. Die berechneten Geschwindigkeitsfelder mit rekonstruierter rechter Seite befinden sich in Abbildung 4.1. Die drei Geschwindigkeitsfelder zeigen eindrucksvoll, dass der steigende Druck keinen Einfluss auf die numerische Lösung der Geschwindigkeit \mathbf{u}_h besitzt. Dies war nach Konstruktion der Methode zu erwarten.

Dass es sinnvoll ist, die Rekonstruktion zu benutzen, zeigt sich bei der Auswertung der Fehlernormen. Würden die Konvergenzordnungen der Methode durch die Rekonstruktion sinken, so hätte die Methode in Bezug auf die Effizienz trotz des Vorteils der Druckunabhängigkeit nur einen geringen Wert. Die Fehlernormen $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{X_h}$, $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2}$ befinden sich in den Tabellen 4.1, 4.2 und 4.3. Es lässt sich zunächst anhand der Fehlerwerte eindeutig erkennen, dass die Konvergenzordnungen der drei Normen dieselben sind wie bei der Methode ohne Rekonstruktion. Zudem zeigen die Werte deutlich, dass die Geschwindigkeitsfehler nicht von den steigenden Druckfunktionen beeinflusst werden. Für das erste Beispiel mit rechter Seite \mathbf{f}_1 sind die Fehler der beiden

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion

feinsten Gitter in Abhängigkeit der Gitterordnung h wieder graphisch aufgetragen. Die Graphen befinden sich in Abbildung 4.2.

Abgesehen von dem Vorteil der Druckabhängigkeit der Geschwindigkeitsfehler kann die Methode mit Rekonstruktion nun noch unter zwei weiteren Aspekten untersucht werden.

Zunächst kann anstatt der numerischen Lösung \mathbf{u}_h die Funktion $R_h \mathbf{u}_h$ als eine zweite numerische Approximation von \mathbf{u} betrachtet werden. Von Interesse ist dabei in erster Linie die L^2 -Fehlernorm zwischen \mathbf{u} und $R_h \mathbf{u}_h$ in Abhängigkeit von der Gitterweite h . Da $R_h \mathbf{u}_h$ auf Grund der Divergenzfreiheit stückweise konstant ist, ist zu erwarten, dass die Konvergenzordnung in der L^2 -Norm höchstens linear ist. In Tabelle 4.4 sind diese Fehler für die drei Beispiele aufgetragen. Man beobachtet auch hier, dass die Druckänderung keinen Einfluss auf die Approximation $R_h \mathbf{u}_h$ hat. Für das erste Beispiel sind die Fehler in Abhängigkeit von der Gitterweite in Abbildung 4.3 graphisch dargestellt. Die Konvergenzordnung ist wie erwartet linear.

Zuletzt kann die L^2 -Fehlernorm $\|R_h^* \mathbf{u} - R_h \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2}$ untersucht werden. Dabei bezeichnet der Operator $R_h^* : H_0^1(\Omega)^2 \rightarrow RT_h$ eine Verallgemeinerung des Operators R_h , so dass er auch auf die Lösung \mathbf{u} anwendbar ist. Es werden in Analogie zu den beiden Bedingungen (4.9) die folgenden Bedingungen gestellt:

- (1) Für die stückweise Divergenz von $(\operatorname{div} R_h^* \mathbf{u})|_T$, $T \in \mathcal{T}_h$,
soll gelten $(\operatorname{div} R_h^* \mathbf{u})|_T = (\operatorname{div} \mathbf{u})|_T$.
- (2) Die Normalkomponente von $R_h^* \mathbf{u}$ soll konstant auf allen Dreiecksseiten $d \in \mathcal{D}_h^*$ sein mit $\langle (R_h^* \mathbf{u})|_d, \mathbf{n}_d \rangle = \frac{1}{|d|} \int_d \langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_d \rangle d\mathcal{H}^1$. (4.20)

Mit denselben Herleitungsschritten wie im vorherigen Abschnitt folgt für $R_h^* \mathbf{u}|_T = \mathbf{a}_T + c_T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)$, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_T &= \frac{1}{|T|} \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} |d| \mathbf{m}_d \frac{1}{|d|} \int_d \langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_d \rangle d\mathcal{H}^1 \\ &= \frac{1}{|T|} \sum_{d \in \mathcal{D}_h^*, d \cap \partial T \neq \emptyset} \mathbf{m}_d \int_d \langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_d \rangle d\mathcal{H}^1. \end{aligned} \tag{4.21}$$

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion

h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}$	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{X_h}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
0.25	0.004205527682106	0.053246454458528	0.085622274859467
0.125	0.001233429725355	0.028896364714660	0.043888559364374
0.0625	3.276531315850949e-04	0.014805687420136	0.022038277088055
0.03125	8.352693593283895e-05	0.007452809686343	0.011025759708951
0.015625	2.099414681010492e-05	0.003732899018275	0.005513403375664

Tabelle 4.1: Fehler zwischen analytischer Lösung (\mathbf{u}, p) und numerischer Lösung (\mathbf{u}_h, p_h) mit rechter Seite \mathbf{f}_1 .

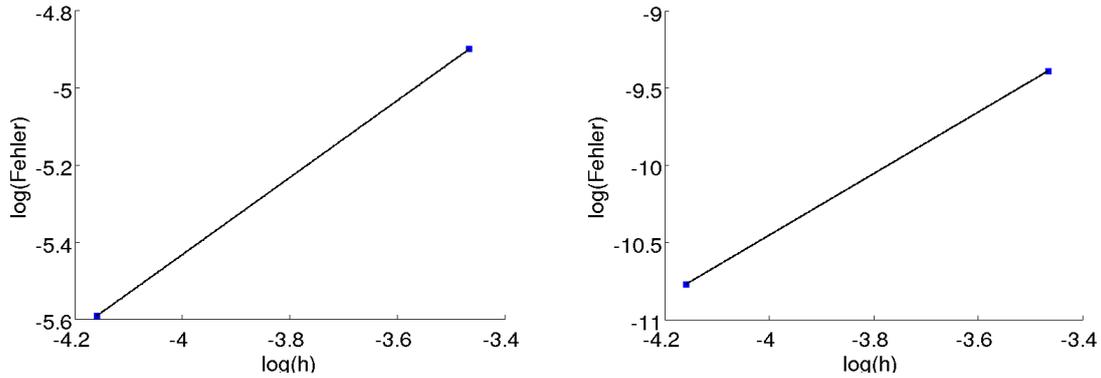
h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}$	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{X_h}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
0.25	0.004205527682106	0.053246454458528	0.849170150397174
0.125	0.001233429725355	0.028896364714660	0.435556358242160
0.0625	3.276531315850960e-04	0.014805687420136	0.219154167323826
0.03125	8.352693593284061e-05	0.007452809686343	0.109748829570273
0.015625	2.099414681010183e-05	0.003732899018276	0.054895860679798

Tabelle 4.2: Fehler zwischen analytischer Lösung (\mathbf{u}, p) und numerischer Lösung (\mathbf{u}_h, p_h) mit rechter Seite \mathbf{f}_2 .

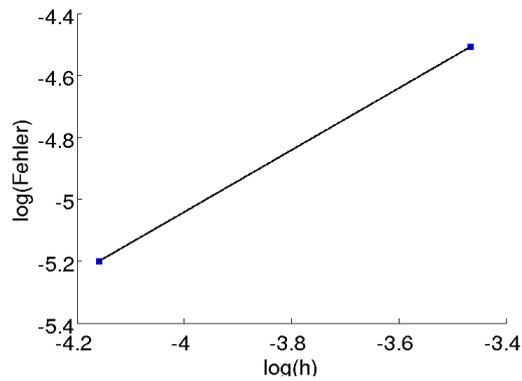
h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}$	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{X_h}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$
0.25	0.004205527682079	0.053246454458427	8.490986131915950e+03
0.125	0.001233429725372	0.028896364714790	4.355225997712392e+03
0.0625	3.276531315761649e-04	0.014805687420147	2.191417220473143e+03
0.03125	8.352693593224279e-05	0.007452809686394	1.097436784718917e+03
0.015625	2.099414683770790e-05	0.003732899018298	5.489344961930072e+02

Tabelle 4.3: Fehler zwischen analytischer Lösung (\mathbf{u}, p) und numerischer Lösung (\mathbf{u}_h, p_h) mit rechter Seite \mathbf{f}_3 .

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion



(a) X_h -Fehlernorm zwischen \mathbf{u} und \mathbf{u}_h . Die Steigung m der von MATLAB berechneten Regressionsgeraden entspricht $m = 0.997487938081525$. (b) L^2 -Fehlernorm zwischen \mathbf{u} und \mathbf{u}_h . Die Steigung m der von MATLAB berechneten Regressionsgeraden entspricht $m = 1.992254356714492$.



(c) L^2 -Fehlernorm zwischen p und p_h . Die Steigung m der von MATLAB berechneten Regressionsgeraden entspricht $m = 0.999863003442267$.

Abbildung 4.2: Geschwindigkeits- und Druckfehler des Stokes-Problems mit rechter Seite \mathbf{f}_1 in Abhängigkeit der Gitterweite h .

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion

h	$\ \mathbf{u} - R_h \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}, \mathbf{f}_1$	$\ \mathbf{u} - R_h \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}, \mathbf{f}_2$	$\ \mathbf{u} - R_h \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}, \mathbf{f}_3$
0.25	0.007349500645988	0.007349500645988	0.007349500645939
0.125	0.002794119298815	0.002794119298815	0.002794119298836
0.0625	0.001215400961869	0.001215400961869	0.001215400961862
0.03125	5.798487817567393e-04	5.798487817567399e-04	5.798487817551884e-04
0.015625	2.862101141557390e-04	2.862101141557383e-04	2.862101141629078e-04

Tabelle 4.4: L^2 -Fehlernormen zwischen exakter Lösung \mathbf{u} und der rekonstruierten Approximation $R_h \mathbf{u}_h$ für die drei Beispiele mit rechten Seiten \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 und \mathbf{f}_3 .

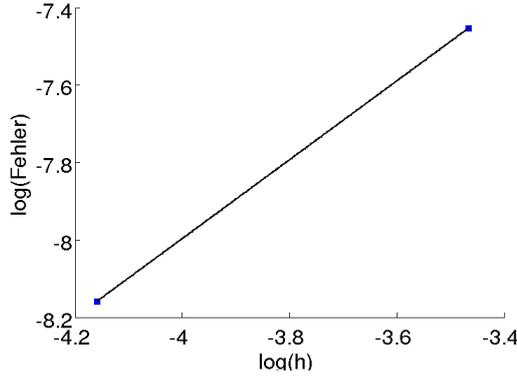


Abbildung 4.3: Geschwindigkeitsfehler zwischen \mathbf{u} und $R_h \mathbf{u}_h$ in der L^2 -Norm bei rechter Seite \mathbf{f}_1 . Die Steigung m der von MATLAB berechneten Regressionsgeraden beträgt $m = 1.018602054907679$.

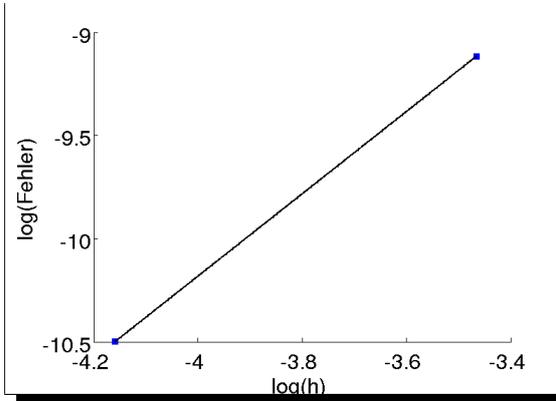


Abbildung 4.4: Geschwindigkeitsfehler zwischen $R_h^* \mathbf{u}$ und $R_h \mathbf{u}_h$ in der L^2 -Norm bei rechter Seite \mathbf{f}_1 . Die Steigung m der von MATLAB berechneten Regressionsgeraden beträgt $m = 1.994642422865276$.

Da die exakte Lösung \mathbf{u} der Stokes-Gleichungen divergenzfrei ist, ergibt sich sofort $c_T = 0$, so dass die Funktion $R_h^* \mathbf{u}$ stückweise konstant ist. Die Fehler zwischen $R_h^* \mathbf{u}$ und $R_h \mathbf{u}_h$ befinden sich in Abhängigkeit der Gitterweite für das Beispiel mit rechter Seite \mathbf{f}_1 in Tabelle 4.5. Die graphische Darstellung befindet sich in Abbildung 4.4. Es lässt sich deutlich eine quadratische Konvergenzordnung feststellen. Die Approximation $R_h \mathbf{u}_h$ ist damit möglicherweise gut geeignet, die Mittelwerte der Normalkomponenten $\frac{1}{|d|} \int_d \langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_d \rangle d\mathcal{H}^1$ für gegebene Kante $d \in \mathcal{D}_h^*$ mit Hilfe der zweiten Bedingung der Gleichung (4.20) zu approximieren. Da gilt $(R_h^*)|_{X_h} = R_h$

und somit $\|R_h^* \mathbf{u} - R_h \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} = \|R_h^* \mathbf{u} - R_h^* \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} = \|R_h^*(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(\Omega)^2}$, ist die quadratische Konvergenz wegen der schon beobachteten quadratischen Konvergenz zwischen

4 Eine divergenzfreie Rekonstruktion

h	$\ R_h^* \mathbf{u} - R_h \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)^2}$
0.25	0.005907799273335
0.125	0.001659596482832
0.0625	4.332211826277583e-04
0.03125	1.097887503681300e-04
0.015625	2.754930467239882e-05

Tabelle 4.5: L^2 -Fehlernorm zwischen der Approximation $R_h^* \mathbf{u}$ und der rekonstruierten Approximation $R_h \mathbf{u}_h$ für das Beispiel mit rechter Seite \mathbf{f}_1 .

\mathbf{u} und \mathbf{u}_h plausibel. Dies zu beweisen wäre eine Aufgabe, die weiterführend untersucht werden könnte.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die in Kapitel 4 vorgestellte Rekonstruktion umgeht das Problem der Druckabhängigkeit der Geschwindigkeit, welches im Fall der gemischten Diskretisierung auftritt. Ursache des Problems besteht darin, dass die mit der nicht-konformen Diskretisierung erhaltene Lösung nicht invariant unter den in Kapitel 4 beschriebenen Transformationen der rechten Seite der Stokes-Gleichungen ist. Die Invarianz gilt jedoch für die exakte Lösung, was den Ansatz für die Rekonstruktion aus Kapitel 4 motiviert. Obwohl das Problem der Druckabhängigkeit gelöst wird, ist festzuhalten, dass der implementative Aufwand beider Methoden keinen wesentlichen Unterschied aufzeigt, da nur die rechte Seite des diskreten Stokes-Problems geändert wird. Dies bestätigt eindrucksvoll den Vorteil der Rekonstruktion gegenüber der nicht-konformen Diskretisierung und rechtfertigt somit ihren Vorzug.

Neben dem Problem der Druckabhängigkeit ist außerdem hervorzuheben, dass die Konvergenzordnungen beider Methoden für die in dieser Arbeit gewählten Beispiele dieselben sind. Zudem liefert die Rekonstruktion eine weitere Approximation der exakten Lösung, welche geeignet ist, die Mittelwerte der Normalkomponenten der Geschwindigkeit mit quadratischer Konvergenzordnung zu approximieren. Um die Ergebnisse verallgemeinern zu können, würde es sich sehr anbieten, die folgenden Fragen genauer zu untersuchen:

- Lassen sich die Hauptfehlerabschätzungen aus Abschnitt 3.2.1 auf die Rekonstruktion übertragen und beweisen?
- Sind die Konvergenzordnungen an die geometrisch einfache Triangulierung gekoppelt oder bleiben sie für beliebige Triangulierungen erhalten?
- Welche weiteren Eigenschaften besitzt der eingeführte Rekonstruktionsoperator R_h^* ?
- Lässt sich die im letzten Abschnitt aus Kapitel 4 beobachtete quadratische Konvergenzordnung aus diesen Eigenschaften des Rekonstruktionsoperators herleiten oder hängt das Verhalten von der einfachen Triangulierung ab?
- Lässt sich die Rekonstruktion auch auf den 3-dimensionalen Fall übertragen?
- Lässt sich die Rekonstruktion auch auf andere Finite-Elemente Methoden für die Stokes-Gleichungen übertragen?

Die Abhängigkeit der Konvergenzordnungen von der Triangulierung könnte zunächst anhand einer numerischen Studie untersucht werden, in der die Methoden für allgemeine

5 Zusammenfassung und Ausblick

Triangulierungen des Gebiets implementiert werden. Um die Fehlerabschätzungen beweisen zu können, müsste man tiefergehende theoretische Betrachtungen in Analogie zu Abschnitt 3.2.1 unternehmen.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Rekonstruktion eine sehr vielversprechende Methode ist, das Problem der Druckabhängigkeit der Geschwindigkeit der Stokes-Gleichungen zu lösen, ohne dabei im Vergleich zur nicht-konformen Diskretisierung wesentlich an Effizienz zu verlieren.

6 Anhang

Die in diesem Anhang befindlichen MATLAB-Programme sind die wichtigsten, für diese Arbeit geschriebenen Routinen. Es wurden nicht alle geschriebenen Programme zur Bestimmung einzelner Normen angehängt, da sich diese nur unwesentlich unterscheiden. Zudem sei angemerkt, dass im Rahmen dieser Arbeit nur wenig Rücksicht auf die Effizienz der Programme gelegt wurde. Die Programme können an mehreren Stellen verbessert werden. Die Funktionen der Programme sind in den Programmen selbst erklärt. Schließlich sind die Programme als Hilfsprogramme erstellt worden, was bedeutet, dass, sofern unter geringem Aufwand möglich, Integrale oder stückweise Definitionen von Funktionen vor Beginn der Programmierung analytisch berechnet wurden.

6.1 nonconfcoeffsolver.m

```
1 function [u, A, b] =nonconfcoeffsolver(n, f,weights,tricoords)
2
3 % nonconfcoeffsolver.m bestimmt die Loesung der Poisson-Gleichung mit ...
4 %   den in der Arbeit vorgestellten nicht-konformen
5 %   finiten Elementen. Fuer die Arbeit wird nur die Systemmatrix A ...
6 %   benoetigt, da diese zweimal auf der Diagonalen der Systemmatrix
7 %   der Stokes-Gleichungen liegt. u ist die Loesung, A die Systemmatrix ...
8 %   und b die rechte Seite des diskreten Problems.
9
10 % Uebergabeparameter:
11
12 % n ist die Anzahl der Quadrate pro Zeile in dem Quadrat (0,1)x(0,1). ...
13 %   Insgesamt gibt es also n^2 Quadrate.
14 % f bezeichnet die rechte Seite und wird als functionhandle als ...
15 %   Funktion von R^2->R uebergeben.
16 % weights und tricoords sind die fuer die Quadratur in nonconfquad.m ...
17 %   benoetigten Gewichte und Stuetzstellen.
18
19 % Das Loesen der Poisson-Gleichung besteht aus den drei Schritten: ...
20 %   Systemmatrix erzeugen, Nicht-Nulleintraege initialisieren
21 %   und rechte Seite initialisieren. Die Loesung des Gleichungssystems ...
22 %   erfolgt mit dem Backslash Befehl.
23
24 % Schritt 1: Die Matrix hat fuer gegebenes n (n+1)*(3*n-1)+1 ...
25 %   Eintraege. Dies ist die Anzahl der Kantenmittelpunkte. Auf der
26 %   Diagonalen werden zunaechst nur 1-en initialisiert, da die ...
27 %   Geschwindigkeit auf dem Rand von (0,1)x(0,1) verschwindet.
```

6 Anhang

```

19
20 A=spdiags(ones((n+1)*(3*n-1)+1,1),[0],(n+1)*(3*n-1)+1,(n+1)*(3*n-1)+1);
21
22 % Schritt 2: Nicht-Null-Eintraege initialisieren: Die Knoten werden ...
    Zeilenweise von links nach rechts und von unten
23 % nach oben durchgegangen. Pro Quadrat werden die drei unteren Knoten ...
    gezaehlt (Kantenmittelpunkt der Diagonalkante,
24 % Kantenmittelpunkt der horizontalen Kante und Kantenmittelpunkt der ...
    rechten vertikalen Kante). Die Zaehler j bzw. k gehen
25 % die Zeilen bzw. Spalten durch. Die Reihenfolge in der Matrix ist pro ...
    Quadrat: Diagonalknoten, Horizontalknoten, Vertikalknoten.
26 % Auf Grund des Randes von (0,1)x(0,1) muessen einige Faelle beachtet ...
    werden.
27 % Fuer gegebenes j und k ist der [(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1]-te Eintrag ...
    in A der zum rechten vertikalen Knoten des k-ten Quadrats in
28 % der j-ten Zeile korrespondierende.
29
30 for j=1:n
31
32     for k=1:n+1
33
34         if (j==1 & k==1 ) % Ecke unten links
35
36         elseif (j==1 & k==n+1) % Ecke unten rechts
37
38             % Zeile durch diagonalen Freiheitsgrad
39             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=8;
40
41             if (n≠1)
42                 A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-2)=-2;
43                 A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+3*n+1)=-2;
44             else
45             end
46
47         elseif (j==n & k==1) % Ecke oben links
48
49         elseif (j==n & k==n+1) % Ecke oben rechts
50
51
52             % Zeile durch horizontalen Freiheitsgrad (am unteren ...
    Quadratrand)
53             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1))=4;
54             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=-2;
55             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-(3*n+2))=-2;
56
57             % Zeile durch diagonalen Freiheitsgrad
58             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=8;
59             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-2)=-2;
60             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1))=-2;
61
62
63         elseif (j==1 & k≠1 & k≠n+1) % Randelemente unten beachten
64             % Zeile durch vertikalen Freiheitsgrad
65             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,(j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1)=4;

```

6 Anhang

```

66     A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=-2;
67     A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+2)=-2;
68
69
70     % Zeile durch diagonalen Freiheitsgrad
71     A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=8;
72
73     %linken Rand beachten
74     if k≠2
75         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-2)=-2;
76     else
77         end
78
79     A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1)=-2;
80     A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+3*n+1)=-2;
81
82     elseif (j==n & k≠1 & k≠n+1) % Randelemente oben beachten
83         % Zeile durch vertikalen Freiheitsgrad
84         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1)=4;
85         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=-2;
86         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+2)=-2;
87
88         % Zeile durch horizontalen Freiheitsgrad (am unteren ...
89         %   Quadratrand)
90         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1), (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1))=4;
91         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1), (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=-2;
92         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1), (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-(3*n+2))=-2;
93
94         % Zeile durch diagonalen Freiheitsgrad
95         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=8;
96
97         %linken Rand beachten
98         if k≠2
99             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-2)=-2;
100        else
101            end
102
103        A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1))=-2;
104        A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1)=-2;
105
106    elseif (j≠1 & j≠n & k==n+1) % innere Elemente
107
108        % Zeile durch horizontalen Freiheitsgrad (am unteren ...
109        %   Quadratrand)
110        A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1), (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1))=4;
111        A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1), (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=-2;
112        A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1), (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-(3*n+2))=-2;
113
114        % Zeile durch diagonalen Freiheitsgrad
115        A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=8;
116
117        % linken Rand beachten
118        if k≠2
119            A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-2)=-2;

```

6 Anhang

```
118         else
119         end
120
121         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1))=-2;
122
123         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+3*n+1)=-2;
124
125
126     elseif (j≠1 & j≠n & k≠1 & k≠n+1) % innere Elemente
127
128         % Zeile durch vertikalen Freiheitsgrad
129         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1)=4;
130         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=-2;
131         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+2)=-2;
132
133         % Zeile durch horizontalen Freiheitsgrad (am unteren ...
134         % Quadratrand)
135         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1), (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1))=4;
136         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1), (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=-2;
137         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1), (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-(3*n+2))=-2;
138
139         % Zeile durch diagonalen Freiheitsgrad
140         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1)=8;
141
142         %linken Rand beachten
143         if k≠2
144             A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-2)=-2;
145         else
146         end
147
148         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1))=-2;
149         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1)=-2;
150         A((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1, (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+3*n+1)=-2;
151
152     else
153
154
155     end
156
157
158 end
159
160
161 end
162
163
164 % Schritt 3: Rechte Seite des Gleichungssystems aufstellen
165
166 h=1/n;
167
168 b=zeros((n+1)*(3*n-1)+1, 1);
169
170
```

6 Anhang

```
171     for j=1:n
172
173     for k=2:n+1
174
175     % Nicht-Nullelemente: (p,q) sind die Koordinaten des Zentrums der ...
176     % Basisfunktion des Raums X_h
177     % (Im Fall k==1 werden die Zentren ganz links abgezaehlt, daher ...
178     % muessen die Faelle nicht mit
179     % in die Schleife
180
181     if (j==1)
182
183         if k==n+1
184
185             else
186             % vertikal
187             p=(k-1)*h;
188             q=(j-1)*h+h/2;
189
190             b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)=nonconfquad(f,h,p,q,weights,tricoords,2);
191             end
192
193             % diagonal
194             p=(k-1)*h-h/2;
195             q=(j-1)*h+h/2;
196
197             b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)=nonconfquad(f,h,p,q,weights,tricoords,1);
198
199         elseif (j==n)
200
201             if k==n+1
202
203             else
204             % vertikal
205             p=(k-1)*h;
206             q=(j-1)*h+h/2;
207
208             b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)=nonconfquad(f,h,p,q,weights,tricoords,2);
209             end
210
211             % horizontal
212             p=(k-1)*h-h/2;
213             q=(j-1)*h;
214
215             b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),1)=nonconfquad(f,h,p,q,weights,tricoords,3);
216
217             % diagonal
218             p=(k-1)*h-h/2;
219             q=(j-1)*h+h/2;
220
221             b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)=nonconfquad(f,h,p,q,weights,tricoords,1);
222
```

6 Anhang

```
223     elseif (j≠1 & j≠n) % innere Elemente
224
225         if k==n+1
226
227             else
228                 % vertikal
229                 p=(k-1)*h;
230                 q=(j-1)*h+h/2;
231
232                 b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)=nonconfquad(f,h,p,q,weights,tricoords,2);
233                 end
234
235                 % horizontal
236                 p=(k-1)*h-h/2;
237                 q=(j-1)*h;
238
239                 b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),1)=nonconfquad(f,h,p,q,weights,tricoords,3);
240
241                 % diagonal
242                 p=(k-1)*h-h/2;
243                 q=(j-1)*h+h/2;
244
245                 b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)=nonconfquad(f,h,p,q,weights,tricoords,1);
246
247             else
248
249             end
250
251         end
252
253     end
254
255 % Loesen des Gleichungssystems
256
257 u=A\b;
258
259
260 end
```

6.2 nonconfquad.m

```
1 function [s] = nonconfquad(f,h,a,b,weights, tricoords,type)
2
3 % nonconfquad.m berechnet das Integral von f (f wird als ...
4   functionhandle als Funktion von R^2->R uebergeben)
5 % gewichtet mit der Basisfunktion des Raums X_h mit Zentrum im Punkt ...
6   (a,b). Die Gitterweite ist h.
7
8 % type gibt den Typ der Basisfunktion an: 1==Zentrum auf ...
9   Diagonalkante, 2==Zentrum auf rechter vertikaler Kante,
10 % 3==Zentrum auf der unteren horizontalen Kante.
```

6 Anhang

```
7 % weights und tricoords sind die für die Quadratur benötigten Gewichte ...
   und üSttzstellen.
8
9
10 k=length(weights); % Anzahl der Quadraturpunkte
11 r=zeros(2,k);
12
13 s1=0;
14 s2=0;
15 s3=0;
16 s4=0;
17 s5=0;
18 s6=0;
19
20
21 % Definition der mit der Basisfunktion gewichteten Funktion g ...
   = f * Basisfunktion
22
23 % diagonales Zentrum
24 g1=@(x,y) f(x,y) * (1+2/h*(-a+b+x-y)); % Dreieck links
25 g2=@(x,y) f(x,y) * (1+2/h*(a-b-x+y)); % Dreieck rechts
26
27 % Zentrum rechte vertikale Kante
28 g3=@(x,y) f(x,y) * (1+2/h*(-a+x)); % Dreieck links
29 g4=@(x,y) f(x,y) * (1+2/h*(a-x)); % Dreieck rechts
30
31 % Zentrum untere horizontale Kante
32 g5=@(x,y) f(x,y) * (1+2/h*(-b+y)); % Dreieck unten
33 g6=@(x,y) f(x,y) * (1+2/h*(b-y)); % Dreieck oben
34
35 % Je nach type sind die folgenden Faelle zu unterscheiden:
36
37 if type==1
38
39 % Dreieck 1
40
41 v1=[a-h/2,b-h/2]' [a+h/2,b+h/2]' [a-h/2,b+h/2]';
42 % Quadraturpunkte bestimmen
43 for i=1:k
44     r(:,i)=tricoords(1+(i-1)*3)*v1(:,1)+
45         tricoords(2+(i-1)*3)*v1(:,2)+
46         tricoords(3+(i-1)*3)*v1(:,3);
47 end
48 % Quadratur ueber Dreieck 1
49 for j=1:k
50     s1 = s1 + weights(j)*g1(r(1,j),r(2,j));
51 end
52
53 % Dreieck 2
54
55 v2=[a-h/2,b-h/2]' [a+h/2,b-h/2]' [a+h/2,b+h/2]';
56 % Quadraturpunkte bestimmen
57 for i=1:k
58     r(:,i)=tricoords(1+(i-1)*3)*v2(:,1)+
```

6 Anhang

```
59         tricoords(2+(i-1)*3)*v2(:,2)+
60         tricoords(3+(i-1)*3)*v2(:,3);
61     end
62     % Quadratur ueber Dreieck 1
63     for j=1:k
64         s2 = s2 + weights(j)*g2(r(1,j),r(2,j));
65     end
66
67     s = 1/2*(h.^2)*sum([s1 s2]);
68
69     elseif type==2
70
71         % Dreieck 1
72
73         v1=[[a-h,b-h/2]' [a,b-h/2]' [a,b+h/2]'];
74         % Quadraturpunkte bestimmen
75         for i=1:k
76             r(:,i)=tricoords(1+(i-1)*3)*v1(:,1)+
77                 tricoords(2+(i-1)*3)*v1(:,2)+
78                 tricoords(3+(i-1)*3)*v1(:,3);
79         end
80         % Quadratur ueber Dreieck 1
81         for j=1:k
82             s3 = s3 + weights(j)*g3(r(1,j),r(2,j));
83         end
84
85         % Dreieck 2
86
87         v2=[[a,b-h/2]' [a+h,b+h/2]' [a,b+h/2]'];
88         % Quadraturpunkte bestimmen
89         for i=1:k
90             r(:,i)=tricoords(1+(i-1)*3)*v2(:,1)+
91                 tricoords(2+(i-1)*3)*v2(:,2)+
92                 tricoords(3+(i-1)*3)*v2(:,3);
93         end
94         % Quadratur ueber Dreieck 1
95         for j=1:k
96             s4 = s4 + weights(j)*g4(r(1,j),r(2,j));
97         end
98
99     s = 1/2*(h.^2)*sum([s3 s4]);
100
101
102     elseif type==3
103
104         % Dreieck 1
105
106         v1=[[a-h/2,b]' [a-h/2,b-h]' [a+h/2,b]'];
107         % Quadraturpunkte bestimmen
108         for i=1:k
109             r(:,i)=tricoords(1+(i-1)*3)*v1(:,1)+
110                 tricoords(2+(i-1)*3)*v1(:,2)+
111                 tricoords(3+(i-1)*3)*v1(:,3);
112         end
```

6 Anhang

```
113         % Quadratur ueber Dreieck 1
114         for j=1:k
115             s5 = s5 + weights(j)*g5(r(1,j),r(2,j));
116         end
117
118         % Dreieck 2
119
120         v2=[[a-h/2,b]' [a+h/2,b]' [a+h/2,b+h]'];
121         % Quadraturpunkte bestimmen
122         for i=1:k
123             r(:,i)=tricoords(1+(i-1)*3)*v2(:,1)+
124                 tricoords(2+(i-1)*3)*v2(:,2)+
125                 tricoords(3+(i-1)*3)*v2(:,3);
126         end
127         % Quadratur ueber Dreieck 1
128         for j=1:k
129             s6 = s6 + weights(j)*g6(r(1,j),r(2,j));
130         end
131
132         s = 1/2*(h.^2)*sum([s5 s6]);
133
134     else
135
136     end
137
138
139
140
141 end
```

6.3 nonconfstokesassembler.m

```
1 function [l M r] = nonconfstokesassembler(n, f1,f2 ,weights,tricoords)
2
3 % nonconfstokesassembler.m erstellt die Systemmatrix fuer die ...
4   Stokesgleichungen
5
6 % l ist die Loesung des diskreten Problems, M die Systemmatrix und r ...
7   die rechte Seite des diskreten Problems
8
9 % Mit nonconfcoeffsolver wird zunaechst die Teilmatrix Y berechnet und ...
10  die rechte Seite der Laplacegleichung
11 % bzgl. f1 als erster Teilvektor der gesamten rechten Seite
12
13 [x Y z1] = nonconfcoeffsolver(n, f1 , weights, tricoords);
14
15 h=1/n;
16 A = Y;
17 b1= z1;
```

6 Anhang

```
16 % Nun wird analog die rechte Seite der Laplacegleichung bzgl. f2 ...
    berechnet als zweiter Teilvektor der gesamten rechten Seite
17
18 [x Y z2] = nonconfcoeffsolver(n, f2 , weights, tricoords);
19
20 b2 = z2;
21
22 x=0; Y=0 ; z1=0;
23
24 % Die Systemmatrix hat fuer gegebenes n 2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2 ...
    Eintraege. Um wie in nonconfcoeffsolver das Verschwinden der
25 % Geschwindigkeit auf dem Rand zu beachten, werden auf der Diagonalen ...
    zunaechst 1-en erzeugt. Die letzten 2*n^2 Diagonaleintraege
26 % werden dann zu 0-en, da dieser untere Matrixblock wegen des Drucks ...
    keine Nicht-Nulleintraege besitzt.
27
28 M=spdiags(ones(2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2,1),[0], ...
    2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2 , 2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2);
29
30 for l=(2*(n+1)*(3*n-1)+2 +1):(2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2)
31     M(l,l)=0;
32 end
33
34
35 % M wird zunaechst auf der Diagonalen zweimal mit A aufgefuellt
36
37 M( 1:(n+1)*(3*n-1)+1 , 1:(n+1)*(3*n-1)+1 ) = A;
38 M( ( (n+1)*(3*n-1)+1 + 1) : 2* ( (n+1)*(3*n-1)+1 ) , ( ...
    (n+1)*(3*n-1)+1 + 1) : 2* ( (n+1)*(3*n-1)+1 ) ) = A;
39
40
41 % Nun muessen die Matrizen B1 und B2 bzw. deren transponierten ...
    eingefuegt werden, welche durch die Druckansatzfunktionen
42 % entstehen. Die Basisfunktionen des Raums Y_h werden zeilenweise ...
    von links nach rechts und unten nach oben abgezaehlt: zunaechst
43 % die unteren Dreiecke einer Zeile, danach die oberen Dreiecke ...
    derselben Zeile und dann zur Zeile darueber. Es gibt 2*n^2 ...
    solcher % Basisfunktionen bei n Quadraten pro Zeile.
44
45 % Initialisieren der Matrix (B1)^T=:C und (B2)^T=:D
46
47 C=sparse(zeros((n+1)*(3*n-1)+1 , 2*(n.^2)) );
48 D=sparse(zeros((n+1)*(3*n-1)+1, 2*(n.^2)) );
49
50
51
52 for j=1:n
53
54     for k=2:n+1
55
56         if (j==1 & k==n+1)% kein vertikaler Knoten
57
58
```

6 Anhang

```

59      C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) + n ) = ...
60      -h; % linkes Dreieck vom diagonalen Knoten
61
62      C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
63      h; % rechtes Dreieck vom diagonalen Knoten
64
65      D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) + n ) = ...
66      h; % linkes Dreieck vom diagonalen Knoten
67
68      D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
69      -h; % rechtes Dreieck vom diagonalen Knoten
70
71      elseif (j≠1 & k==n+1)
72
73      C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) + n ) = ...
74      -h; % linkes Dreieck vom diagonalen Knoten
75
76      C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
77      h; % rechtes Dreieck vom diagonalen Knoten
78
79      D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1) , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
80      h; % oberes Dreieck vom horizontalen Knoten
81
82      D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1) , (j-1-1)*2*n + (k-1) + n ) ...
83      = -h; % unteres Dreieck vom horizontalen Knoten
84
85      D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) + n ) = ...
86      h; % linkes Dreieck vom diagonalen Knoten
87
88      D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
89      -h; % rechtes Dreieck vom diagonalen Knoten
90
91      elseif (j==1 & k≠n+1)
92
93      C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) ...
94      = -h; % linkes Dreieck vom vertikalen Knoten
95
96      C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1 , (j-1)*2*n + (k-1) + n + ...
97      1 ) = h; % rechtes Dreieck vom vertikalen Knoten
98
99      C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) + n ) = ...
100     -h; % linkes Dreieck vom diagonalen Knoten
101
102     C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
103     h; % rechtes Dreieck vom diagonalen Knoten
104
105     D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) + n ) = ...
106     h; % linkes Dreieck vom diagonalen Knoten
107
108     D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
109     -h; % rechtes Dreieck vom diagonalen Knoten
110
111     else
112
113     C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) ...
114     = -h; % linkes Dreieck vom vertikalen Knoten
115
116     C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1 , (j-1)*2*n + (k-1)+ n + 1 ...
117     ) = h; % rechtes Dreieck vom vertikalen Knoten

```

6 Anhang

```

94         C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) + n ) = ...
          -h; % linkes Dreieck vom diagonalen Knoten
95         C( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
          h; % rechtes Dreieck vom diagonalen Knoten
96
97
98         D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1) , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
          h; % oberes Dreieck vom horizontalen Knoten
99         D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1) , (j-1-1)*2*n + (k-1) + n ) ...
          = -h; % unteres Dreieck vom horizontalen Knoten
100
101        D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) + n ) = ...
          h; % linkes Dreieck vom diagonalen Knoten
102        D( (j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1 , (j-1)*2*n + (k-1) ) = ...
          -h; % rechtes Dreieck vom diagonalen Knoten
103
104        end
105
106
107        end
108
109    end
110
111
112    B1=transpose(C);
113    B2=transpose(D);
114
115    % Auffuellen der Systemmatrix mit den, durch den Druck ...
      entstehenden Bloecke:
116
117    M( ( 2*(n+1)*(3*n-1)+2 +1) : (2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2) , 1 : ( ...
      (n+1)*(3*n-1)+1 ) ) = B1;
118    M( ( 2*(n+1)*(3*n-1)+2 +1) : (2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2) , ...
      ((n+1)*(3*n-1)+1 + 1) : ( 2*(n+1)*(3*n-1)+2 ) ) = B2;
119
120    M( 1 : ( (n+1)*(3*n-1)+1 ) , ( 2* ( (n+1)*(3*n-1)+1 ) ...
      +1) : (2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2) ) = C;
121    M( ( (n+1)*(3*n-1)+1 + 1) : ( 2*(n+1)*(3*n-1)+2 ) , ( 2* ( ...
      (n+1)*(3*n-1)+1 ) +1) : (2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2) ) = D;
122
123
124    % Initialisieren der rechten Seite:
125
126    r = zeros(2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2 , 1);
127
128    r(1: ((n+1)*(3*n-1)+1) , 1) = b1;
129    r( ( ((n+1)*(3*n-1)+1) +1 ) : (2*(n+1)*(3*n-1)+2) , 1) = b2;
130
131    % M ist bis hierhin singulaer wegen den 0-en auf dem letzten 2*n^2 ...
      x 2*n^2-Block, weil es genau einen
132    % Eigenvektor mit Eigenwert 0 gibt. Dieser hat nur Null-Eintraege ...
      bis auf die letzten 2*n^2 Eintraege, welche gleich
133    % 1 sind. Dies bedingt wegen der Struktur von C und D, dass der ...
      Vektor Eigenwert 0 hat. Dies wird umgangen, indem ein

```

6 Anhang

```

134 % Druckfreiheitsgrad zu -1 gesetzt wird. Dadurch muss eine Zeile ...
      in den Matrizen B1 und B2 und die zugehoerige Spalte
135 % in deren transponierten geaendert werden, so dass der untere ...
      Nullblock in der Systemmatrix verschwindet.
136 % Das Aendern des einen Druckfreiheitsgrads kann verstanden werden ...
      als die Bedingung, dass das Integral des Drucks
137 % ueber das Gebiet (0,1)x(0,1) verschwinden muss. Diese Bedingung ...
      wird weiter unten nachtraeglich erfuehlt.
138 % Theoretisch setzt man einen Druckwert als konstant und loest das ...
      Gleichungssystem, so dass man nachtraeglich
139 % die Konstante so festlegen kann, um die Integralbedingung zu ...
      erfuehllen. Numerisch muss man die Konstante aber schon
140 % vorher festlegen, da man das Gleichungssystem nicht loesen kann, ...
      wenn ein Freiheitsgrad unbekannt bleiben soll.
141 % Der festgelegte Freiheitsgrad hat keinen Einfluss auf die ...
      Geschwindigkeit und wegen der Matrixstruktur von B1, B2 und
142 % deren Transponierten hat auch das Addieren/Subtrahieren einer ...
      Konstante auf jeden Druckwert keinen Einfluss auf
143 % die Geschwindigkeit.
144
145 W1=B1;
146 W2=B2;
147
148
149 x=zeros(1, (n+1)*(3*n-1)+1);
150
151
152
153 W1(1,1:(n+1)*(3*n-1)+1)=x;
154 W2(1,1:(n+1)*(3*n-1)+1)=x;
155
156 M( ( 2*(n+1)*(3*n-1)+2 +1) : (2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2) , 1 : ...
      ( (n+1)*(3*n-1)+1 ) ) = W1;
157 M( ( 2*(n+1)*(3*n-1)+2 +1) : (2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2) , ...
      ((n+1)*(3*n-1)+1 + 1) : ( 2*(n+1)*(3*n-1)+2 ) ) = W2;
158
159 M( 1 : ( (n+1)*(3*n-1)+1 ) , ( 2* ( (n+1)*(3*n-1)+1 ...
      ) +1) : (2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2) ) = transpose(W1);
160 M( ( (n+1)*(3*n-1)+1 + 1) : ( 2*(n+1)*(3*n-1)+2 ) , ( 2* ( ...
      (n+1)*(3*n-1)+1 ) +1) : (2*(n+1)*(3*n-1)+2+2*n.^2) ) = ...
      transpose(W2);
161
162 M( 2*(n+1)*(3*n-1)+2 +1, 2*(n+1)*(3*n-1)+2 +1 ) =-1;
163
164 % Loesen des Gleichungssystems
165
166 l=M\r;
167
168 % Nun muessen noch nachtraeglich die Druেকে modifiziert werden, ...
      so dass das Integral des Drucks ueber (0,1)x(0,1) verschwindet.
169 % Die Druckkoeffizienten sind die letzten 2*n^2 Eintraege des ...
      Loesungsvektors.
170
171 p=zeros(2*n.^2,1);

```

6 Anhang

```
172
173     for j=1:2*n.^2
174         p(j,1) = 1( 2*(n+1)*(3*n-1)+2+j,1);
175     end
176
177     intp= 1/2*h.^2*sum(p);
178
179     for j=1:(2*n.^2)
180         l( 2*(n+1)*(3*n-1)+2+j,1)=l( 2*(n+1)*(3*n-1)+2+j,1)-intp;
181     end
182
183
184
185 end
```

6.4 nonconfstokesnorms.m

```
1 function [unorm uernorm gradunorm graduernorm pnorm perrnorm] = ...
   nonconfstokesnorms ( n, funktionsfile)
2
3 % nonconfstokesnorms.m berechnet die L^2-Norm und X_h-Norm der ...
   Geschwindigkeit sowie die L^2-Norm des Drucks.
4 % Die Datei funktionsfile muss die Variablen tricoords, weights, u1, ...
   u2, delxu1, delyu1, delxu2, delyu2 und pressure definieren.
5 % u1 und u2 sind die exakten Geschwindigkeitskomponenten, ...
   delxu1,...,etc die partiellen Ableitungen, pressure ist die ...
   Druckfunktion,
6 % und weights und tricoords sind die ueblichen Angaben fuer die Quadratur.
7 % Die ßGroeen werden im ersten Schritt geladen, um dann die ...
   verschiedenen Normen berechnen zu öknnen. Dies erfolgt mit
8 % den Programmen nonconfl2norm.m, nonconfhlnorm.m und ...
   nonconfstokespressurenorm.m.
9
10 load(funktionsfile);
11
12 l2normu1=0;l2erru1=0; l2normu2=0;l2erru2=0;
13 hlnormu1=0;hlerr2=0 ; hlnormu2=0;hlerru2=0;
14 pnorm=0;perrnorm=0;
15
16 [l,~,~,] = nonconfstokesassembler(n, f1,f2 ,weights,tricoords);
17
18 ulappr = zeros((n+1)*(3*n-1)+1,1);
19 u2appr = zeros((n+1)*(3*n-1)+1,1);
20 pappr = zeros(2*n.^2,1);
21
22
23     ulappr(1:( (n+1)*(3*n-1)+1 ) , 1 ) = 1 ( 1: ((n+1)*(3*n-1)+1) , 1);
24     u2appr(1:( (n+1)*(3*n-1)+1 ) , 1 ) = 1 ( ( (n+1)*(3*n-1)+1+ 1) : ...
        (2*(n+1)*(3*n-1)+2) , 1);
```

6 Anhang

```
25     pappr(1:2*n.^2) = 1( ( (2*(n+1)*(3*n-1)+2) + 1 ) : ( ...
        (2*(n+1)*(3*n-1)+2) + 2*n.^2 ),1);
26
27     [l2normu1 l2erru1] = nonconfl2norm(n,u1appr, weights,tricoords, u1);
28     [h1normu1 hlerru1] = nonconfhl1norm(n,u1appr, weights,tricoords, ...
        u1, delxu1, delyu1);
29
30     [l2normu2 l2erru2] = nonconfl2norm(n,u2appr, weights,tricoords, u2);
31     [h1normu2 hlerru2] = nonconfhl1norm(n,u2appr, weights,tricoords, ...
        u2, delxu2, delyu2);
32
33     [pnorm perrnorm] = nonconfstokespressurenorm(n,pappr, ...
        weights,tricoords, pressure);
34
35
36
37     unorm = sqrt( l2normu1.^2+l2normu2.^2);
38     uerrnorm = sqrt( l2erru1.^2+l2erru2.^2);
39
40     gradunorm = sqrt( h1normu1.^2+h1normu2.^2);
41     graduerrnorm = sqrt( hlerru1.^2+hlerru2.^2);
42
43
44     end
```

6.5 nonconfl2norm.m

```
1  function [unorm,errnorm] = nonconfl2norm(n,u,weights,tricoords,uanalytic)
2
3  % nonconfl2norm.m berechnet die L^2-Norm der numerischen ...
   Geschwindigkeitsloesung und die L^2-Fehler-Norm zwischen numerischer
4  % und analytischer Loesung uanalytic. u bezeichnet den numerisch ...
   berechneten Koeffizientenvektor. n ist die Anzahl der Quadrate
5  % pro Zeile, mit der u berechnet wurde, dies muss also bekannt sein.
6
7  h=1/n;
8  p=length(weights); % Anzahl der Quadraturpunkte pro Dreieck
9  r=zeros(2,p);
10
11  s1=0;
12  s2=0;
13
14  s3=0;
15  s4=0;
16
17
18  normquad=0;
19  unorm=0;
20
21  errnormquad=0;
```

6 Anhang

```
22 errnorm=0;
23
24
25     for j=1:n
26
27         for k=2:n+1
28
29
30
31             % Koordinaten des Diagonal-Knotens
32
33             a=(k-1)*h-h/2;
34             b=(j-1)*h+h/2;
35
36
37             % Norm von u
38
39             % Dreieckweise Integration der Funktion und auf jedem Dreieck ...
40             % sind drei Basisfunktionen des Raums X_h ungleich null.
41             % Die Zaehlweise und Ordnung des Koeffizientenvektors u ist in ...
42             % nonconfcoeffsolver.m erklart. Wegen des Rands von (0,1)x(0,1)
43             % muessen einige Faelle unterschieden werden.
44
45             if (j≠n)
46
47                 g1=@(x,y) ( u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)*(1+2/h*(-(a+h/2)+x))+
48                 u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),1)*(1+2/h*((b-h/2)-y))+
49                 u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)*(1+2/h*(a-b-x+y)) ).^2;
50                 % Dreieck rechts vom Diagonalknoten
51
52                 g2=@(x,y) ( u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)*(1+2/h*((a-h/2)-x))+
53                 u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)*(1+2/h*(-(b+h/2)+y))+
54                 u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)*(1+2/h*(-a+b+x-y)) ).^2;
55                 % Dreieck links vom Diagonalknoten
56
57             else
58
59                 g1=@(x,y) ( u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)*(1+2/h*(-(a+h/2)+x))+
60                 u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),1)*(1+2/h*((b-h/2)-y))+u((j-1)*(3*n+1)+
61                 3*(k-1)-1,1)*(1+2/h*(a-b-x+y)) ).^2;
62                 % Dreieck rechts vom Diagonalknoten
63
64             % Horizontalterm äfflt weg
65
66                 g2=@(x,y) ( u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)*(1+2/h*((a-h/2)-x))+
67                 u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)*(1+2/h*(-a+b+x-y)) ).^2;
68                 % Dreieck links vom Diagonalknoten
69
70             end
71
72             % Fehlernorm.
73
```

6 Anhang

```

74     if (j≠n)
75
76         g3=@(x,y) (u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)*(1+2/h*(-(a+h/2)+x))+
77         u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),1)*(1+2/h*(b-h/2)-y))+
78         u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)*(1+2/h*(a-b-x+y)) ...
            -uanalytic(x,y)).^2;
79
80         g4=@(x,y) ( u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1-1)+1,1)*(1+2/h*((a-h/2)-x))+
81         u((j+1-1)*(3*n+1)+3*(k-1),1)*(1+2/h*(-(b+h/2)+y))+
82         u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)*(1+2/h*(-a+b+x-y))-uanalytic(x,y) ...
            ).^2;
83
84     else
85
86         g3=@(x,y) ( u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)*(1+2/h*(-(a+h/2)+x))+
87         u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),1)*(1+2/h*(b-h/2)-y))+
88         u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)*(1+2/h*(a-b-x+y))-uanalytic(x,y)).^2;
89
90         % Horizontalterm äffllt weg
91
92         g4=@(x,y) ( u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1-1)+1,1)*(1+2/h*((a-h/2)-x))+
93         u((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)*(1+2/h*(-a+b+x-y))-uanalytic(x,y)).^2;
94
95
96
97     end
98
99     % Integration.
100
101     % Dreieck 1 (rechts).
102
103     v1=[a-h/2,b-h/2]' [a+h/2,b-h/2]' [a+h/2,b+h/2]';
104     % Quadraturpunkte bestimmen.
105     for i=1:p
106         r(:,i)=tricoords(1+(i-1)*3)*v1(:,1)+
107         tricoords(2+(i-1)*3)*v1(:,2)+
108         tricoords(3+(i-1)*3)*v1(:,3);
109     end
110     % Quadratur ueber Dreieck 1.
111     for l=1:p
112         s1 = s1 + weights(l)*g1(r(1,l),r(2,l));
113         s3 = s3 + weights(l)*g3(r(1,l),r(2,l));
114     end
115
116
117
118     % Dreieck 2 (links).
119
120     v2=[a-h/2,b-h/2]' [a+h/2,b+h/2]' [a-h/2,b+h/2]';
121     % Quadraturpunkte bestimmen.
122     for i=1:p
123         r(:,i)=tricoords(1+(i-1)*3)*v2(:,1)+
124         tricoords(2+(i-1)*3)*v2(:,2)+
125         tricoords(3+(i-1)*3)*v2(:,3);

```

6 Anhang

```
126         end
127         % Quadratur ueber Dreieck 1.
128         for l=1:p
129             s2 = s2 + weights(l)*g2(r(1,l),r(2,l));
130             s4 = s4 + weights(l)*g4(r(1,l),r(2,l));
131         end
132
133
134         normquad = normquad + (s1+s2);
135         errnormquad = errnormquad + (s3+s4);
136
137         s1=0;
138         s2=0;
139
140         s3=0;
141         s4=0;
142
143
144         end
145
146     end
147
148     unorm = sqrt(1/2*h.^2*normquad);
149     errnorm = sqrt(1/2*h.^2*errnormquad);
150
151 end
```

6.6 nonconfrighthandreco1.m

```
1 function [b c] = nonconfrighthandreco1(n,f1,f2,weights, tricoords)
2
3 % nonconfrighthandreco1.m bestimmt die neue rechte Seite der ...
4 % Diskretisierung der Stokes-Gleichungen. Im Vergleich zur rechten
5 % Seite bei der nicht-konformen Methode ohne Rekonstruktion aendern ...
6 % sich nur die Integranden. Diese wurden vor Beginn
7 % der Programmierung analytisch ermittelt.
8 % f1 und f2 sind die Komponentenfunktionen der rechten Seite, n die ...
9 % Anzahl der Quadrate pro Zeile und weights und tricoords
10 % die Angaben fuer die Quadraturen.
11
12 h=1/n;
13
14 % Die Vektoren b und c enthalten die ersten bzw. zweiten ...
15 % (n+1)*(3*n-1)+1 Eintraege fuer die Geschwindigkeit. Die restlichen
16 % 2*n^2 Eintraege fuer den Druck aendern sich nicht im Vergleich zur ...
17 % Methode ohne Rekonstruktion. Fuer die Eintraege von b und c
18 % wurden zwei Quadratur-Methoden nonconfquadlreco1.m und ...
19 % nonconfquad2reco2.m geschrieben, die an nonconfquad.m angelehnt sind.
20 % Dass zwei Methoden benutzt wurden, liegt daran, dass beim ...
21 % Durchzaehlen der Basisfunktionen von X_h die rekonstruierten Basis-
```

6 Anhang

```
15 % funktionen unterschiedlich sind, je nachdem ob die erste ...
    Komponentenfunktion der Basisfunktion oder die zweite Komponenten-
16 % funktion der Basisfunktion gleich null ist.
17
18 b=zeros((n+1)*(3*n-1)+1,1);
19 c=zeros((n+1)*(3*n-1)+1,1);
20
21 % Die beiden folgenden Schleifen gehen alle Quadrate von links nach ...
    rechts und unten nach oben durch.
22 % j ist der Zeilenindex und k ist der Spaltenindex.
23
24 for j=1:n
25
26     for k=2:n+1
27
28         % (p,q) sind die Koordinaten des Zentrums der Basisfunktion des ...
            Raums X_h
29         % (Im Fall k==1 werden die Zentren ganz links abgezaehlt, daher ...
            muessen diese Faelle nicht betrachtet
30         % werden.) Wegen des Rands von (0,1)x(0,1) muessen einige Faelle ...
            beachtet werden.
31
32
33
34         if (j==1)
35
36             if k==n+1
37
38                 else
39                     % Rechte vertikale Kante.
40                     p=(k-1)*h;
41                     q=(j-1)*h+h/2;
42
43                     b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)=
44                     nonconfquadr1recol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,2);
45                 end
46
47                 % Diagonale Kante.
48                 p=(k-1)*h-h/2;
49                 q=(j-1)*h+h/2;
50
51                 b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)=
52                 nonconfquadr1recol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,1);
53                 c((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)=
54                 nonconfquad2recol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,1);
55
56             elseif (j==n)
57
58                 if k==n+1
59
60                 else
61                     % Rechte vertikale Kante.
62                     p=(k-1)*h;
63                     q=(j-1)*h+h/2;
```

6 Anhang

```
64
65         b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)=
66         nonconfquadlrecol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,2);
67     end
68
69     % Horizontale Kante.
70     p=(k-1)*h-h/2;
71     q=(j-1)*h;
72
73     c((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),1)=
74     nonconfquad2recol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,2);
75
76     % Diagonale Kante.
77     p=(k-1)*h-h/2;
78     q=(j-1)*h+h/2;
79
80     b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)=
81     nonconfquadlrecol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,1);
82     c((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)=
83     nonconfquad2recol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,1);
84
85     elseif (j≠1 & j≠n) % Innere Elemente.
86
87         if k==n+1
88
89             else
90                 % Rechte vertikale Kante.
91                 p=(k-1)*h;
92                 q=(j-1)*h+h/2;
93
94                 b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)+1,1)=
95                 nonconfquadlrecol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,2);
96             end
97
98             % Horizontale Kante.
99             p=(k-1)*h-h/2;
100            q=(j-1)*h;
101
102            c((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1),1)=
103            nonconfquad2recol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,2);
104
105            % Diagonale Kante.
106            p=(k-1)*h-h/2;
107            q=(j-1)*h+h/2;
108
109            b((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)=
110            nonconfquadlrecol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,1);
111            c((j-1)*(3*n+1)+3*(k-1)-1,1)=
112            nonconfquad2recol(f1,f2,h,p,q,weights,tricoords,1);
113
114        else
115
116        end
117
```

6 Anhang

```
118     end  
119 end
```

Literaturverzeichnis

- [1] E. Emmrich. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen: Eine Integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen Für Studierende*. Vieweg+Teubner Verlag, 2004.
- [2] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [3] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, 1986.
- [4] V. John. *Numerik partieller Differentialgleichungen: Eine elementare Einführung*. Freie Universität Berlin, 2009. Lecture notes in German.http://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/NUM_PDE/SS09/num_pde_intro.pdf.
- [5] Jürgen Jost. *Postmodern analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the German manuscript by Hassan Azad.
- [6] Alexander Linke. A divergence-free velocity reconstruction for incompressible flows. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(17-18):837–840, 2012.
- [7] R. Verfürth. *Numerische Strömungsmechanik*. Ruhr-Universität Bochum, 1999. Lecture notes in German.<http://www.ruhr-uni-bochum.de/num1/files/lectures/SM.pdf>.
- [8] R. Verfürth. *Numerische II (Finite Elemente)*. Ruhr-Universität Bochum, 2011. Lecture notes in German.<http://www.ruhr-uni-bochum.de/num1/files/lectures/NumDg12.pdf>.
- [9] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method. Vol. 1*. Butterworth-Heinemann, Oxford, fifth edition, 2000. The basis.